

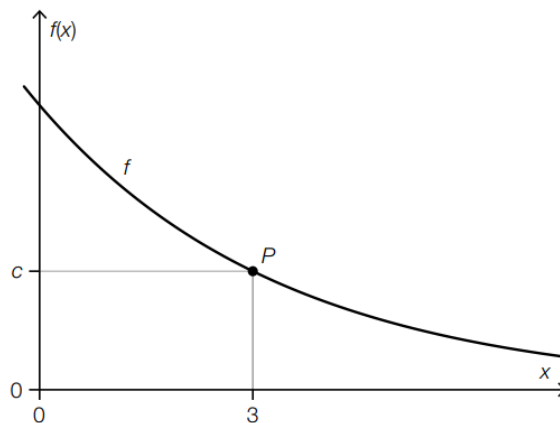
Grundkompetenz FA5 Exponentialfunktionen

Beispiele aus Maturaterminen Mai 2024 – Mai 2025
(AHS, BHS, Kompensationsprüfungen AHS)

TYP-1:

Exponentialfunktion

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ dargestellt. Der Punkt $P = (3|c)$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ liegt auf dem Graphen von f .



Aufgabenstellung:

Vervollständigen Sie unter Verwendung von a und c die nachstehende Gleichung der Funktion f .

$$f(x) = a \cdot \left(\boxed{} \right)^x$$

Anzahl an Brutpaaren

In einem Naturschutzgebiet wird eine bestimmte Vogelart beobachtet. Im Verlauf von 15 Jahren hat sich die Anzahl an Brutpaaren dieser Vogelart von ursprünglich 3 auf 24 erhöht. Es wird angenommen, dass die Anzahl an Brutpaaren mit den Jahren exponentiell zunimmt.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Anzahl der Jahre, in denen sich die Anzahl an Brutpaaren verdoppelt.

Sauerstoff

Die Funktion S ordnet der Temperatur T von Wasser die maximale Aufnahmefähigkeit $S(T)$ von reinem Sauerstoff zu (T in $^{\circ}\text{C}$, $S(T)$ in mg/L). Nachstehend ist eine Wertetabelle von S gegeben.

Temperatur T (in $^{\circ}\text{C}$)	maximale Aufnahmefähigkeit $S(T)$ (in mg/L)
0	14,6
20	9,1

Es wird angenommen, dass S eine Exponentialfunktion ist.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Temperatur T_1 , bei der $S(T_1)$ nur mehr halb so groß wie $S(0)$ ist.

Gammastrahlung

Bei einem Experiment mit einem radioaktiven Präparat wurde die Intensität der Gammastrahlung nach der Durchdringung durch drei Bleiplatten unterschiedlicher Dicke (2 cm, 5 cm bzw. 7 cm) gemessen. Die Ergebnisse sind in der nachstehenden Tabelle ersichtlich.

Plattendicke (in cm)	2	5	7
Intensität (in %)	38,94	9,46	3,69

Julian behauptet: „Die Daten lassen darauf schließen, dass die Intensität in Abhängigkeit von der Plattendicke annähernd exponentiell abnimmt.“

Aufgabenstellung:

Weisen Sie rechnerisch nach, dass Julians Behauptung richtig ist.

Halbwertszeit

Die Masse einer radioaktiven Substanz in Abhängigkeit von der Zeit t kann durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden. Dabei gilt:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}$$

$N(t)$... vorhandene Masse der radioaktiven Substanz zum Zeitpunkt t

N_0 ... vorhandene Masse der radioaktiven Substanz zum Zeitpunkt $t = 0$

$k \in \mathbb{R}^+$... Zerfallskonstante

Mit τ wird die Halbwertszeit der radioaktiven Substanz bezeichnet.

Mit t^* wird ein beliebiger Zeitpunkt bezeichnet.

Es gilt: $t^* \neq \tau$ und $t^* > 0$

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie den zu $N(t^* + \tau)$ äquivalenten Ausdruck an. [1 aus 6]

$2 \cdot N_0$	☐
$N(\tau)$	☐
$N\left(\frac{1}{2} \cdot t^*\right)$	☐
$2 \cdot N(\tau)$	☐
$N(2 \cdot t^*)$	☐
$\frac{1}{2} \cdot N(t^*)$	☐

TYP-2:

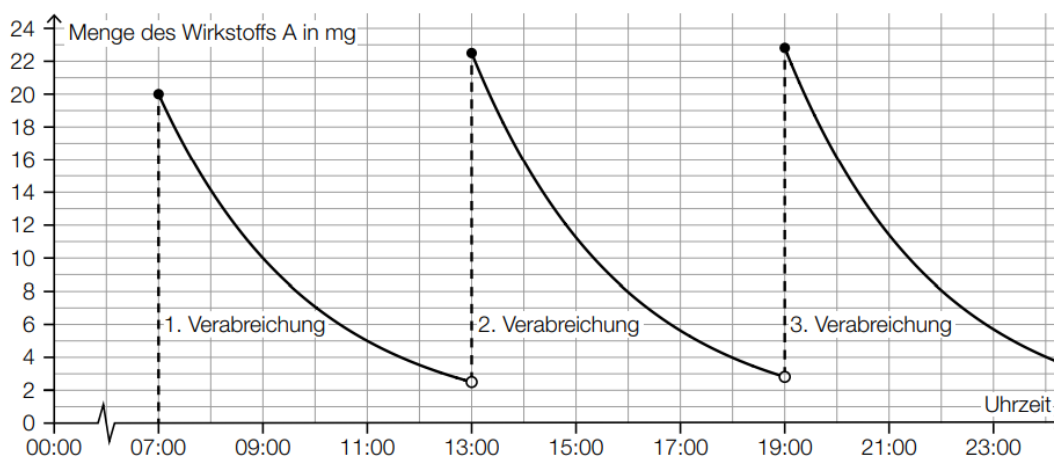
Wirkstoffe

Wirkstoffe werden im menschlichen Körper unterschiedlich schnell abgebaut.

Aufgabenstellung:

- a) Herr Winter bekommt den Wirkstoff A insgesamt 3-mal verabreicht. Um 7:00 Uhr bekommt Herr Winter den Wirkstoff A zum ersten Mal verabreicht.

In der nachstehenden Abbildung ist die Menge des Wirkstoffs A in Herrn Winters Körper in Abhängigkeit von der Uhrzeit modellhaft dargestellt.



- 1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. [0/½/1 P.]

Die Menge des Wirkstoffs A in Herrn Winters Körper um 13:00 Uhr ist ①
 die Menge des Wirkstoffs A in Herrn Winters Körper um 7:00 Uhr; in Herrn Winters Körper beträgt die Halbwertszeit des Wirkstoffs A ② .

①	
gleich groß wie	☐
kleiner als	☐
größer als	☐

②	
2 h	☐
3 h	☐
6 h	☐

E-Bikes

Ein E-Bike ist ein Fahrrad, das mit einem elektrischen Antrieb ausgestattet ist.

Aufgabenstellung:

- a) Im Jahr 2018 betrug der weltweite Umsatz aus dem Verkauf von E-Bikes 7,68 Milliarden US-Dollar (USD). Es wird prognostiziert, dass dieser weltweite Umsatz im Zeitraum von 2018 bis 2026 um jährlich 24,5 % steigen wird.

Die Funktion u beschreibt modellhaft den jährlichen weltweiten Umsatz aus dem Verkauf von E-Bikes in Abhängigkeit von der Zeit t (t ab 2018 in Jahren, $u(t)$ in Milliarden USD).

- 1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von u auf.

$u(t) = \underline{\hspace{10em}}$ mit $0 \leq t \leq 8$ [0/1 P.]

- 2) Ermitteln Sie mithilfe von u , wie viele Jahre nach 2018 der Umsatz doppelt so hoch wie im Jahr 2018 ist. [0/1 P.]

Bauernhöfe in Österreich

Auf österreichischen Bauernhöfen werden verschiedene Nutztiere gehalten.

Aufgabenstellung:

- a) In der nachstehenden Tabelle ist der durchschnittliche Geflügelbestand pro Bauernhof mit Geflügelhaltung für die Jahre 1999, 2010 und 2020 angegeben.

Jahr	durchschnittlicher Geflügelbestand pro Bauernhof mit Geflügelhaltung
1999	171
2010	258
2020	389

Der durchschnittliche Geflügelbestand pro Bauernhof mit Geflügelhaltung in Abhängigkeit von der Zeit t kann durch die Exponentialfunktion f modelliert werden.

Es gilt:

$$f(t) = a \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1999

$f(t)$... durchschnittlicher Geflügelbestand pro Bauernhof mit Geflügelhaltung zum Zeitpunkt t

a, λ ... positive Parameter

- 1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von f auf. Verwenden Sie dabei die Werte für die Jahre 1999 und 2020. [0/1 P.]

Aufgaben BHS – Matura

Lösungen Aufgabenpool BHS: <https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM>

Beryllium

Beryllium ist ein chemisches Element, das auf der Erde selten vorkommt.

- a) Der radioaktive Zerfall von Beryllium-7 kann mithilfe der Funktion N modelliert werden.

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad \text{mit } \lambda > 0$$

t ... Zeit in Tagen

$N(t)$... Anzahl der Beryllium-7-Atome zur Zeit t

N_0 ... Anzahl der Beryllium-7-Atome zur Zeit $t = 0$

$$\text{Es gilt: } N(53) = \frac{N_0}{2}$$

- 1) Interpretieren Sie die Zahl 53 im gegebenen Sachzusammenhang. [0/1 P.]
- 2) Ermitteln Sie den Parameter λ . [0/1 P.]

Kunststoffmüll

- a) Die zeitliche Entwicklung der jährlich weltweit produzierten Masse an Kunststoff kann näherungsweise durch die Exponentialfunktion f beschrieben werden.

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1950

$f(t)$... jährlich weltweit produzierte Masse an Kunststoff zur Zeit t in Millionen Tonnen

Im Jahr 1950 betrug die jährlich weltweit produzierte Masse an Kunststoff 2 Millionen Tonnen.

Seitdem stieg die jährlich weltweit produzierte Masse an Kunststoff um jeweils 8,5 % pro Jahr im Vergleich zum jeweiligen Vorjahr an.

- 1) Stellen Sie eine Gleichung der Exponentialfunktion f auf. [0/1 P.]
- 2) Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren sich die jährlich weltweit produzierte Masse an Kunststoff jeweils vervierfacht. [0/1 P.]

Speiseeis

- b) Ein Becher mit Speiseeis wird aus der Kühlvitrine entnommen. Die Temperatur des Speiseeises in Abhängigkeit von der Zeit kann modellhaft durch die Funktion T beschrieben werden.

$$T(t) = -35 \cdot e^{-0,03 \cdot t} + 25$$

t ... Zeit in min mit $t = 0$ für den Zeitpunkt der Entnahme aus der Kühlvitrine

$T(t)$... Temperatur des Speiseeises zur Zeit t in °C

- 1) Tragen Sie im nachstehenden Satz die fehlende Zahl ein.

Die Temperatur des Speiseeises bei der Entnahme aus der Kühlvitrine beträgt _____ °C.
[0/1 P.]

Das gefrorene Speiseeis schmilzt ab einer Temperatur von 0 °C.

- 2) Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt, ab dem das gefrorene Speiseeis schmilzt. [0/1 P.]

- c) Bei der Herstellung von Speiseeis wird die Eismasse zu Beginn langsam abgekühlt. Dieser Abkühlvorgang kann durch die Exponentialfunktion f mit einer Halbwertszeit von 4 h beschrieben werden.

$$f(t) = c \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

t ... Zeit in h mit $t = 0$ für den Beginn des Abkühlvorgangs

$f(t)$... Temperatur der Eismasse zur Zeit t in °C

c, λ ... positive Parameter

- 1) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. [1 aus 5]

[0/1 P.]

$f(2) \approx 0,25 \cdot c$	☐
$f(2) \approx 0,33 \cdot c$	☐
$f(2) \approx 0,50 \cdot c$	☐
$f(2) \approx 0,71 \cdot c$	☐
$f(2) \approx 2,00 \cdot c$	☐

Mai 2025, Prüfung 1: Festplattenspeicher

Ein bestimmtes Unternehmen produziert Festplatten. Die gesamte Speicherkapazität aller bisher produzierten Festplatten wird in Zettabyte (ZB) angegeben.

Zu Beginn des Jahres 2016 betrug die gesamte Speicherkapazität 1,25 ZB.

Die zeitliche Entwicklung der gesamten Speicherkapazität wird durch die Funktionen K_1 und K_2 modelliert.

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für den Beginn des Jahres 2016

$K_1(t)$, $K_2(t)$... gesamte Speicherkapazität zum Zeitpunkt t in ZB

- a) Das Unternehmen geht davon aus, dass sich die gesamte Speicherkapazität alle 4 Jahre verdoppelt.
Die zeitliche Entwicklung der gesamten Speicherkapazität soll durch die Funktion K_1 modelliert werden.

1) Stellen Sie eine Gleichung von K_1 auf.

- b) In einem anderen Modell gilt:

$$K_2(t) = 1,25 \cdot 1,2^t$$

- 1) Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren gemäß diesem Modell die gesamte Speicherkapazität 1 000 ZB betragen wird.
- 2) Interpretieren Sie die Zahl 1,2 in der obigen Gleichung im gegebenen Sachzusammenhang.

Mai 2025, Prüfung 2: Getränke aus dem Kühlschrank

Getränke aus dem Kühlschrank

- a) Ein bestimmtes Getränk wird aus einem Kühlschrank entnommen und in einen Raum mit einer höheren Temperatur als im Kühlschrank gestellt. Der zeitliche Verlauf der Temperatur dieses Getränks kann durch die Funktion f modelliert werden.

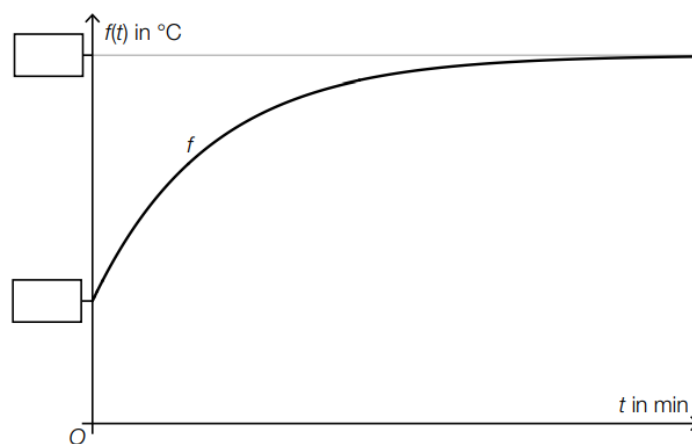
$$f(t) = c - d \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

t ... Zeit in min mit $t = 0$ für den Zeitpunkt der Entnahme aus dem Kühlschrank

$f(t)$... Temperatur des Getränks zum Zeitpunkt t in $^{\circ}\text{C}$

c, d, λ ... positive Parameter

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion f dargestellt.



- 1) Tragen Sie die fehlenden Ausdrücke in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

Mai 2025, Prüfung 3: Musikfestival

Ein bestimmtes Musikfestival findet jährlich statt.

- a) Die zeitliche Entwicklung des Ticketpreises für den Eintritt zum Musikfestival kann durch die Exponentialfunktion K modelliert werden.

$$K(t) = a \cdot b^t$$

t ... Zeit in Jahren

$K(t)$... Ticketpreis zum Zeitpunkt t in Euro

a, b ... positive Parameter

Der Ticketpreis hat sich nach 16 Jahren verdoppelt.

- 1) Ermitteln Sie den Parameter b .

Mai 2025, Prüfung 4: Arbeitsplätze

- b) Für zwei Unternehmen wird die zeitliche Entwicklung der Anzahl der Arbeitsplätze durch ein lineares Modell bzw. durch ein exponentielles Modell beschrieben.

Das Unternehmen A hat zu Beginn eines bestimmten Jahres 200 Arbeitsplätze. Die Anzahl der Arbeitsplätze nimmt in diesem Unternehmen in jedem Monat um 10 Arbeitsplätze ab.

Das Unternehmen B hat zu Beginn desselben Jahres 20 Arbeitsplätze. Die Anzahl der Arbeitsplätze nimmt in diesem Unternehmen in jedem Monat im Vergleich zum jeweiligen Vormonat um 25 % zu.

- 1) Berechnen Sie, nach welcher Zeit die Anzahl der Arbeitsplätze in beiden Unternehmen gemäß dieser Modelle gleich ist.

Mai 2025, Prüfung 5: Tunnel

- b) Die Geschwindigkeit einer anderen Tunnelbohrmaschine in Abhängigkeit von der Zeit wird durch die Funktion v_1 modelliert.

$$v_1(t) = 20 \cdot 0,978^t$$

t ... Zeit in Tagen mit $t = 0$ für den Baubeginn

$v_1(t)$... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in Metern pro Tag

- 1) Berechnen Sie, nach wie vielen Tagen die Geschwindigkeit dieser Tunnelbohrmaschine 15 Meter pro Tag beträgt.

Jänner 2025, Prüfung 1: Waren- und Güterverkehr

In einem anderen Modell wird die Menge der pro Jahr transportierten Güter in Abhängigkeit von der Zeit durch die Exponentialfunktion f beschrieben.

$$f(t) = 50\,000 \cdot 1,282^t$$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2017

$f(t)$... Menge der pro Jahr transportierten Güter zur Zeit t in Tonnen

Die Funktion f soll in der Form $f(t) = b \cdot e^{k \cdot t}$ dargestellt werden.

- 2) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$$f(t) = \boxed{} \cdot e^{\boxed{} \cdot t}$$

Oktober 2024, Prüfung 1: Pilze

Markus züchtet gewerbsmäßig Pilze.

- a) Die Masse eines bestimmten Pilzes wächst exponentiell und nimmt dabei stündlich um 2 % zu.

- 1) Berechnen Sie die Verdoppelungszeit der Masse dieses Pilzes.

Die zeitliche Entwicklung der Masse eines anderen Pilzes kann durch die Funktion m beschrieben werden.

t ... Zeit in h mit $t = 0$ für den Beginn der Messung

$m(t)$... Masse des Pilzes zum Zeitpunkt t in g

- 2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

$$m'(0) = 0,5$$

Oktober 2024, Prüfung 2: Brötchenteig

- a) Das Volumen des Teiges frisch geformter Brötchen nimmt annähernd exponentiell zu.

Martina formt aus einem bestimmten Teig ein Brötchen mit einem Volumen von 56 cm^3 .

30 Minuten später hat dieses Brötchen ein Volumen von 89 cm^3 .

Das Volumen dieses Teiges in Abhängigkeit von der Zeit soll durch die Exponentialfunktion V beschrieben werden.

t ... Zeit in h mit $t = 0$ für den Zeitpunkt, zu dem das Brötchen geformt ist

$V(t)$... Volumen des Teiges zum Zeitpunkt t in cm^3

- 1) Stellen Sie eine Gleichung dieser Funktion V auf.

Norbert formt aus diesem Teig ein Brötchen mit einem Volumen von 60 cm^3 und ein zweites Brötchen mit einem um 5 cm^3 kleineren Volumen.

Er behauptet: „Nach der Verdoppelungszeit T ist das Volumen des Teiges des zweiten Brötchens immer noch um 5 cm^3 kleiner als das Volumen des Teiges des ersten Brötchens mit 60 cm^3 .“

- 2) Zeigen Sie, dass diese Behauptung falsch ist.

- b) Die Dichte eines anderen Brötchenteigs in Abhängigkeit von der Zeit nach der Herstellung lässt sich durch die Exponentialfunktion D beschreiben.

$$D(t) = D_0 \cdot 0,9847^t$$

t ... Zeit in min mit $t = 0$ für den Zeitpunkt der Herstellung

$D(t)$... Dichte des Brötchenteigs zum Zeitpunkt t in g/cm^3

D_0 ... Dichte des Brötchenteigs zum Zeitpunkt $t = 0$ in g/cm^3

- 1) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Dichte des Brötchenteigs noch 75 % vom Wert zum Zeitpunkt der Herstellung beträgt.

Juni 2024, Prüfung 1: Seltene Tierart

In einem bestimmten Gebiet werden Tiere einer seltenen Tierart über einen bestimmten Zeitraum hinweg beobachtet.

In der nachstehenden Tabelle ist die Anzahl der Tiere für die Jahre 2010 und 2020 angegeben.

Jahr	Anzahl der Tiere
2010	600
2020	300

- a) Es wird angenommen, dass die Anzahl der Tiere im Zeitraum von 2010 bis 2020 exponentiell abnimmt.

Die Exponentialfunktion f beschreibt modellhaft die Anzahl der Tiere in Abhängigkeit von der Zeit.

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2010

$f(t)$... Anzahl der Tiere zum Zeitpunkt t

- 1) Stellen Sie eine Gleichung der Exponentialfunktion f auf.
- b) 1) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$$\frac{300 - 600}{2020 - 2010} = -30$$

Juni 2024, Prüfung 2: Infusionen

- c) Der Abbau des Wirkstoffs eines Medikaments im Körper nach dessen Verabreichung kann modellhaft durch eine Exponentialfunktion mit einer Halbwertszeit von 75 Minuten beschrieben werden.

- 1) Berechnen Sie, wie viel Prozent des Wirkstoffs dieses Medikaments pro Minute im Körper abgebaut werden.

Juni 2024, Prüfung 3: Unkrautvernichtungsmittel

Unkrautvernichtungsmittel werden unter anderem in der Landwirtschaft eingesetzt.
Im Ackerboden erfolgt der Abbau von Unkrautvernichtungsmitteln annähernd exponentiell.

- a) Die Funktion m beschreibt modellhaft die in einem Ackerboden pro Quadratmeter vorhandene Menge eines bestimmten Unkrautvernichtungsmittels in Abhängigkeit von der Zeit.

$$m(t) = a \cdot b^t$$

t ... Zeit in Tagen mit $t = 0$ für den Beginn des Messzeitraums

$m(t)$... Menge des Unkrautvernichtungsmittels in einem Ackerboden pro Quadratmeter zum Zeitpunkt t in g

a, b ... positive Parameter

- 1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der mittleren Änderungsrate D der Menge des Unkrautvernichtungsmittels im Zeitintervall $[2; t_1]$ auf.

$$D = \underline{\hspace{10cm}}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sind von diesem Unkrautvernichtungsmittel 0,18 g im Ackerboden vorhanden.

Nach 4 Tagen sind davon noch 0,14 g vorhanden.

- 2) Ermitteln Sie, nach welcher Zeit die im Ackerboden vorhandene Menge des Unkrautvernichtungsmittels auf 10 % der Anfangsmenge gesunken ist.

Juni 2024, Prüfung 4: Wölfe in Österreich

Eine Wildtierbiologin untersucht die Anzahl der Wölfe in verschiedenen Regionen Österreichs.

a) Für die Region A stellt sie folgende Behauptung auf:

„Die Anzahl der Wölfe nimmt aktuell sehr stark zu, und zwar mit einem exponentiellen Wachstum von rund 33 % pro Jahr, was eine Verdopplung in 3 Jahren bedeutet.“

1) Zeigen Sie, dass diese Behauptung zur Verdoppelungszeit unter der Annahme eines exponentiellen Wachstums mit einem jährlichen Änderungsfaktor von 1,33 nicht stimmt.

b) Für die Region B modelliert die Wildtierbiologin die Anzahl der Wölfe mithilfe der Funktion w .

$$w(t) = 31 \cdot e^{0,285 \cdot t}$$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für den Beginn des Jahres 2022

$w(t)$... Anzahl der Wölfe zum Zeitpunkt t

1) Berechnen Sie die absolute Änderung der Anzahl der Wölfe in dieser Region vom Beginn des Jahres 2022 bis zum Beginn des Jahres 2027.

c) Für die Region C modelliert die Wildtierbiologin die Anzahl der Wölfe mithilfe der Funktion u .

t ... Zeit in Jahren

$u(t)$... Anzahl der Wölfe zum Zeitpunkt t

Die mittlere Änderungsrate der Anzahl der Wölfe im Zeitintervall $[0; 3]$ ist um 25 % kleiner als die mittlere Änderungsrate der Anzahl der Wölfe im Zeitintervall $[3; 7]$.

1) Stellen Sie mithilfe der Funktion u eine Gleichung zur Beschreibung dieses Sachverhalts auf.

Juni 2024, Prüfung 5: Radioaktive Substanzen

Die jeweils noch vorhandene Masse von radioaktiven Substanzen in Abhängigkeit von der Zeit lässt sich durch die Exponentialfunktion m beschreiben.

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-k \cdot t}$$

t ... Zeit in Tagen

$m(t)$... vorhandene Masse zum Zeitpunkt t in g

m_0 ... vorhandene Masse zum Zeitpunkt $t = 0$ in g

- a) Von einer bestimmten radioaktiven Substanz sind nach 15 Tagen noch 5,3 g vorhanden. Die Masse nimmt täglich um 2,7 % ab.

1) Stellen Sie eine Gleichung der Exponentialfunktion m für diese radioaktive Substanz auf.

- b) Für eine andere radioaktive Substanz gilt:

$$k = 0,023$$

- 1) Berechnen Sie die Zeit, nach der nur noch 5 % der Masse m_0 dieser radioaktiven Substanz vorhanden sind.

- c) Eine weitere radioaktive Substanz hat die Masse $m_0 = 18$ g und eine Halbwertszeit von 8 Tagen.

- 1) Begründen Sie, warum der Zerfall dieser radioaktiven Substanz nicht durch den in der nachstehenden Abbildung dargestellten Graphen von f beschrieben werden kann.

