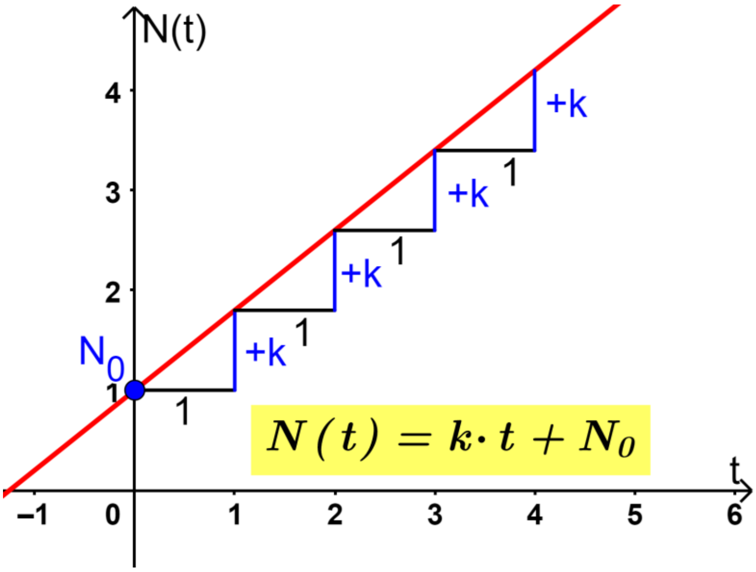
3.6 Lineare und Exponentielle Wachstumsprozesse

Maturaskript BHS – Teil A (15 Seiten)

Grundkompetenzen:

- **3.6** lineare Funktionen und Exponentialfunktionen strukturell vergleichen, die Angemessenheit einer Beschreibung mittels linearer Funktionen oder mittels Exponentialfunktionen im Kontext beurteilen



Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Prof. Tegischer

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM
2) Gib im Feld „**Volltextsuche**" die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. A_263) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**" und „**GeoGebra**" erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**" erstellt.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

Lineare und Exponentielle Wachstumsprozesse

In diesem Kapitel werden **mathematische Funktionen** (lineare und exponentielle Funktion) erstellt, um damit in der **Natur** bzw. im **Alltag** vorkommende **Wachstums- und Zerfallsprozesse** (z.B. Wachstum einer Bevölkerung, Zerfall eines radioaktiven Atoms, Abnahme des Alkoholspiegels im Blut) zu beschreiben.

Video 1/5

Für die Berechnungen werden folgende **Grundbegriffe** verwendet:

- $\boldsymbol{t}$... gibt den Zeitpunkt an (in Jahren, Stunden, Sekunden, etc. – steht in der Angabe)
- $\boldsymbol{N_0 = N(0)}$ ... Anfangswert (Anzahl bzw. Größe zum Zeitpunkt $t = 0$)
- $\boldsymbol{N(t)}$ ... Wert zum Zeitpunkt t

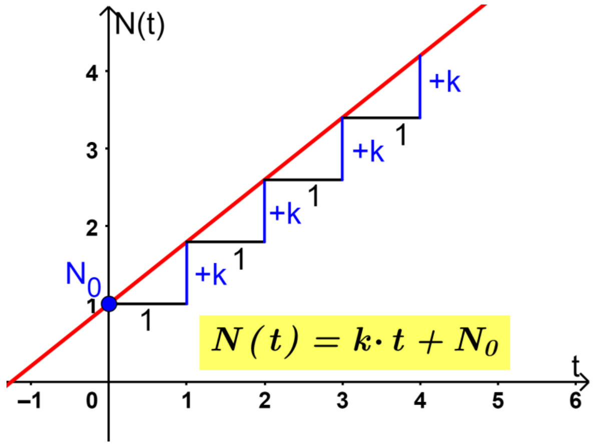
Video 2/5

1. Lineares Wachstum & Lineare Abnahme:

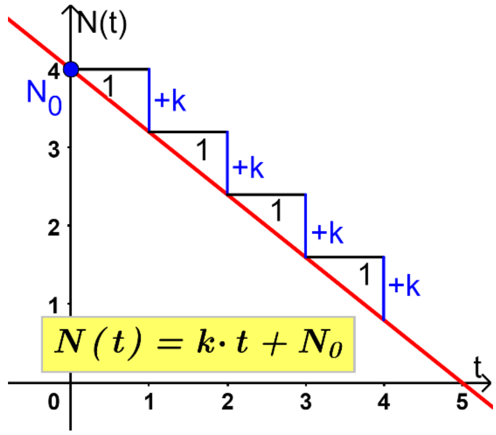
Eine Größe verändert sich **linear**, wenn sie in gleichen **Zeitabständen um denselben konstanten Wert k** wächst oder fällt. Die Funktionsgleichung entspricht der einer linearen Funktion $y = kx + d$:

$$N(t) = k \cdot t + N_0$$

$k > 0$: Lineares Wachstum



$k < 0$: Lineare Abnahme



Wird die Zeit t um einen Zeitschritt vergrößert, so **steigt** bzw. **fällt N(t)** gerade um den Wert **k**.

BERMERKUNG

Es gibt IMMER zwei Möglichkeiten, um Berechnungen mit einer Funktionsgleichung durchzuführen!

$h(t) = -0{,}5 \cdot t + 10$ beschreibt die Höhe einer Kerze, die mit zunehmenden Abbrennen immer kleiner wird. Zu Beginn ist die Kerze 10 cm hoch, da $h(0) = 10$ ist. Pro Minute wird die Kerze um 0,5 cm kleiner.

Möglichkeit 1: Argument („x-Wert“) gegeben -> zugehöriger Funktionswert gesucht (EINSETZEN!)

ARGUMENTE = Zeitpunkte (in diesem Beispiel)

- Wie hoch ist die Kerze nach 5 Minuten?

Argument $t = 5$ -> zugehöriger Funktionswert $h(5)$ gesucht

$$h(5) = -0{,}5 \cdot 5 + 10 = -2{,}5 + 10 = 7{,}5\ cm$$

Ist ein Argument gegeben, so musst du dieses Argument in die Funktionsgleichung einsetzen, um den zugehörigen Funktionswert zu erhalten 😊

Möglichkeit 2: Funktionswert gegeben -> zugehörige/s Argument/e gesucht, bei denen der Funktionswert eintritt (Wert statt $f(x), N(t)$, ... einsetzen)

FUNKTIONSWERTE = Höhe der Kerze

- Wann erreicht die Kerze eine Höhe von 3 cm?

Funktionswert $h(t) = 3$ -> Argument/Zeitpunkt gesucht!!!

$$h(t) = -0{,}5 \cdot t + 10$$
$$3 = -0{,}5 \cdot t + 10 \quad | -10$$
$$-7 = -0{,}5 \cdot t \quad | : (-0{,}5)$$
$$14 = t \rightarrow nach\ 14\ Minuten$$

Ist ein Funktionswert gegeben, so musst du diesen Wert statt der Funktion f(x), N(t), ... einsetzen und die entstehende Gleichung nach dem Argument auflösen. 😊

Bsp. 1) Moritz hat ein Geburtsgewicht von 3000 g. Nach 3 Wochen hat er bereits 3900 g.

a. Erstelle ein lineares Modell $N(t) = k \cdot t + N_0$, welches die Abhängigkeit des Gewichts N vom Alter nach t Wochen beschreibt.
b. Was bedeuten die Parameter k und N_0 in diesem Zusammenhang?
c. Moritz ist bei seiner Taufe 9 Wochen alt. Welches Gewicht hat er?
d. Wann erreicht Moritz ein Gewicht von 6,2 kg?
e. Stelle diesen Wachstumsprozess graphisch dar. Beschrifte die Achsen (inkl. Einheiten) und wähle eine passende Definitions- und Wertemenge.

Bsp. 2) Ein Schwimmbecken wird mit Wasser gefüllt. Am Anfang ist das Becken leer. Pro Minute laufen nun 20 l Wasser in das Becken. Das Schwimmbecken fasst insgesamt 54.000 l.

a. Erstelle ein lineares Modell $N(t) = k \cdot t + N_0$, wobei $N(t)$ das Wasservolumen in Litern nach t Minuten beschreibt.
b. Wie viel Wasser befindet sich nach einer halben Stunde im Becken?
c. Nach wie vielen Minuten ist das Schwimmbecken zu 60% voll?
d. Nach welcher Zeit ist das Becken vollständig mit Wasser gefüllt?
e. Stelle diesen Wachstumsprozess graphisch dar. Beschrifte die Achsen (inkl. Einheiten) und wähle eine passende Definitions- und Wertemenge.

Bsp. 3) Die Grundgebühr eines Stromanbieters beträgt 30,50 € monatlich. Dazu kommen 15,94 Cent pro verbrauchter Kilowattstunde (kWh).

a. Erstelle ein lineares Modell $N(t) = k \cdot t + N_0$, wobei N(t) die Gesamtkosten bei t verbrauchten Kilowattstunden bezeichnet.
b. Erstelle eine Wertetabelle der anfallenden Kosten für 20, 30, 40, 50 kWh!
c. Übertrage die Wertepaare der Tabelle in ein Koordinatensystem! Wähle geeignete Einheiten und zeichne die lineare Funktion!
d. Wie viele Kilowattstunden darf man verbrauchen, wenn man pro Monaten maximal 50€ zahlen möchte?

Bsp. 4) Bei einem großen Schwimmteich ist am Boden bei der Teichfolie ein Loch entstanden. Ursprünglich waren im Schwimmteich 100 000 Liter Wasser. Pro Minuten rinnen nun 50 Liter Wasser ab.

a. Erstelle ein lineares Modell $N(t) = k \cdot t + N_0$, wobei N(t) das Wasservolumen nach t Minuten angibt.
b. Handelt es sich um ein lineares Wachstums- oder Abnahmemodell? Begründe anhand der Steigung k.
c. Nach wie vielen Minuten bzw. Stunden sind nur mehr 15% vom ursprünglichen Wasservolumen im Badeteich?
d. Wie viele Liter Wasser sind nach 2 Stunden noch im Teich?
e. Wann ist der Teich komplett ausgeronnen?
f. Stelle diesen Wachstumsprozess graphisch dar. Wähle eine passende Skalierung der Achsen.

Eiffelturm * (A_287)

Der Eiffelturm ist ein Wahrzeichen der Stadt Paris.

b) Im Jahr 1950 besuchten rund 1 027 000 Personen den Eiffelturm, im Jahr 1980 waren es rund 3 594 000 Personen.

Für den Zeitraum von 1950 bis 1980 kann die Anzahl der Personen, die den Eiffelturm pro Jahr besuchten, näherungsweise durch eine lineare Funktion b beschrieben werden.

t … Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1950
$b(t)$ … Anzahl der Personen, die den Eiffelturm pro Jahr besuchten, zur Zeit t

1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion b. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1950.

Pelletsheizung * (A_068)

Pellets sind Heizmaterial aus gepressten Sägespänen.

a) Die Gesamtkosten für eine Pelletslieferung setzen sich aus einer fixen Grundgebühr und den Kosten für die Liefermenge zusammen. Dabei ist für jede Tonne Pellets der gleiche Preis zu bezahlen.

Ein Pelletshändler bietet auf seiner Website einen Online-Rechner an. Eine Kundin verwendet diesen Online-Rechner und notiert die Gesamtkosten für drei verschiedene Liefermengen:

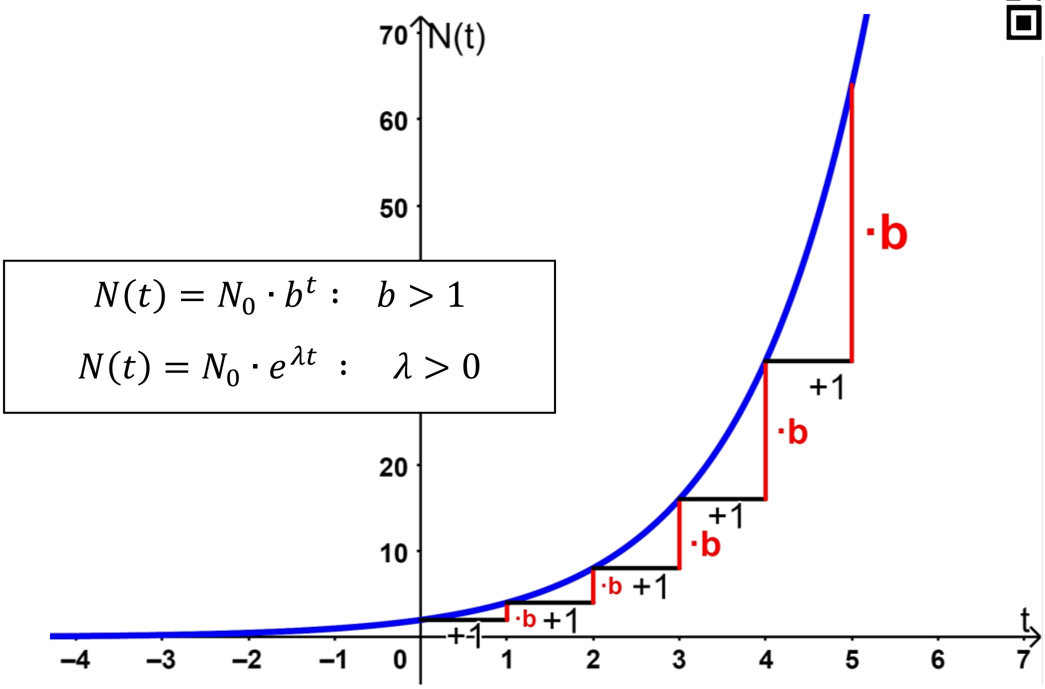
Liefermenge in Tonnen	Gesamtkosten in Euro
2	500
4	960
5,5	1 260

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Online-Rechner die Gesamtkosten wie oben beschrieben berechnet.

2. Exponentielles Wachstum

Video 3/5

Eine Größe wächst exponentiell, wenn sie in gleichen Zeitabständen **um denselben, konstanten Faktor $b > 1$** wächst.



*<u>UNTERSCHIED</u> zu linearem Wachstum: Bei jedem Zeitschritt wird die Größe jeweils mit diesem **Faktor b multipliziert**! Beim linearen Wachstum wurde bei jedem Zeitschritt der **Wert k** zur Größe N(t) **addiert / subtrahiert**.*

Wie bei den Exponentialfunktionen gibt es auch hier zwei äquivalente Formeln:

$N(t) = N_0 \cdot b^t$	$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$
$\boldsymbol{b > 1}$ ... ist der **Wachstumsfaktor** und gibt an, mit welchem Faktor sich die Population pro Zeiteinheit verändert. Da die Population wächst, muss $b > 1$ sein. <u>Beispiel</u>: $b = 1{,}26$ *-> Die Population wächst um den Faktor 1,26 -> Die Population vergrößert sich pro Zeiteinheit um 26%.*	$\boldsymbol{\lambda > 0 \ldots Wachstumskonstante}$ $b = e^{\lambda}$ $\lambda = \ln b$

Verdoppelungszeit

Die **Verdoppelungszeit** τ ist die Zeit, in der sich eine **Größe verdoppelt** hat. Insbesondere gilt:

$$\boldsymbol{N(\tau) = 2 \cdot N_0}$$

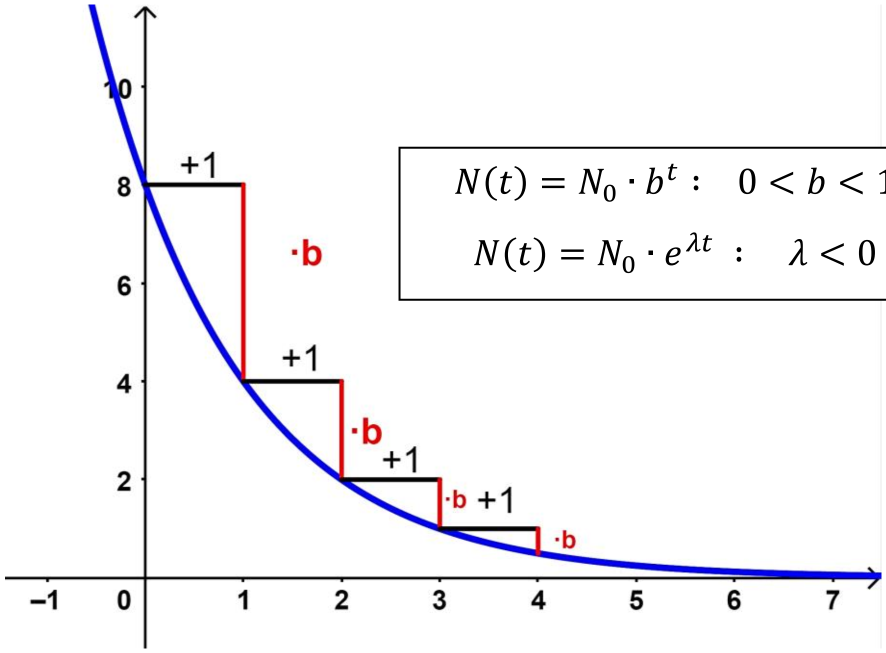
Die Verdoppelungszeit wird berechnet, indem man für $N(t) = \boldsymbol{2 \cdot N_0}$ einsetzt:

$N(t) = N_0 \cdot b^t$ $\boldsymbol{2 \cdot N_0} = N_0 \cdot b^t \quad \vert : N_0$ $2 = b^t \quad \vert\, ln$ $\ln 2 = \ln b^t$ $\ln 2 = t \cdot \ln b \quad \vert : \ln b$ $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{\ln(2)}{\ln(b)}$	$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$ $\boldsymbol{2 \cdot N_0} = N_0 \cdot e^{\lambda t} \quad \vert : N_0$ $2 = e^{\lambda t} \quad \vert\, ln$ $\ln 2 = \ln e^{\lambda t}$ $\ln 2 = \lambda t \cdot \ln e \quad \vert \ln e = 1$ $\ln 2 = \lambda t \quad \vert : \lambda$ $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$

3. Exponentielle Abnahme / Exponentieller Zerfall

Video 4/5

Man spricht von einer exponentieller Abnahme bzw. von einem exponentiellen Zerfall, wenn sich eine Größe in **gleichen Zeitabständen** immer **um den gleichen Faktor verkleinert**.



$$N(t) = N_0 \cdot b^t : \quad 0 < b < 1$$
$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t} : \quad \lambda < 0$$

$N(t) = N_0 \cdot b^t$	$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$
b... ist der **Abnahmefaktor** und gibt an, mit welchem Faktor sich die Population pro Zeiteinheit verringert. Da die Population abnimmt, muss $\mathbf{0 < b < 1}$ sein. Beispiel: b= 0,64 -> *Die Population verringert sich pro Zeiteinheit um den Faktor 0,64 -> Die Population verringert sich pro Zeiteinheit um* $1 - 0{,}64 = 0{,}36 = 36\ \%$	$\boldsymbol{\lambda < 0 \ldots Zerfallskonstante}$ $b = e^{\lambda}$ $\lambda = \ln b$

Halbwertszeit

Die **Halbwertszeit** τ ist die Zeit, in der sich eine **Größe halbiert**. Insbesondere gilt:

$$\boldsymbol{N(\tau) = \frac{N_0}{2}}$$

Die Halbwertszeit wird berechnet, indem man für $N(t) = \frac{N_0}{2}$ einsetzt:

$$N(t) = N_0 \cdot b^t$$
$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot b^t \quad | : N_0$$
$$\frac{1}{2} = b^t \quad | \ ln$$
$$\ln 0{,}5 = \ln b^t$$
$$\ln 0{,}5 = t \cdot \ln b \quad | : \ln b$$
$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(b)}$$

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$$
$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{\lambda t} \quad | : N_0$$
$$0{,}5 = e^{\lambda t} \quad | \ ln$$
$$\ln 0{,}5 = \ln e^{\lambda t}$$
$$\ln 0{,}5 = \lambda t \cdot \ln e \quad | \ln e = 1$$
$$\ln 0{,}5 = \lambda t \quad | : \lambda$$
$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\ln(0{,}5)}{\lambda}$$

Bemerkung: Die Halbwertszeit hängt nicht vom Anfangswert N_0 ab!!! (kürzt sich weg!)

Bemerkung:

- Möchtest du z.B. berechnen, wann nur mehr 15% eines Stoffes vorhanden sind, so musst du ähnlich zur Berechnung der Halbwertszeit **für $\boldsymbol{N(t) = 0,15 \cdot N_0}$** einsetzen:

$$N(t) = N_0 \cdot b^t$$
$$0{,}15 \cdot N_0 = N_0 \cdot b^t \quad | \, N_0$$
$$0{,}15 = b^t \quad | \, ln$$
$$ln\, 0{,}15 = ln\, b^t$$
$$ln\, 0{,}15 = t \cdot ln\, b \quad | : ln\, b$$

$$\boldsymbol{t} = \frac{ln\,(0{,}15)}{ln\,(b)}$$

- Allgemein: Sollen nur mehr p % eines Stoffes vorhanden sein, so berechnest du diese Zeit mit:

$$\boldsymbol{t} = \frac{ln\left(\frac{p}{100}\right)}{ln\,(b)}$$

Bsp. 5) Ein Kapital auf einem Sparbuch wächst jährlich um 6.5 % pro Jahr.

a. Bestimme die Funktionsgleichung, wenn zu Beginn € 100 auf dem Sparbuch liegen.
b. Ermittle die Verdoppelungszeit.
c. Nach wie vielen Jahren liegen auf dem Sparbuch zum ersten Mal mindestens 1000 €?

Bsp. 6) Die Größe einer Bakterienpopulation nach t Stunden kann mithilfe der Funktion $N(t) = N_0 \cdot 1{,}14^t$ angegeben werden.

a. Bestimme, um wie viel Prozent sich die Population pro Stunde vergrößert.
b. Berechne die Verdoppelungszeit.
c. Um wie viel Prozent hat sich die Bakterienpopulation nach fünf Stunden vergrößert?
d. Sei $N_0 = 1000$. Nach welcher Zeit sind 1 000 000 Bakterien vorhanden?

Bsp. 7) Die Verdoppelungszeit eines exponentiellen Wachstumsprozesses der Form $N(t) = N_0 \cdot b^t$ beträgt 17 Tage (t gibt die Tage an).

a. Berechne den Wachstumsfaktor b.
b. Bestimme die Zeit, wie lange es dauert, bis das 8-fache des Anfangswertes vorhanden ist.

Bsp. 8) Von einer bestimmten Menge eines radioaktiven Elements zerfallen stündlich 4 %.

a. Stelle das Zerfallsgesetz in der Form $N(t) = N_0 \cdot a^t$ auf.
b. Bestimme die Halbwertszeit.
c. Bestimme zusätzlich noch das Zerfallsgesetz in der Form $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$.
d. Nach wie vielen Stunden ist nur noch 1 % der Anfangsmenge vorhanden?
e. Um wie viel Prozent verringert sich N_0 in den ersten sechs Stunden?

Bsp. 9) Ein Patient erhält 100 mg eines Wirkstoffs. Nach vier Stunden sind noch 42,5 mg im Körper vorhanden. Der Wirkstoff wird exponentiell vom Körper abgebaut.

a. Gib das Zerfallsgesetz an und stelle es für die ersten zehn Stunden nach der Einnahme graphisch dar.
b. Ermittle, wie viel mg des Wirkstoffes 13 Stunden nach der Einnahme noch vorhanden sind?
c. Wie lang dauert es, bis 97,5 % des Wirkstoffes vom Körper abgebaut werden?
d. Wie lange dauert es, bis die Hälfte des Wirkstoffes vom Körper abgebaut wird?

Bsp. 10) Die Tierpopulation der Polarwölfe hat sich in einem Resort in vier Jahren exponentiell von 190 auf 310 Tiere vergrößert.

a. Stelle das exponentielle Wachstumsgesetz auf.
b. Gib an, um wie viel % die Population jährlich anwächst.
c. Ermittle die Verdoppelungszeit.
d. Wann hat sich die Tierpopulation vom Ausgangswert (190 Tiere) verachtfacht?
e. Wie lange dauert es, bis 710 Polarwölfe im Tierresort leben?

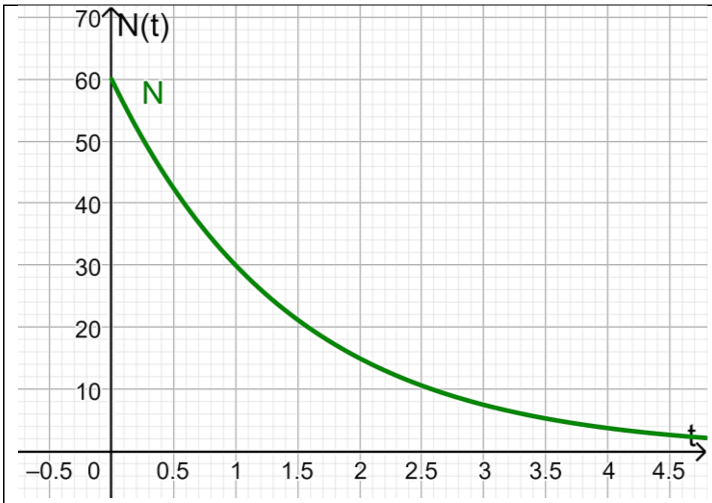
Bsp. 11) Von einem Stoff ist 12 Jahre nach Beginn der Messungen nur noch $\frac{1}{8}$ der Anfangsmenge nachweisbar. Gib die Halbwertszeit an.

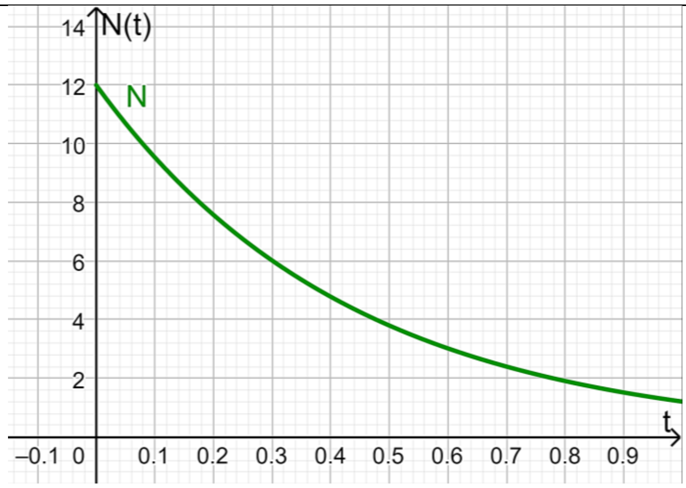
Bsp. 12) Ein Atom hat eine Halbwertszeit von 1250 Jahren. Ermittle, nach welcher Zeit 25% des Atoms zerfallen sind.

Bsp. 13) Der Holzbestand eines Waldes wurde 2010 auf 120 000 Kubikmeter geschätzt. Elf Jahre später ergab die Schätzung nur mehr 85 000 Kubikmeter. Es wird eine exponentielle Abnahme angenommen.

a. Stelle ein Wachstumsgesetz für den Holzbestand h mit $h(t) = h_0 \cdot b^t$ und $h(t) = h_0 \cdot e^{\lambda t}$ in Abhängigkeit von den seit 2010 vergangenen Jahren auf. (Bemerkung: Wählte $t = 0$ für das Jahr 2010)
b. Um wie viel Prozent sinkt der Holzbestand jährlich?
c. In welchem Jahr ist nur mehr die Hälfte des ursprünglichen Holzbestandes dar?
d. Ermittle die absolute Abnahme vom Jahr 2012 auf 2022.

Bsp. 14) Gegeben ist der Graph eines Abnahmeprozesses. Lies aus dem Graphen die Halbwertszeit ab. Die Variable t ist in Stunden gegeben.





Bsp. 15) Es ist ein radioaktives Element mit seiner Halbwertszeit gegeben. Stelle das Zerfallsgesetz für dieses Element in der Form $N(t) = N_0 \cdot b^t$ und $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$ auf.

a. Element 1: 8 Tage	b. Element 2: 432 Jahre

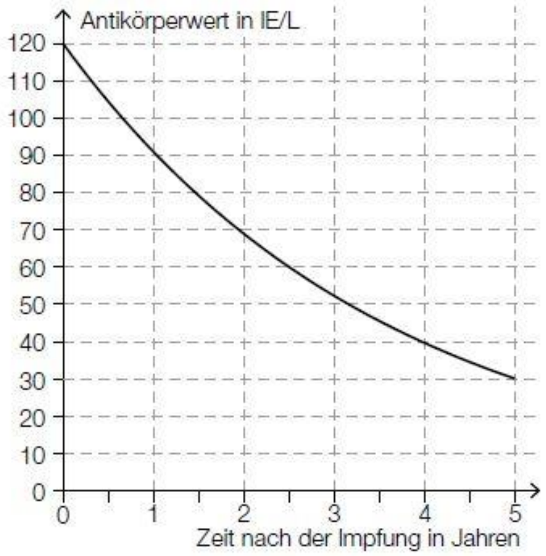
Bsp. 16) In einer Probe waren zu Beginn 1000 Bakterien enthalten. Nach drei Minuten waren es bereits 3375 Bakterien.

a) Wie lautet die Gleichung der Exponentialfunktion $B(t)$, wenn $B(t)$ die Anzahl der Bakterien nach t Minuten angibt.
b) Wie viele Bakterien sind es nach diesen Modell nach 10 Minuten?
c) Wie lang dauert es, bis 1 000 000 Bakterien vorhanden sind?

Impfen und Auffrischen * (A_269)

Mithilfe der Konzentration von Antikörpern im Blut wird bestimmt, ob nach einer Impfung ausreichender Impfschutz besteht. Diese Konzentration wird oft als Antikörperwert bezeichnet und in „Internationalen Einheiten pro Liter" (IE/L) angegeben.

b) Die nachstehende Abbildung zeigt näherungsweise den zeitlichen Verlauf des Antikörperwerts von Bernhard nach einer Impfung.



1) Lesen Sie die Halbwertszeit $T_{1/2}$ ab.

$T_{1/2}$ = ______________ Jahre

Bei Sandra beträgt der Antikörperwert unmittelbar nach der Impfung 80 IE/L. Ihr Antikörperwert sinkt exponentiell mit derselben Halbwertszeit wie jener von Bernhard.

2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den zeitlichen Verlauf von Sandras Antikörperwert im Zeitintervall [0; 5] ein.

Leuchtdioden * (A_305)

Leuchtdioden (LEDs) werden häufig als Beleuchtungsmittel verwendet.

c) Ein Maß für die Helligkeit einer Lichtquelle ist der sogenannte *Lichtstrom*. Dieser wird in der Einheit Lumen angegeben.
Man geht davon aus, dass der maximale Lichtstrom von LEDs durch technische Weiterentwicklung exponentiell ansteigen wird.
Dabei gilt: Alle 10 Jahre steigt der maximale Lichtstrom von LEDs auf das 20-Fache.

Diese Entwicklung kann durch eine Exponentialfunktion L modelliert werden.

$L(t) = L_0 \cdot a^t$

t … Zeit in Jahren
$L(t)$ … maximaler Lichtstrom zur Zeit t in Lumen
L_0 ... maximaler Lichtstrom zur Zeit $t = 0$ in Lumen
a ... positiver Parameter

1) Berechnen Sie den Parameter a.

2) Interpretieren Sie den Wert des Parameters a im gegebenen Sachzusammenhang.

Sonnenblumen * (A_329)

b) Die Höhe einer anderen Sonnenblume lässt sich in Abhängigkeit von der Zeit t in einem bestimmten Zeitintervall näherungsweise durch die Funktion h beschreiben.

$h(t) = 6{,}2 \cdot a^t$

t ... Zeit ab dem Beobachtungsbeginn in Tagen
$h(t)$ ... Höhe der Sonnenblume zur Zeit t in cm

Zur Zeit $t = 17$ beträgt die Höhe der Sonnenblume 38,6 cm.

1) Berechnen Sie a.

2) Berechnen Sie die Anzahl der Tage, in denen sich die Höhe dieser Sonnenblume jeweils vervierfacht.

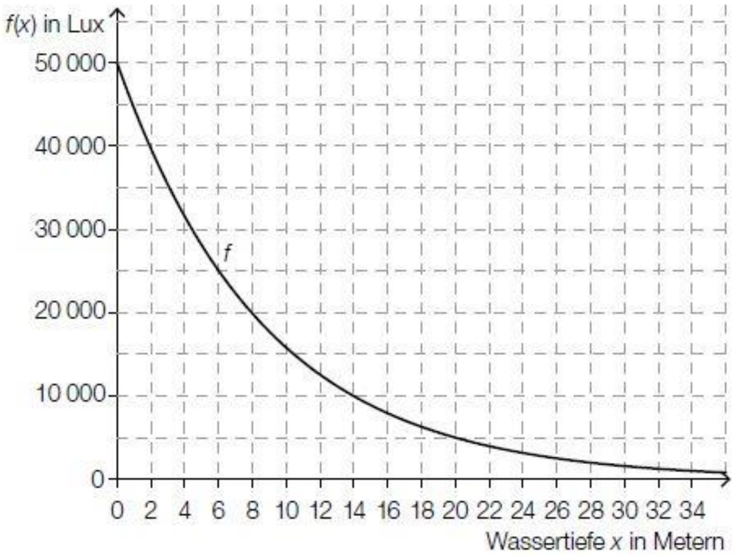
Vernetzte Welt * (A_245)

b) Nach einer Faustregel der Technologiebranche verdoppelt sich die Geschwindigkeit von Computerprozessoren alle 18 Monate. In einem Buch wird behauptet, dass demnach die Computerprozessoren im Jahr 2025 etwa 64-mal so schnell sein werden wie im Jahr 2013.*

– Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Behauptung richtig ist.

Unter Wasser * (A_178)

b) Die Abnahme der Beleuchtungsstärke erfolgt unter Wasser exponentiell und kann näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden. Der Graph von f ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Lesen Sie aus der obigen Abbildung ab, in welcher Tiefe die Beleuchtungsstärke nur mehr 10 % ihres Anfangswerts beträgt.
– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion f.

E-Reader * (B_224)

Ein Unternehmen bringt einen neuen E-Reader auf den Markt. Die nachstehende Tabelle beschreibt die Entwicklung der Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader in einer bestimmten Region.

Zeit in Wochen	Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader
1	179
2	364
3	674
4	981
5	1310
6	1700
7	2055
8	2280
9	2470
10	2500
11	2540
12	2545

b) Betrachtet man nur die ersten 3 Zahlenpaare, so zeigt sich ein annähernd exponentieller Verlauf. Dieser kann durch

$$V_1(t) = 93{,}7 \cdot 1{,}94^t$$

oder durch

$$V_2(t) = 93{,}7 \cdot e^{0{,}662688 \cdot t}$$

dargestellt werden.

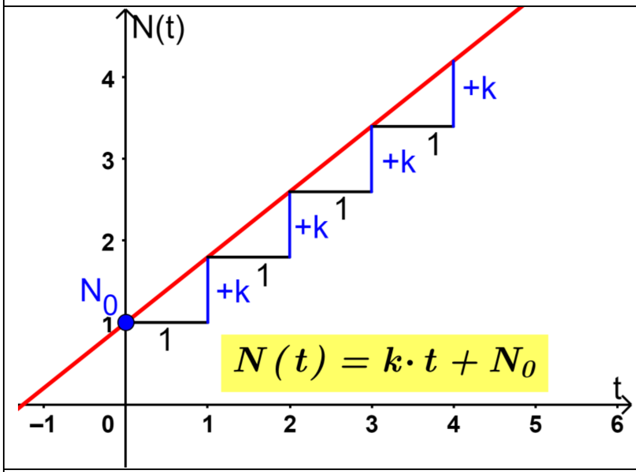
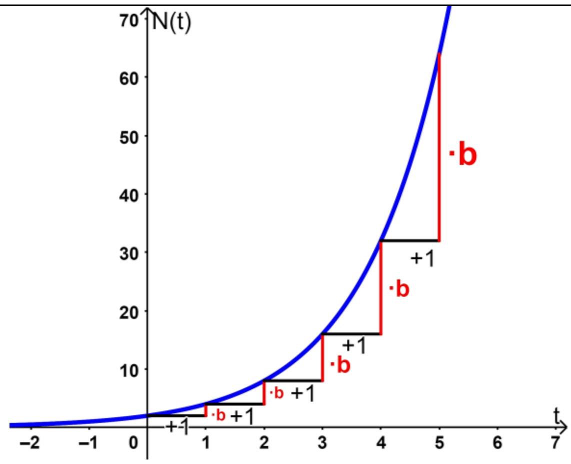
t ... Zeit in Wochen
$V_1(t)$, $V_2(t)$ ... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften E-Reader

- Erklären Sie, warum beide Funktionen V_1 und V_2 annähernd denselben Wachstumsverlauf beschreiben.
- Berechnen Sie die Verdoppelungszeit in diesem exponentiellen Wachstumsmodell.

4. Unterschied: Lineares und Exponentielles Wachstum

Video 5/5

Es ist wichtig, die Unterschiede zwischen dem linearen und dem exponentiellen Wachstum zu kennen. Aus diesem Grund vergleichen wir hier die beiden Wachstumsprozesse:

<table>
<tr><th>Lineares Wachstum</th><th>Exponentielles Wachstum</th></tr>
<tr><td>Addition um konstante Zahl</td><td>Multiplikation mit einem konstanten Faktor</td></tr>
<tr><td>Pro Zeitschritt: Immer $+k$</td><td>Pro Zeitschritt: Immer $\cdot\, b$</td></tr>
<tr><td>Graph ist eine Gerade</td><td>Graph ist eine exponentielle Kurve</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Verändert man das Argument um 1, dann verändert sich der Funktionswert um k:
$N(t+1) = N(t) + k$</td><td>Verändert man das Argument um 1, dann verändert sich der Funktionswert um den Faktor b:
$N(t+1) = N(t) \cdot b$</td></tr>
<tr><td>Verändert man das Argument um h, dann verändert sich der Funktionswert um $h \cdot k$:
$N(t+h) = N(t) + h \cdot k$</td><td>Verändert man das Argument um h, dann verändert sich der Funktionswert um den Faktor b^h:
$N(t+h) = N(t) \cdot b^h$</td></tr>
<tr><td>Die mittlere Änderung $\frac{N(t+h)-N(t)}{h}$ ist stets konstant und liefert immer die Steigung k.</td><td>$b = \sqrt[h]{\frac{N(t+h)}{N(t)}}$</td></tr>
</table>

Bsp. 17) Ordne den Situationen das **passende Wachstum** zu und bestimme jeweils k bzw. b:

1. Der Umfang eines Baumes nimmt jährlich um 7% zu:
2. Der Meeresspiegel steigt jährlich um 1,05 cm:
3. Die Bevölkerung wächst jährlich um den Faktor 1,02:
4. Der Stamm eines Baumes wird pro Jahr um 2 cm dicker:
5. Ein Kapital wird jährlich mit 3 % p.a. verzinst.
6. Der Umsatz eines Betriebes sinkt jährlich um 23 %.

Bsp. 18) Der Fahrrad-Bestand ist in Österreich von 2 991 284 Fahrrädern im Jahr 1990 auf 4 359 944 Fahrrädern im Jahr 2009 gestiegen. Wähle $t = 0$ für das Jahr 1990.

a) Die Veränderung des Fahrrad-Bestandes soll durch eine lineare Funktion modelliert werden.

− Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate des Fahrrad-Bestandes pro Jahr für den Zeitraum von 1990 bis 2009.

− Berechnen Sie, welcher PKW-Bestand im Jahr 2022 gemäß diesem Modell zu er warten wäre.

b) Die Veränderung des Fahrrad-Bestandes soll durch eine Exponentialfunktion modelliert werden.

− Stellen Sie eine Exponentialfunktion in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren auf, die diesen Sachverhalt beschreibt.

− Berechnen Sie, welcher Fahrrad-Bestand im Jahr 2022 gemäß diesem Modell zu erwarten wäre.

Bsp. 19) In der Tabelle sieht man die Entwicklung der Einwohnerzahl einer Stadt. Beschreibe den Wachstumsvorgang durch eine Funktion ($t = 0$ für das Jahr 2012) und begründe, warum du dich für dieses Modell entscheidest.

Jahr	**2012**	**2014**	**2016**	**2018**	**2020**
Einwohnerzahl	120000	173000	248500	358000	516000

Bsp. 20) In der Tabelle sieht man die Entwicklung der Einwohnerzahl einer Stadt. Beschreibe den Wachstumsvorgang durch eine Funktion ($t = 0$ für das Jahr 2012) und begründe, warum du dich für dieses Modell entscheidest.

Jahr	**2012**	**2014**	**2016**	**2018**	**2020**
Einwohnerzahl	1 000 000	1 210 000	1 420 000	1 630 000	1 840 000

Bsp. 21) In der Tabelle sieht man die Entwicklung der Einwohnerzahl einer Stadt. Beschreibe den Wachstumsvorgang durch eine (1) lineare Funktion bzw. (2) Exponentialfunktion, indem die Daten von 2009 und 2013 als Ausgangspunkte verwendet werden. Vergleiche die beiden Funktionen mit den Daten aus den Jahren 2015 und 2020. Begründe, welches Modell passender wäre. Wähle $t = 0$ für das Jahr 2009.

Jahr	**2009**	**2013**	**2015**	**2020**
Einwohnerzahl	2 340	30 495	110 000	2 800 000

Bsp. 22) Österreichs CO_2-Emissionen betrugen 79 Millionen Tonnen im Jahr 1990. Im Jahr 2006 betrugen sie 91 Millionen Tonnen. Wähle $t = 0$ für das Jahr 1990.

a. Beschreibe die Entwicklung der CO_2-Emissionen durch ein lineares und exponentielles Modell.
b. Stelle beide Modelle für den Zeitraum 2006-2040 grafisch dar und interpretiere die Eigenschaften der einzelnen Modelle.

Bsp. 23) In einer genügend großen Nährlösung befinden sich anfangs 50 Bakterien. Sie teilen sich so schnell, dass sich ihre Anzahl alle 10 Minuten verdoppelt. Ab einer Anzahl von 10 000 000 Bakterien verlangsamt sich die Anzahl der Teilungen, sodass pro Minuten 50 000 Bakterien neu gebildet werden.

a. Erstelle ein passendes mathematisches Modell für die zeitliche Entwicklung der Bakterienanzahl und verwende es, um festzustellen, wann die kritische Zahl von 10 000 000 Bakterien überschritten wird.
b. Beschreibe die Entwicklung der Bakterienanzahl nach diesem Zeitpunkt durch ein neues mathematisches Modell. Ermittle den Zeitpunkt, wann die Zahl von 12 000 000 Bakterien überschritten werden.

Rohmilchproduktion * (A_252)

c) In Österreich produzierte Rohmilch enthält unmittelbar nach dem Melken durchschnittlich 20000 Keime pro Milliliter (ml). Ein Modell geht davon aus, dass sich die Anzahl der Keime alle 25 Minuten verdoppelt.

– Argumentieren Sie, dass die unten angegebene Funktion N nicht diesem Modell entspricht.

$N(t) = 20000 + 800 \cdot t$

t … Zeit nach dem Melken in min
$N(t)$ … Anzahl der Keime pro ml zur Zeit t

Grosstrappen (B_131)

Ein LIFE-Projekt in Ostösterreich widmet sich dem Schutz der Großtrappen, einer gefährdeten Vogelart. Zu Beginn des Beobachtungszeitraums wurden in Niederösterreich und im Burgenland 140 Tiere gezählt. 5 Jahre später waren es bereits 244.

a) – Argumentieren Sie, warum ein lineares bzw. ein unbegrenztes exponentielles Wachstumsmodell die Entwicklung der Tierpopulation zwar beschreibt, dies aber langfristig gesehen nicht der Realität entspricht.

Bevoelkerungsentwicklung * (A_218)

In manchen Orten Österreichs, z. B. in der steirischen Gemeinde Eisenerz, nimmt die Bevölkerungszahl ab. Zur mathematischen Beschreibung dieser Entwicklung können verschiedene Modelle verwendet werden.

c) In der nachstehenden Tabelle sind die Bevölkerungszahlen von Eisenerz für den Beginn des Jahres 1981 und den Beginn des Jahres 2014 angegeben:

Beginn des Jahres ...	1981	2014
Bevölkerungszahl	10068	4524

Die Entwicklung der Bevölkerungszahl soll näherungsweise durch eine Exponentialfunktion N_3 beschrieben werden.

– Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Exponentialfunktion N_3, die die Bevölkerungszahl in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren seit Beginn des Jahres 1981 beschreibt.
– Ermitteln Sie mithilfe der Funktion N_3, welche Bevölkerungszahl für den Beginn des Jahres 2030 zu erwarten ist.

Obst * (A_320)

c) Die Obstanbaufläche in Österreich ist in den letzten Jahrzehnten zurückgegangen. Im Jahr 1960 betrug die Obstanbaufläche rund 28000 Hektar (ha). Im Jahr 2005 betrug die Obstanbaufläche rund 15000 ha.
Die Entwicklung der Obstanbaufläche lässt sich für diesen Zeitraum näherungsweise durch die Exponentialfunktion A beschreiben.

$A(t) = A_0 \cdot e^{-k \cdot t}$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1960
$A(t)$ ... Obstanbaufläche zur Zeit t in ha
A_0, k ... Parameter

1) Ermitteln Sie die Parameter A_0 und k.
2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$1 - \frac{15000}{28000} \approx 0{,}46$

Baugrundstuecke * (B_090)

Die Preise von Baugrundstücken sind in den letzten Jahren erheblich gestiegen.

a) Herr Pfeifer hat ein Grundstück um € 228.000 gekauft. Nach der Umwidmung in ein Baugrundstück kann er es 4 Jahre später um € 753.000 verkaufen.

– Ermitteln Sie den mittleren jährlichen Zinssatz des eingesetzten Kapitals ohne Berücksichtigung von Spesen, Gebühren und Steuern.