Grundkompetenz AN4 Summation und Integral

Beispiele aus Maturaterminen Mai 2024 – Mai 2025
(AHS, BHS, Kompensationsprüfungen AHS)

TYP-1:

Abschätzung eines bestimmten Integrals

Gegeben ist die stetige Funktion $f\colon [0; 2] \to \mathbb{R}^+$.

Die Funktion f ist im Intervall [0; 1] streng monoton steigend und im Intervall [1; 2] streng monoton fallend.

Das bestimmte Integral $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ wird mithilfe der Funktionswerte $f(0)$, $f(1)$ und $f(2)$ abgeschätzt.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Es gilt in jedem Fall ______①______ und ______②______.

①	
$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \geq 1 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1)$	☐
$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \geq 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2)$	☐
$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \geq 1 \cdot f(0) + 1 \cdot f(2)$	☐

②	
$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leq 2 \cdot f(0)$	☐
$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leq 2 \cdot f(1)$	☐
$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leq 2 \cdot f(2)$	☐

Bestimmtes Integral

Gegeben ist die lineare Funktion f mit $f(x) = -0{,}5 \cdot x + a$ mit $a > 0$.

Es gilt: $\int_0^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ mit $x_1 > 0$

Aufgabenstellung:

Tragen Sie in der nachstehenden Gleichung die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

$x_1 = \boxed{} \cdot a$

Bestimmtes Integral

Gegeben sind eine Polynomfunktion f und eine Stammfunktion F von f.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die auf jeden Fall zutreffende Gleichung an. *[1 aus 6]*

$\int_a^b (f(x) + x)\,dx = F(b) + b - (F(a) + a)$	☐
$\int_a^b f(b \cdot x)\,dx = F(b \cdot b) - F(b \cdot a)$	☐
$\int_a^b (f(x) + b - a)\,dx = F(b) - F(a) + \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$	☐
$\int_a^b b \cdot f(x)\,dx = b \cdot F(b) - b \cdot F(a)$	☐
$\int_a^b x \cdot f(x)\,dx = b \cdot F(b) - a \cdot F(a)$	☐
$\int_b^a f(x)\,dx = \frac{1}{F(b)} - \frac{1}{F(a)}$	☐

Beschleunigungsphase

Ein fahrendes Auto hat zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Geschwindigkeit von 15 m/s.

Für die Beschleunigung a des Autos zum Zeitpunkt t gilt: $a(t) = -0{,}1 \cdot t^2 + t$
(t in s, $a(t)$ in m/s^2)

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Autos (in m/s) zum Zeitpunkt $t = 5$ s.

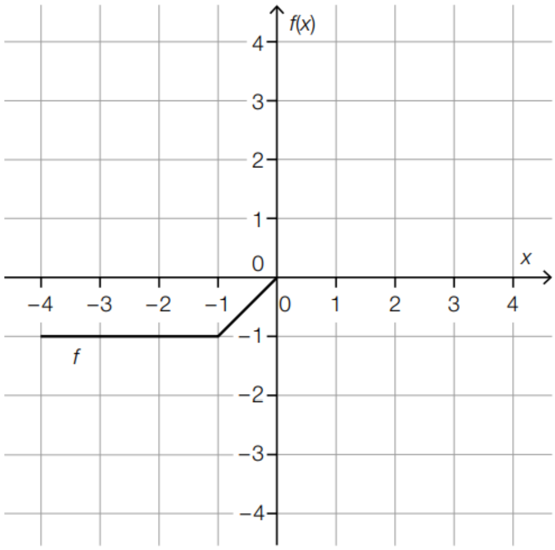
Zeichnen eines Funktionsgraphen

Die abschnittsweise lineare Funktion f ist auf dem Intervall $[-4; 4]$ definiert.
Im unten stehenden Koordinatensystem ist im Intervall $[-4; 0]$ der Graph von f eingezeichnet.

Es gilt: $\int_{-4}^{4} f(x)\,dx = 2{,}5$

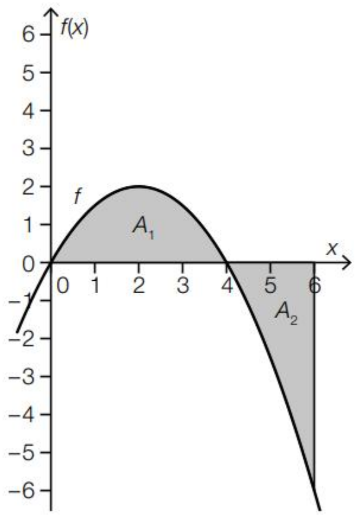
Aufgabenstellung:

Vervollständigen Sie im Intervall $[0; 4]$ einen möglichen Graphen von f.



Funktionswerte einer Stammfunktion

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Polynomfunktion f dargestellt.



A_1 ... Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[0; 4]$
A_2 ... Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[4; 6]$

Es gilt: $A_1 = A_2 = \frac{16}{3}$

Für eine Stammfunktion F von f gilt: $F(0) = 0$

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Werte von $F(4)$ und $F(6)$ an.

$F(4) =$ __________

$F(6) =$ __________

Geometrische Deutung der Summenregel

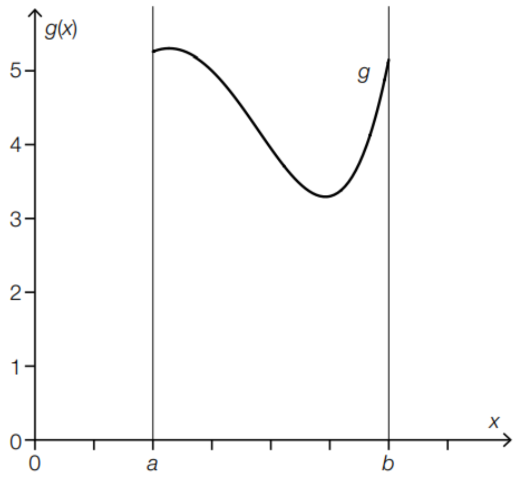
Gegeben sind die Polynomfunktionen f und g mit $g(x) = f(x) + 2$ mit $x \in [a; b]$.

Die Fläche zwischen dem Graphen von g und der x-Achse im Intervall $[a; b]$ teilt sich in eine Teilfläche mit dem Flächeninhalt A und eine Teilfläche mit dem Flächeninhalt B.
Es gilt:

$A = \int_a^b f(x)\,dx$ und $B = \int_a^b 2\,dx$

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung die Teilfläche mit dem Flächeninhalt A ein.

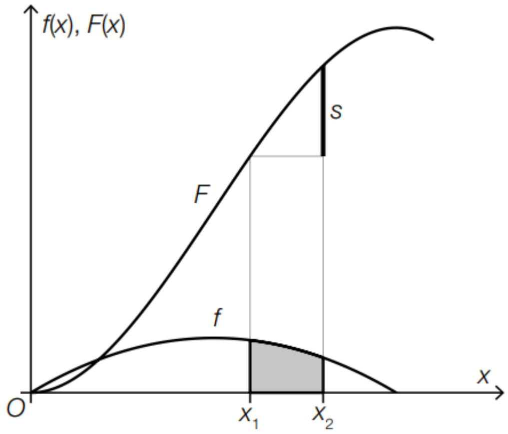


Funktion und Stammfunktion

In der unten stehenden Abbildung sind der Graph der Funktion f und der Graph einer ihrer Stammfunktionen F dargestellt.

Im Intervall $[x_1; x_2]$ ist unter dem Graphen der Funktion f ein Flächenstück grau gekennzeichnet.

Unter dem Graphen von F ist die Strecke mit der Länge s gekennzeichnet.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, die den Zusammenhang zwischen s und dem Inhalt des grau gekennzeichneten Flächenstücks richtig beschreibt. *[1 aus 6]*

$s = F(x_1) - F(x_2)$	☐
$s = f(x_2) - f(x_1)$	☐
$s = \frac{F(x_1) + F(x_2)}{2}$	☐
$s = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$	☐
$s = \int_{x_2}^{x_1} f(x)\,dx$	☐
$s = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$	☐

Flächeninhalt zwischen zwei Funktionsgraphen

In Abbildung 1 sind die Graphen der quadratischen Funktion f und der linearen Funktion g dargestellt.
In Abbildung 2 sind die Graphen der Funktionen F und G dargestellt.

Es gilt:
F ist eine Stammfunktion von f.
G ist eine Stammfunktion von g.

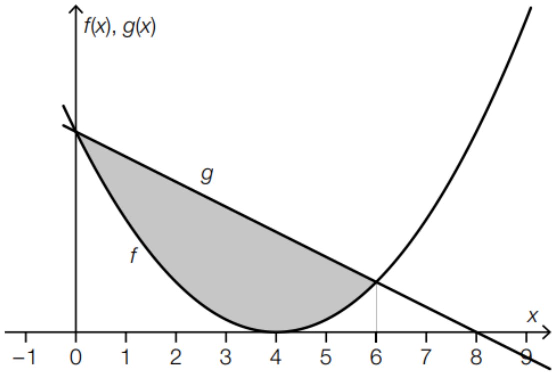


Abbildung 1

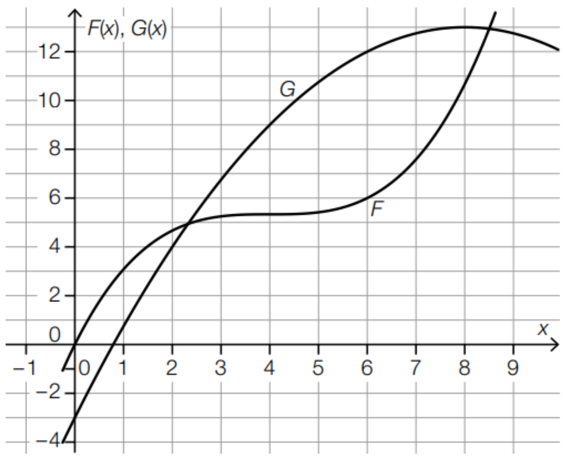


Abbildung 2

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie mithilfe der Abbildungen den Flächeninhalt A der grau markierten Fläche.

TYP-2:

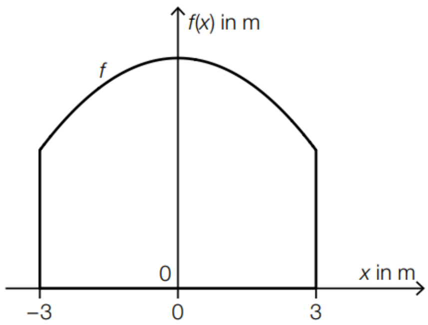
Garten

Aufgabenstellung:

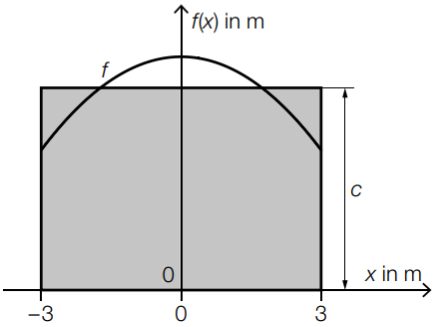
a) In der nebenstehenden nicht maßstabgetreuen Abbildung ist ein Blumenbeet modellhaft in der Ansicht von oben dargestellt.

Das Blumenbeet wird durch drei geradlinige Seiten und den Graphen der Funktion f: $[-3; 3] \to \mathbb{R}$ begrenzt.

Es gilt: $f(x) = a \cdot x^2 + b \quad$ mit $\quad a, b \in \mathbb{R}$



Dieses Blumenbeet soll so umgestaltet werden, dass es die Form eines Rechtecks mit der Länge 6 m und der Breite c (in m) hat (siehe nachstehende Abbildung). Der Flächeninhalt des Blumenbeets soll durch die Umgestaltung nicht verändert werden.



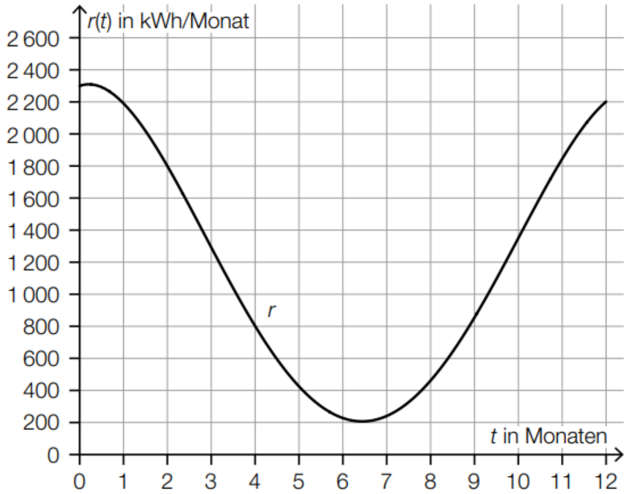
2) Stellen Sie mithilfe von f eine Formel zur Berechnung von c auf.

c = ______________________________ *[0/1 P.]*

Heizen mit Erdgas

b) Die Funktion $r\colon [0; 12] \to \mathbb{R}_0^+$ beschreibt modellhaft die Energieverbrauchsrate des Heizbedarfs eines bestimmten Haushalts in Abhängigkeit von der Zeit t für ein bestimmtes Kalenderjahr (siehe nachstehende Abbildung).

t ... Zeit ab Jahresbeginn in Monaten
$r(t)$ ... Energieverbrauchsrate des Heizbedarfs zum Zeitpunkt t in kWh/Monat



Die im Monat Mai benötigte Energie kann durch $\int_4^5 r(t)\,\mathrm{d}t$ berechnet werden.

1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/½/1 P.]*

Für die benötigte Energie gilt ______①______ und ______②______.

①	
$\int_4^5 r(t)\,\mathrm{d}t < \int_7^8 r(t)\,\mathrm{d}t$	☐
$\int_4^5 r(t)\,\mathrm{d}t > \int_9^{10} r(t)\,\mathrm{d}t$	☐
$\int_4^5 r(t)\,\mathrm{d}t > \int_6^7 r(t)\,\mathrm{d}t$	☐

②	
$\int_4^5 r(t)\,\mathrm{d}t > \frac{\int_0^{12} r(t)\,\mathrm{d}t}{12}$	☐
$\int_4^5 r(t)\,\mathrm{d}t < \frac{\int_0^{6} r(t)\,\mathrm{d}t}{6}$	☐
$\int_4^5 r(t)\,\mathrm{d}t < \frac{\int_4^{7} r(t)\,\mathrm{d}t}{3}$	☐

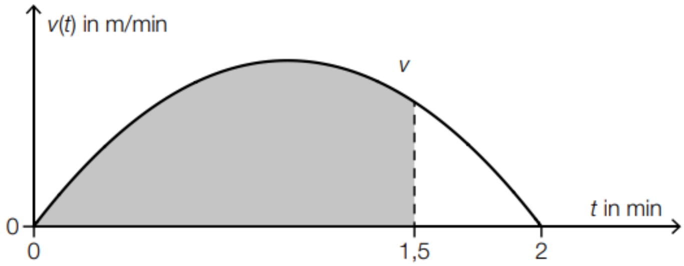
Tauchen im Grundlsee

b) Laurin macht einen Tauchgang und taucht dabei schräg nach unten. Seine Geschwindigkeit in vertikaler Richtung beim Abtauchen wird dabei modellhaft durch die quadratische Funktion v: $[0; 2] \to \mathbb{R}$ beschrieben.

Dabei gilt: $v(t) = c \cdot t \cdot (t - 2)$ mit $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

t ... Zeit ab Beginn des Abtauchens in min
$v(t)$ ... Geschwindigkeit in vertikaler Richtung zum Zeitpunkt t in m/min

Der Graph von v ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Interpretieren Sie den Flächeninhalt des in der obigen Abbildung grau markierten Bereichs im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

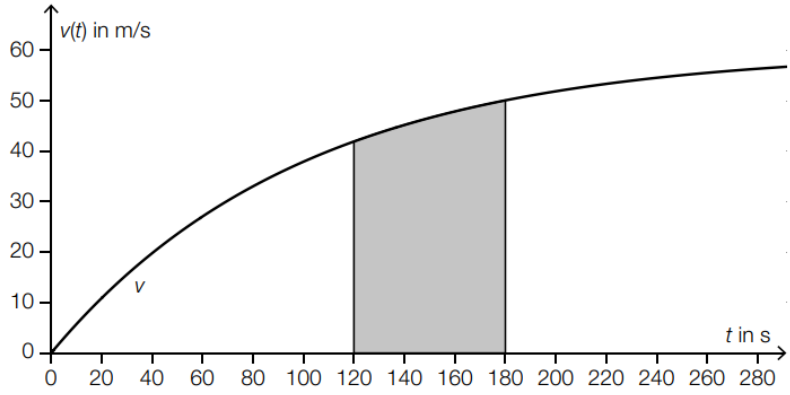
Laurin erreicht 2 min nach Beginn des Abtauchens eine Tauchtiefe von 16 m.

2) Ermitteln Sie c. *[0/1 P.]*

3) Ermitteln Sie dasjenige Zeitintervall, in dem Laurins Geschwindigkeit in vertikaler Richtung mindestens 9 m/min beträgt. *[0/1 P.]*

Zugfahrt

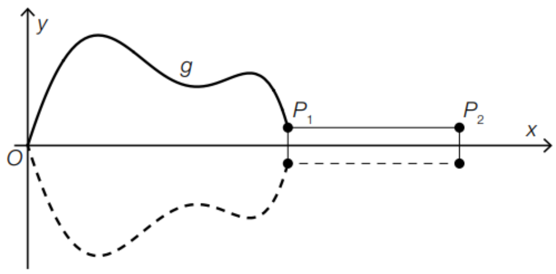
c) Der Graph der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion *v* eines anderen Zuges ist in der nachstehenden Abbildung modellhaft dargestellt.



1) Interpretieren Sie den Inhalt der in der obigen Abbildung grau markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

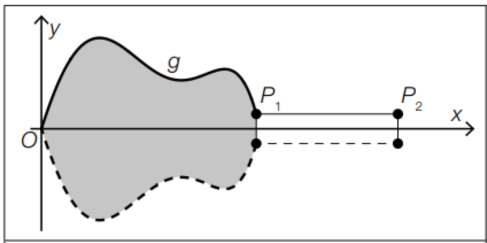
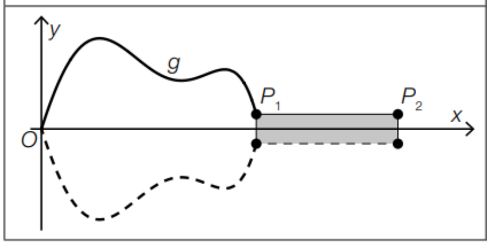
Gitarre

c) Michaela gestaltet ein Logo in Form einer Gitarre. Die obere Begrenzungslinie des Logos kann zwischen dem Koordinatenursprung und dem Punkt P_1 näherungsweise durch den Graphen der Funktion *g* beschrieben werden.
Das Logo ist symmetrisch zur *x*-Achse (siehe nachstehende Abbildung).



Es gilt:
$P_1 = (x_1 | y_1)$
$P_2 = (x_2 | y_1)$

1) Ordnen Sie den beiden grau markierten Flächen jeweils den zutreffenden Ausdruck zur Berechnung des Flächeninhalts aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

	☐
	☐

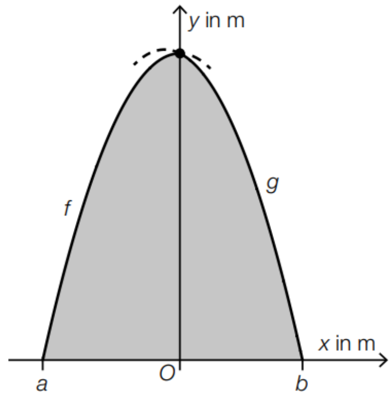
A	$2 \cdot \int_{x_1}^{x_2} y_1 \,\mathrm{d}x$
B	$2 \cdot \int_{0}^{x_1} g(x) \,\mathrm{d}x$
C	$2 \cdot \int_{0}^{y_1} x_1 \,\mathrm{d}x$
D	$2 \cdot \int_{0}^{x_2} g(x) \,\mathrm{d}x$

Kompensation AHS

https://www.mathago.at/kompensationspruefung-loesungen/

Mai 2025, Prüfung 2: Weidentunnel

a) Auf einem Kinderspielplatz werden Weidenzweige so in die Erde gesteckt, dass ein Tunnel entsteht.
In der nebenstehenden Abbildung sind modellhaft zwei verschiedene Weidenzweige dargestellt, die den Tunneleingang bilden. Der linke Weidenzweig kann durch den Graphen der Funktion f, der rechte Weidenzweig durch den Graphen der Funktion g dargestellt werden.
An der Stelle $x = 0$ haben f und g den gleichen Funktionswert.



Die Querschnittsfläche des Tunneleingangs ist in der obigen Abbildung grau markiert.

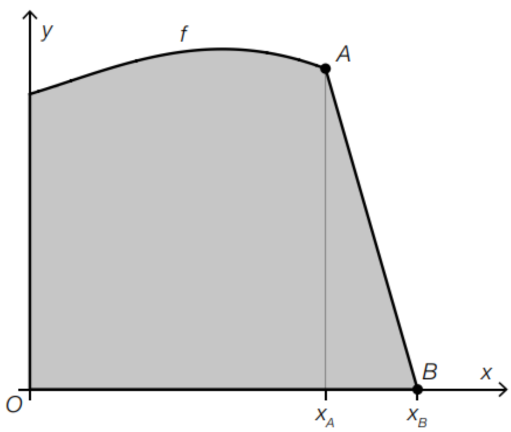
1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts A dieser Querschnittsfläche auf.

A = ____________________

Mai 2025, Prüfung 3: Musikfestival

b) In der nebenstehenden Abbildung ist das Gelände des Musikfestivals als grau markierte Fläche modellhaft in der Ansicht von oben dargestellt.

Die grau markierte Fläche wird von den beiden Achsen sowie durch den Graphen der Polynomfunktion f und durch ein Geradenstück zwischen den Punkten A und B begrenzt.

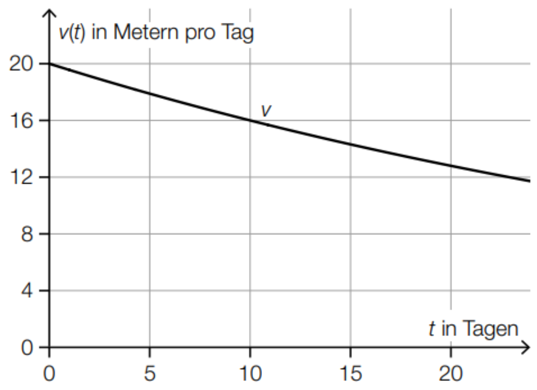


1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts F der grau markierten Fläche auf. Verwenden Sie dabei x_A, x_B und f.

F = ____________________

Mai 2025, Prüfung 5: Tunnel

a) Es wird ein 375 m langer Tunnel gegraben.
Die Geschwindigkeit der dabei verwendeten Tunnelbohrmaschine in Abhängigkeit von der Zeit wird durch die Funktion v modelliert. Der Graph von v ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.

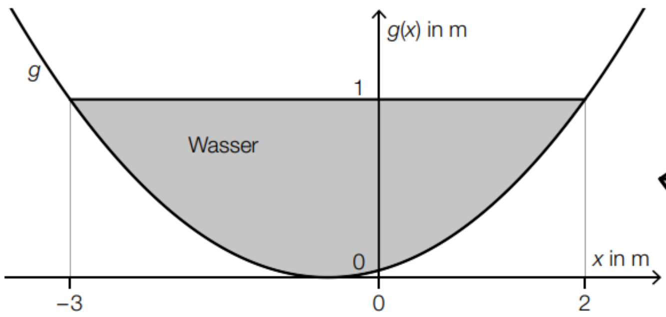


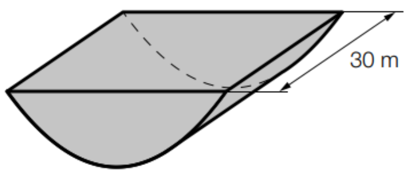
2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

$\int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t = 375 \quad \Rightarrow \quad x \approx 24{,}3$

Jänner 2025, Prüfung 1: Wasserkanal

b) Der Querschnitt eines anderen Abschnitts des Wasserkanals wird durch den Graphen der quadratischen Funktion g beschrieben. Dieser Abschnitt hat eine Länge von 30 m. (Siehe nachstehende Abbildungen.)





Es gilt: $g(x) = \frac{4}{25} \cdot x^2 + \frac{4}{25} \cdot x + \frac{1}{25}$

1) Berechnen Sie, wie viele Kubikmeter Wasser sich in diesem Abschnitt des Wasserkanals befinden.

Jänner 2025, Prüfung 1: Waren- und Güterverkehr

b) Die Anzahl der Pakete, die im Jahr 2022 in einem bestimmten Verteilzentrum pro Tag abgefertigt worden sind, lässt sich durch die Funktion p modellieren.

t ... Zeit in Tagen mit $t = 0$ für den Beginn des Jahres 2022
$p(t)$ ... Anzahl der pro Tag abgefertigten Pakete zur Zeit t

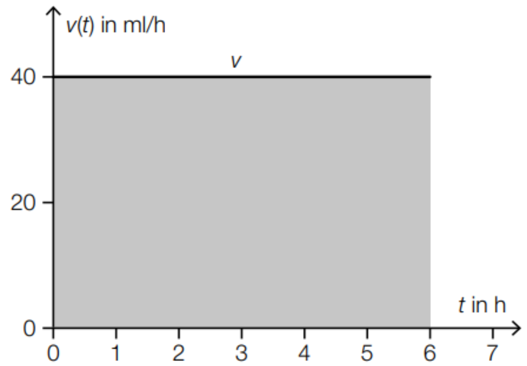
1) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$$\int_0^{365} p(t)\,\mathrm{d}t = 475\,000$$

Juni 2024, Prüfung 2: Infusionen

b) Die Infusionsgeschwindigkeit entspricht der momentanen Änderungsrate der Menge an erhaltener Infusionslösung.

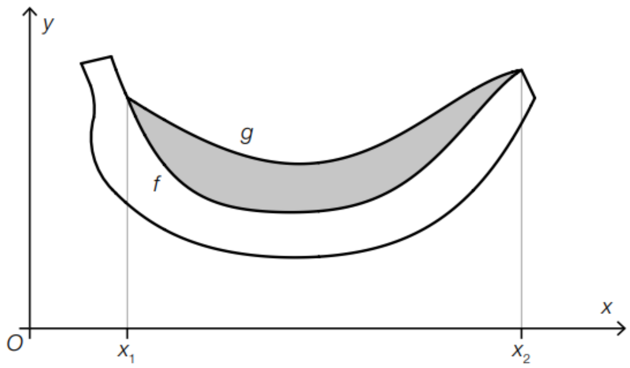
Richard erhält über 6 Stunden hinweg eine Infusion mit der konstanten Infusionsgeschwindigkeit v (siehe nachstehende Abbildung).



1) Interpretieren Sie den Flächeninhalt der in der obigen Abbildung grau markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

Juni 2024, Prüfung 2: Bananen

a) Leon entwirft ein Logo in Form einer Banane (siehe nachstehende Abbildung).



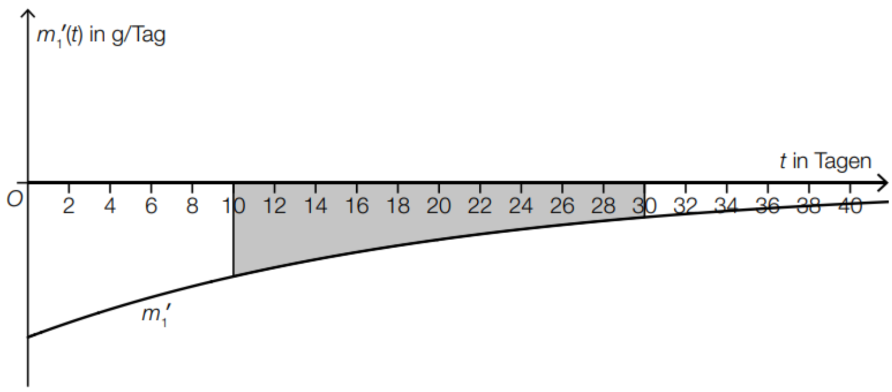
Die zwei Begrenzungslinien der in der obigen Abbildung grau markierten Fläche werden im Intervall $[x_1; x_2]$ durch die Graphen der Funktionen f und g beschrieben.

1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A der grau markierten Fläche auf.

A = ____

Juni 2024, Prüfung 3: Unkrautvernichtungsmittel

b) In der nachstehenden Abbildung ist die momentane Änderungsrate der im Ackerboden vorhandenen Menge eines anderen Unkrautvernichtungsmittels in Abhängigkeit von der Zeit durch den Graphen der Funktion m_1' dargestellt.



1) Interpretieren Sie den Flächeninhalt der in der obigen Abbildung grau markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.