Grundkompetenz AG3: Vektoren und Geraden

Beispiele aus Maturaterminen Mai 2024 – Mai 2025
(AHS, BHS, Kompensationsprüfungen AHS)

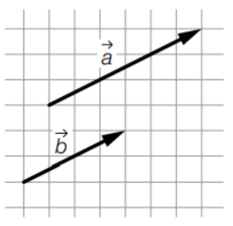
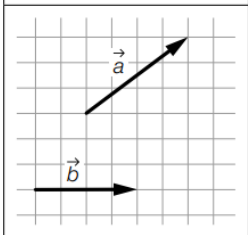
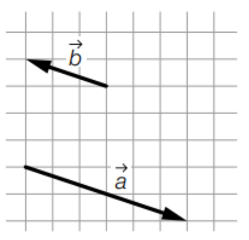
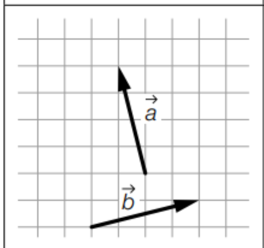
TYP-1:

Vektoren

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Abbildungen jeweils diejenige Aussage aus A bis F zu, die auf die dargestellten Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zutrifft.

	☐
	☐
	☐
	☐

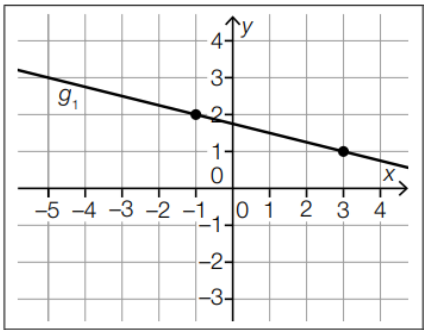
A	$(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$
B	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
C	$\vec{b} = \frac{3}{2} \cdot \vec{a}$
D	$\vec{a} = -2 \cdot \vec{b}$
E	$(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{a}$
F	$\vec{b} = \frac{2}{3} \cdot \vec{a}$

Parameterdarstellung einer Geraden

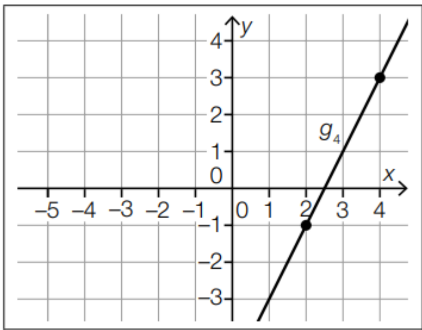
Unten stehend sind die sechs Geraden $g_1, g_2, \dots, g_6$ grafisch dargestellt. Die gekennzeichneten Punkte der Geraden haben ganzzahlige Koordinaten.

Aufgabenstellung:

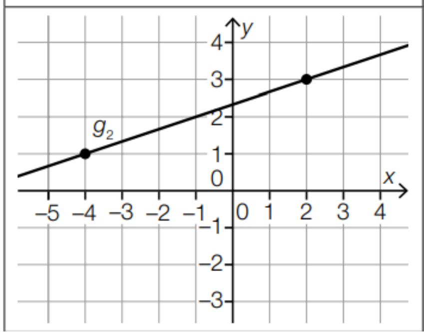
Kreuzen Sie die Darstellung derjenigen Geraden an, die eine Parameterdarstellung der Form $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ hat. *[1 aus 6]*



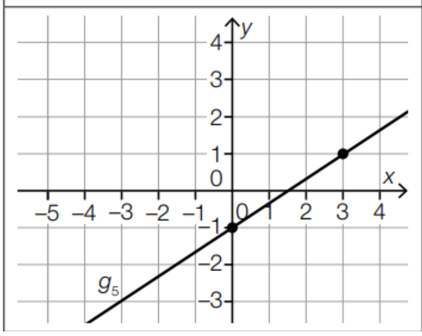
☐



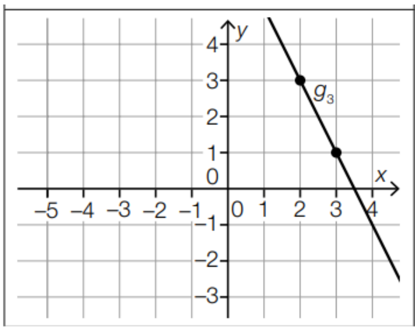
☐



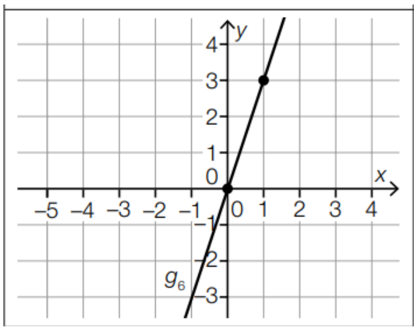
☐



☐



☐



☐

Vektoren in $\mathbb{R}^3$

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$, die sich vom Nullvektor unterscheiden.

Es gilt:
Der Vektor $\vec{n}$ steht sowohl auf den Vektor $\vec{a}$ als auch auf den Vektor $\vec{b}$ normal.
Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen nicht aufeinander normal.
Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind nicht zueinander parallel.

Aufgabenstellung:

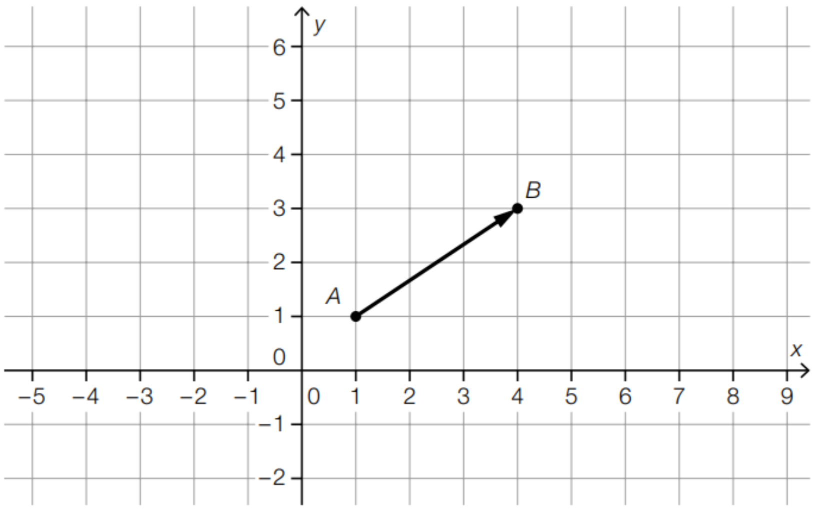
Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf jeden Fall zutreffen. *[2 aus 5]*

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{n}$	☐
$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{n} = 0$	☐
$a_1 \cdot n_1 + a_2 \cdot n_2 + a_3 \cdot n_3 = 0$	☐
Es gibt eine Zahl $k \in \mathbb{R}$ so, dass gilt: $\vec{a} + \vec{b} = k \cdot \vec{n}$	☐
Es gibt eine Zahl $k \in \mathbb{R}$ so, dass gilt: $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$	☐

Wegbeschreibung

Ein Weg geht von einem Punkt *A* über einen Punkt *B* zu einem Punkt *C*. Im Punkt *B* zweigt der Weg im rechten Winkel nach rechts ab. Zwischen den Punkten *B* und *C* verläuft der Weg geradlinig.

Der Weg *AB* ist im nachstehenden Koordinatensystem modellhaft dargestellt.



Aufgabenstellung:

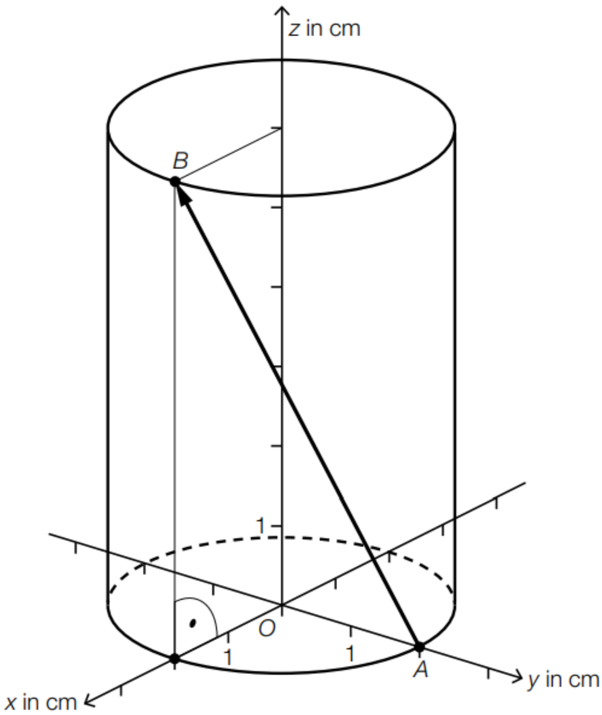
Geben Sie einen Vektor $\vec{a}$ an, der die Richtung des Weges *BC* beschreibt.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$

Vektoren im Drehzylinder

Gegeben ist ein 6 cm hoher Drehzylinder. Der Durchmesser der Grundfläche dieses Drehzylinders beträgt 4 cm, der Mittelpunkt dieser Grundfläche liegt im Koordinatenursprung. Die Grundfläche liegt in der *xy*-Ebene.

Die nachstehende Abbildung zeigt diesen Drehzylinder und den Vektor $\overrightarrow{AB}$.



Aufgabenstellung:

Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$

[0/1 P.]

Koordinaten zweier Punkte

Gegeben sind die zwei Punkte $A = (x|3)$ und $B = (-2|y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ sowie der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie x und y.

$x =$ ____________________

$y =$ ____________________

Geradengleichungen

Gegeben sind die zwei Geraden g und h in $\mathbb{R}^3$.

$g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

$h: X = B + u \cdot \vec{h}$ mit $u \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Für _____①_____ und _____②_____ sind g und h ident.

①	
$B = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$	☐
$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$	☐
$B = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$	☐

②	
$\vec{h} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$	☐
$\vec{h} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$	☐
$\vec{h} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$	☐

Hochstein

Die Skipiste am Hochstein in Lienz führt von der Talstation T des Hochsteinlifts (Meereshöhe 673 m) bis zur Hochsteinhütte H (Meereshöhe 2023 m).

Die 4000 m lange, geradlinige Skipiste ist in der nachstehenden (nicht maßstabgetreuen) Abbildung modellhaft als Strecke dargestellt.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie denjenigen Steigungswinkel der Skipiste, der sich aus diesem Modell ergibt.

Punkte auf einer Geraden

Die Gerade g in $\mathbb{R}^3$ verläuft durch die Punkte $P = (-1|0|3)$ und $Q = (3|-1|2)$.
Der Punkt A ist ein von P und von Q verschiedener Punkt auf g.

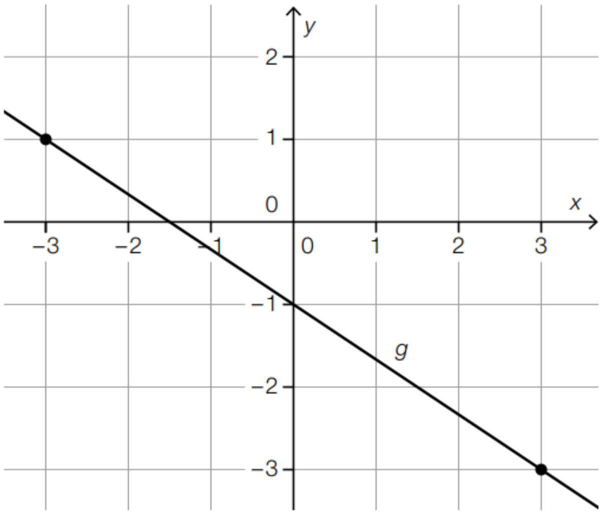
Aufgabenstellung:

Geben Sie mögliche Koordinaten von A an.

$A = (\_\_\_\_\_\_ | \_\_\_\_\_\_ | \_\_\_\_\_\_)$

Normalvektor einer Geraden

Die nachstehende Abbildung zeigt die Gerade g und zwei Punkte von g, die ganzzahlige Koordinaten haben.



Aufgabenstellung:

Geben Sie einen Normalvektor $\vec{n}$ der Geraden g an.

$\vec{n} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$

TYP-2:

Bogenschießen:

a) Paul schießt einen Pfeil auf eine Figur. Die Flugbahn der Pfeilspitze vom Start im Punkt S zum Ziel im Punkt Z kann durch die Gerade g modelliert werden.

Es gilt: $S = (0|0|1{,}8)$, $Z = (-5|7|8{,}5)$

1) Stellen Sie eine Gleichung von g in Parameterdarstellung auf.

g: $X =$ ____ *[0/1 P.]*

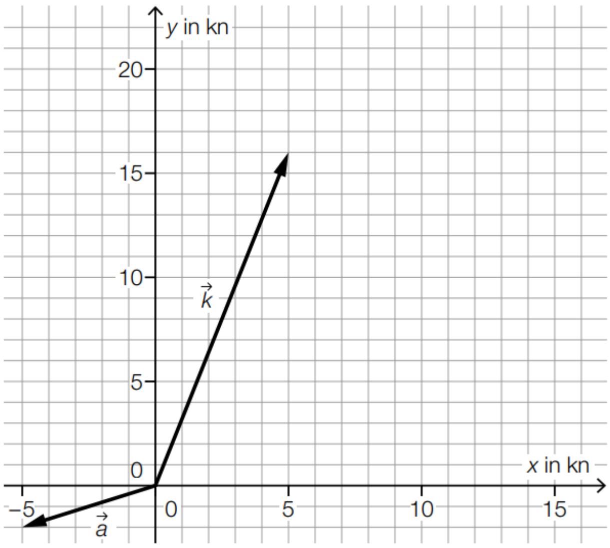
Containerschiffe

Containerschiffe ermöglichen den kostengünstigen Transport großer Mengen verschiedenster Güter auf dem Seeweg.

In der Schifffahrt werden Entfernungen in Seemeilen (sm) und Geschwindigkeiten in Knoten (kn) angegeben.

Aufgabenstellung:

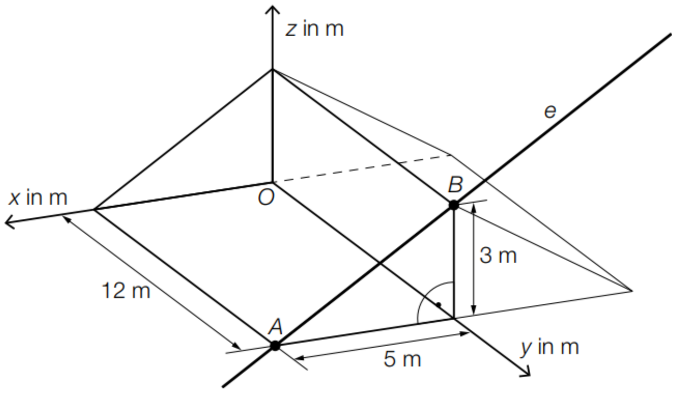
a) Der Kurs eines Containerschiffs wird modellhaft durch die Geschwindigkeitsvektoren $\vec{k}$, $\vec{a}$ und $\vec{s}$ beschrieben.
Der Zielkurs $\vec{k}$ ergibt sich aus dem angesteuerten Kurs $\vec{s}$ und der sogenannten Abdrift $\vec{a}$.
Es gilt: $\vec{k} = \vec{s} + \vec{a}$
Für einen bestimmten Zeitpunkt sind die Geschwindigkeitsvektoren $\vec{k}$ und $\vec{a}$ in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Vektor $\vec{s}$ als Pfeil ausgehend vom Koordinatenursprung ein. *[0/1 P.]*

Hausdach:

b) In der nachstehenden Abbildung ist ein Hausdach modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt. Das Dach wird durch Dachkanten begrenzt.



Die Dachkante AB liegt auf der Geraden e.
Der Punkt A liegt in der xy-Ebene, der Punkt B liegt in der yz-Ebene.

1) Geben Sie eine Parameterdarstellung von e an. *[0/1 P.]*

Zwei andere Dachkanten liegen auf den Geraden g und h. Es gilt:

$$g\colon X = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h\colon X = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } s, t \in \mathbb{R}$$

2) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/½/1 P.]*

Die beiden Geraden sind ___①___ und ___②___.

①	
zueinander parallel	☐
schneidend	☐
zueinander windschief	☐

②	
g verläuft parallel zur x-Achse	☐
h verläuft parallel zur y-Achse	☐
h verläuft durch den Punkt $(0\|0\|3)$	☐

Lösungen Aufgabenpool BHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM

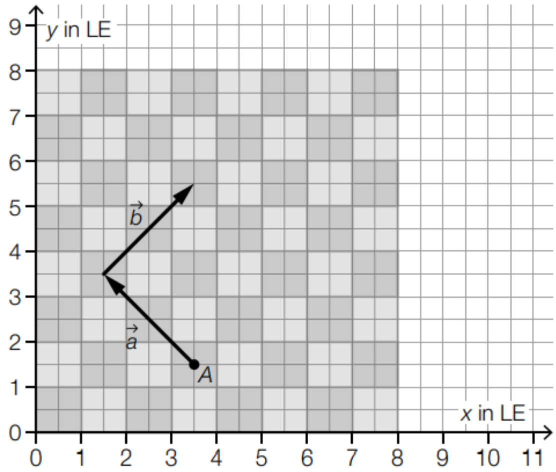
Spielesammlung

Franziska und Sandra spielen verschiedene Brettspiele einer Spielesammlung.

a) Bei dem Spiel *Dame* werden auf einem Spielbrett Spielsteine schräg gezogen.

Im nebenstehenden Koordinatensystem ist ein Spielzug von Franziska durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt.

x, y ... Koordinaten in Längeneinheiten (LE)



Für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt folgender Zusammenhang: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

1) Beschreiben Sie die geometrische Bedeutung dieses Zusammenhangs. *[0/1 P.]*

In einem anderen Spielzug zieht Sandra einen Spielstein entlang des Vektors $\vec{c}$.
Der Vektor $\vec{c}$ ist der Gegenvektor von $\vec{b}$.

2) Kreuzen Sie die <u>nicht</u> zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

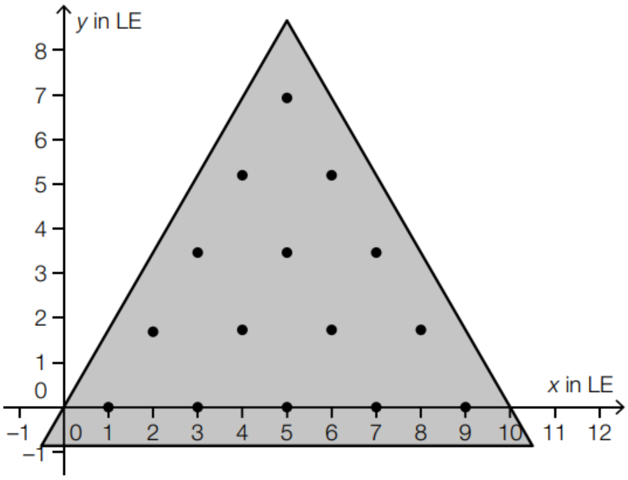
$\lvert\vec{b}\rvert = \lvert\vec{c}\rvert$	☐
$\vec{b} = -\vec{c}$	☐
$\vec{b} \cdot \vec{c} = -\lvert\vec{b}\rvert^2$	☐
$\vec{c} = \frac{1}{\lvert\vec{b}\rvert} \cdot \vec{b}$	☐
$\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐

b) *Solitär* ist ein Spiel, das man alleine spielt. Dabei werden Spielsteine durch Überspringen vom Spielfeld entfernt.

Die ersten zwei Spielzüge können durch folgende Vektoren beschrieben werden:

$\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$

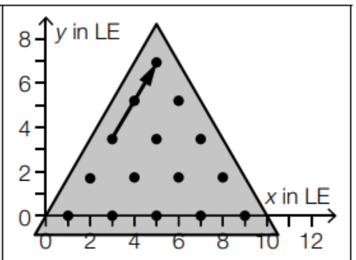
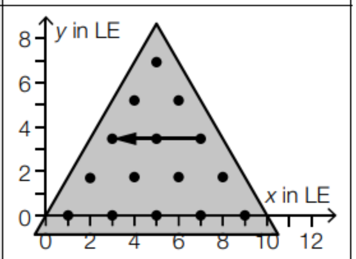
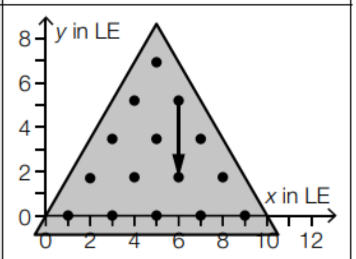
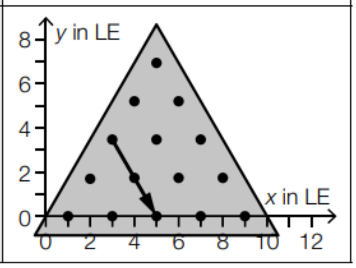
x, y ... Koordinaten in Längeneinheiten (LE)



1) Zeigen Sie rechnerisch, dass die zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die gleiche Länge haben. *[0/1 P.]*

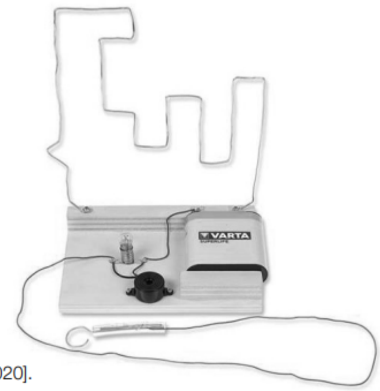
2) Ordnen Sie den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ jeweils eine passende Darstellung aus A bis D zu. *[0/½/1 P.]*

$\vec{u}$	☐
$\vec{v}$	☐

A	
B	
C	
D	

Heißer Draht

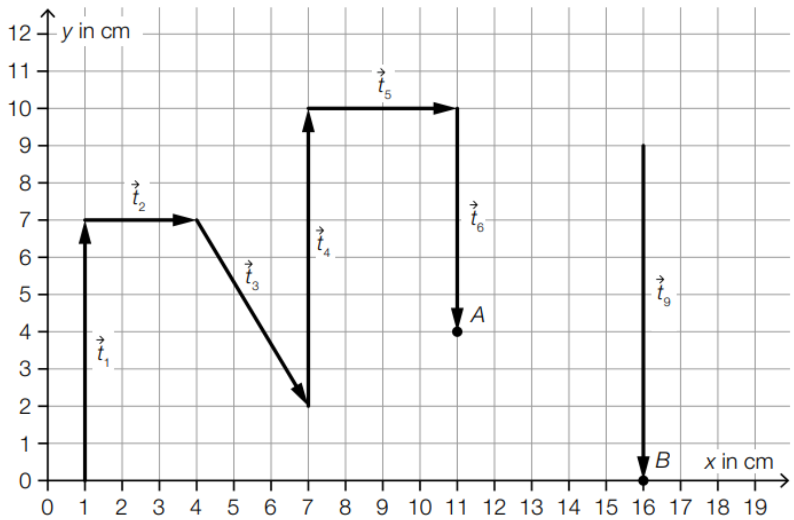
Heißer Draht ist ein Spiel, bei dem man eine Schlaufe einen Draht entlang führen muss, ohne diesen Draht zu berühren. Im Werkunterricht basteln Kinder ein solches Spiel. Dabei biegen die Kinder ihren Draht in verschiedene Formen (siehe nebenstehende Abbildung).



Bildquelle: https://www.winklerschulbedarf.com/at/i/einfache-rennstrecke-100517 [28.11.2020].

a) Timon hat seinen Draht in eine eckige Form gebogen.

Die Form dieses Drahtes wird durch Aneinanderreihen der Vektoren $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \dots, \vec{t}_9$ (in dieser Reihenfolge) beschrieben. Die Vektoren $\vec{t}_1$ bis $\vec{t}_6$ sowie $\vec{t}_9$ sind in der nachstehenden Abbildung bereits dargestellt.



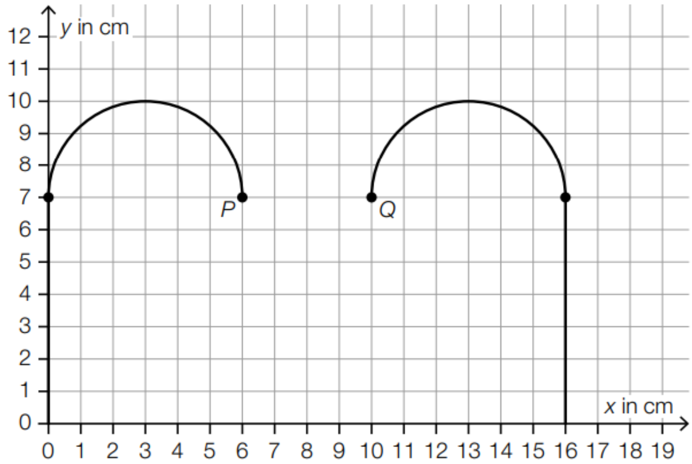
Es gilt: $\vec{t}_7 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{t}_8 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die Vektoren $\vec{t}_7$ und $\vec{t}_8$ so ein, dass die Lücke im Draht geschlossen wird. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Länge des Drahtstücks zwischen den Punkten A und B. *[0/1 P.]*

3) Geben Sie diejenigen Vektoren aus $\vec{t}_1$ bis $\vec{t}_6$ an, deren Skalarprodukt mit dem Vektor $\vec{t}_6$ gleich 0 ist. *[0/1 P.]*

b) Die Form von Sabines Draht setzt sich aus 4 geradlinigen Stücken und 2 halbkreisförmigen Stücken zusammen. In der nachstehenden Abbildung sind nur 2 der 4 geradlinigen Stücke dargestellt.



Vom Punkt P führt der Draht geradlinig zuerst zu einem Punkt S und dann weiter zum Punkt Q.

Es gilt: $\vec{s}_1 = \overrightarrow{PS}$, $\vec{s}_2 = \overrightarrow{SQ}$

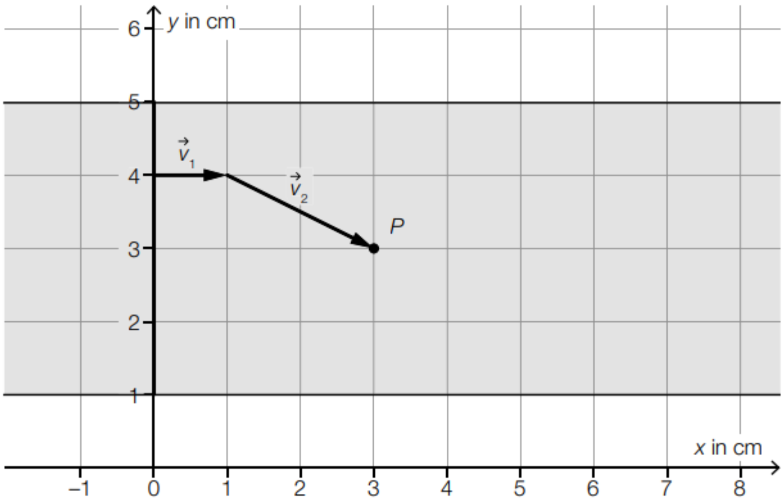
1) Kreuzen Sie diejenige Aussage an, die auf jeden Fall auf diese beiden Vektoren zutrifft.
[1 aus 5] *[0/1 P.]*

$\vec{s}_1 + \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐
$\lvert\vec{s}_1\rvert + \lvert\vec{s}_2\rvert < 4$	☐
$\vec{s}_1 + \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐
$\vec{s}_1 - \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐
$\lvert\vec{s}_1\rvert = \lvert\vec{s}_2\rvert = 1$	☐

Vektorrennen

Beim Spiel *Vektorrennen* zeichnen die Spieler/innen Pfeile auf einer Rennstrecke in einem Koordinatensystem ein.
Diese Pfeile stellen die Bewegung ihres Fahrzeugs dar.

a) In der nachstehenden Abbildung sind die ersten zwei Bewegungen des Fahrzeugs von Martin auf einer bestimmten Rennstrecke dargestellt.



Der Vektor $\vec{v}_2$ ist in der obigen Abbildung als Pfeil dargestellt.

1) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$ *[0/1 P.]*

2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Vektor $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Pfeil ausgehend vom Punkt P ein. *[0/1 P.]*

Die Länge der Strecke s ist die Summe der Längen der Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$.

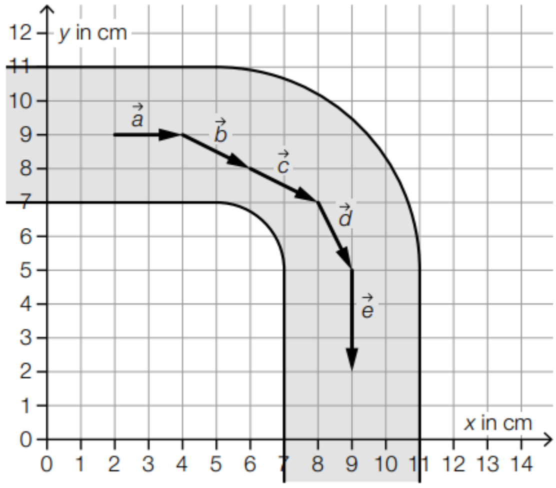
3) Berechnen Sie die Länge der Strecke s. *[0/1 P.]*

Für einen Winkel α gilt:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3}{|\vec{v}_2| \cdot |\vec{v}_3|}\right)$$

4) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung α mit dem Punkt P als Scheitel ein. *[0/1 P.]*

b) In der nachstehenden Abbildung sind die Bewegungen des Fahrzeugs von Emese auf einer anderen Rennstrecke dargestellt.



1) Kreuzen Sie die nicht zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$\vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐
$\lvert\vec{b}\rvert = \lvert\vec{d}\rvert$	☐
$\vec{a} \cdot \vec{e} = 0$	☐
$\vec{a} + \vec{e} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$	☐
$\arccos\left(\frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\lvert\vec{b}\rvert \cdot \lvert\vec{c}\rvert}\right) = 0°$	☐

Kompensation AHS

https://www.mathago.at/kompensationspruefung-loesungen/

Mai 2025, Prüfung 3: Staubsauger-Roboter

Ein Staubsauger-Roboter fährt über den Boden eines Zimmers.

a) Bei einer bestimmten Fahrt fährt der Staubsauger-Roboter in Richtung des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, dann bleibt er kurz stehen und dreht sich um 90°. Danach setzt er seine Fahrt in Richtung eines Vektors $\vec{b}$ fort.

1) Geben Sie den Vektor $\vec{b}$ an.

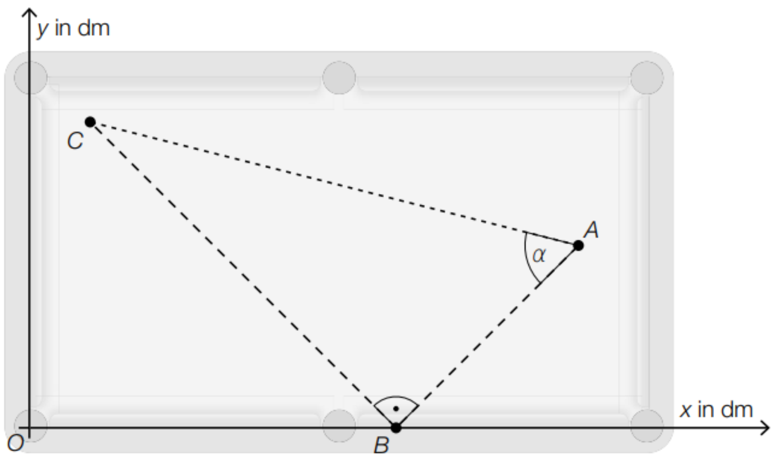
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$$

Oktober 2024, Prüfung 2: Poolbilliard

In der unten stehenden Abbildung ist ein Poolbillardtisch modellhaft in der Ansicht von oben dargestellt.

Beim Poolbillard müssen verschiedenfarbige Kugeln durch Anstoßen mit der weißen Kugel in den Löchern am Rand des Tisches versenkt werden.

a) Jasmin möchte eine farbige Kugel, die im Punkt C liegt, in das nächstgelegene Loch versenken. Dazu wird die weiße Kugel vom Punkt $A = (18|6)$ aus in Richtung des Punktes $B = (12|0)$ gespielt.



1) Ermitteln Sie den Vektor $\overrightarrow{AB}$.

2) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung die Größe z, für die gilt:

$z = \sin(90° - \alpha) \cdot \overline{AC}$