Die Binomialverteilung

1. Der Binomialkoeffizient:

Definition: Aus einer Menge bestehend aus n Elementen werden k Elemente (ohne Wiederholung/Zurücklegen) ausgewählt. Die Anzahl der Möglichkeiten, wie die k Elemente ohne Beachtung der Reihenfolge ausgewählt werden können, berechnet man mit dem **Binomialkoeffizienten**:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

- **Sprechweise**: n über k
- Der Binomialkoeffizient ist kein Vektor, sondern eine reelle Zahl (-> Rechnung)
- Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus n Elementen k Elemente auszuwählen, wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt.

Beispiel 1
Im Zeichenunterricht sollen die Kinder aus ihrem Malkasten (10 Farben) vier verschiedene Farben für ihre nächste Zeichnung aussuchen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, vier verschiedene Farben aus 10 möglichen zu wählen?

- **ohne Wiederholung**: die Farben müssen verschieden sein und dürfen nicht doppelt gewählt.
- **ohne Reihenfolge**: es spielt keine Rolle, welche die erste Farbe der Kinder ist, an die sie denken. Sie sollen gesamt vier Farben auswählen.

➔ aufgrund dessen: Lösen mit dem Binomialkoeffizienten. Aus 10 möglichen Farben sollen vier gewählt werden:

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{(10-4)! \cdot 4!} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5040}{24} = 210 \; Möglichkeiten$$

Rechenregeln für den Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{n} = 1 \;\rightarrow\; \binom{10}{10} = 1$$

$$\binom{n}{1} = 1 \;\rightarrow\; \binom{8}{1} = 8$$

$$\binom{n}{n-1} = n \;\rightarrow\; \binom{7}{7-1} = 7$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \;\rightarrow\; \binom{10}{3} = \binom{10}{7}$$

Bsp. 1) Berechne den Binomialkoeffizienten.

a. $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$	b. $\binom{7}{2} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$	c. $\binom{8}{8} = 1$
d. $\binom{14}{9} = \frac{14!}{5! \cdot 9!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$ $= 2002$ M.	e. $\binom{14}{10} = \frac{14!}{4! \cdot 10!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4 \cdot 3 \cdot 2}$ $= 1001$ M	f. $\binom{23}{20} = \frac{23!}{3! \cdot 20!} = \frac{23 \cdot 22 \cdot 21}{3 \cdot 2} =$ $= 1771$

Bsp. 2) Für eine Veranstaltung haben sich 12 Personen für einen Posten im Organisationsteam gemeldet.

a. Unter diesen Personen soll ein fünfköpfiges Team gewählt werden, welches den Ticket-Verkauf organisiert. Auf wie vielen unterschiedlichen Möglichkeiten kann das Team bestimmt werden?

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{7! \cdot 5!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \underline{\underline{792\,M}}$$

b. Aus den verbleibenden sieben Personen sollen sich drei für das Sicherheits-Team melden, die die Veranstaltung sicherheitstechnisch absichern und abwickeln. Wie viele Möglichkeiten ergeben sich für die Bildung dieses Teams?

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = \underline{\underline{35\,M.}}$$

Bsp. 3) Ein Eishockeytrainer besitzt einen Spielerkader von 13 fitten Spielern.

a. Für ein Hobby-Spiel möchte er sechs Spieler zufällig auswählen. Wie viele Möglichkeiten hat der Trainer, die Spieler aus der Startelf zu bestimmen?

$$\binom{13}{6} = \frac{13!}{7! \cdot 6!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \underline{\underline{1716\,M.}}$$

b. Das Spiel endet nach 60 Minuten inkl. Overtime 8:8 und wird mit dem Penalty-Schießen entschieden. Drei Penalty-Schützen treten an. In jeder Mannschaft sind sechs Spieler. Wie viele Optionen hat der Trainer, die drei Schützen zu bestimmen?

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \, 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = \underline{\underline{20\,M.}}$$

Bsp. 4) In einem Trainingscamp für den olympischen Zweier-Bob-Bewerb nehmen acht potenzielle Kandidaten teil. Auf wie viele unterschiedliche Arten kann das Bob-Team zusammengestellt werden?

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{6! \, 2!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = \underline{\underline{28\,M.}}$$

Bsp. 5) In einer Hip-Hop Tanzgruppe nehmen 16 begeisterte Tänzerinnen und Tänzer teil. Für den nächsten Auftritt werden k Personen $(k \leq n)$ ausgewählt.

Berechne (falls möglich) und interpretiere die Binomialkoeffizienten im gegebenen Kontext:

a. $\binom{16}{10} = \frac{16!}{6! \cdot 10!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \underline{8008}$ ↳ Es gibt 8008 Möglichkeiten, aus 16 Tänzerinnen 10 für den nächsten Tanz auszuwählen	b. $\binom{16}{4} = \frac{16!}{12! \cdot 4!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{4 \cdot 3 \cdot 2} =$ $= \underline{\underline{1820\,M.}}$ ← Int. analog: aus 16 → 4 auswählen

Bsp. 6) Bei einer Frauen-Handballmannschaft stehen dem Trainer 14 aktive Spielerinnen für 6 Positionen zur Verfügung. Interpretiere den Ausdruck $\binom{14}{6}$ im gegebenen Kontext.

$\binom{14}{6}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, aus 14 Spielerinnen 6 für die Startformation auszuwählen.

2. Bernoulli-Experiment und Binomialverteilung

Man spricht bei einem Zufallsversuch von einem **Bernoulli-Experiment**, wenn folgende Bedingungen gelten:

- Es dürfen **nur zwei Ereignisse** auftreten – meist: Erfolg & Misserfolg
  Die Wahrscheinlichkeit für **Erfolg** wird mit der **Erfolgswahrscheinlichkeit p** bezeichnet, für **Misserfolg** mit $\mathbf{1-p}$ (Gegenwahrscheinlichkeit).

Führt man das Bernoulli-Experiment n-mal aus, so spricht man von einem **n-stufigen Bernoulli-Experiment**.
Die Bedingungen bleiben dieselben:

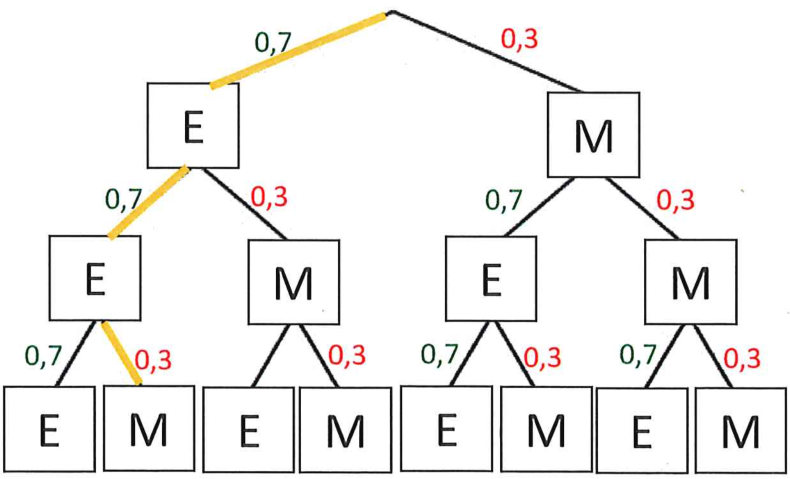
- Jeder Einzelversuch besitzt **genau zwei Versuchsausgänge**: Erfolg & Misserfolg.
- Jeder Einzelversuch wird unter **denselben Bedingungen** ausgeführt.
  Die Wahrscheinlichkeiten p & 1-p bleiben gleich.

Beispiel: Beim Tischtennis spielen Robin und Sarah gegeneinander. Aus Erfahrung weiß man, dass Sarah die bessere Spielerin ist. Sie gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 % einen Satz.

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Satzgewinne von Sarah. Sarah und Robin spielen drei Mal gegeneinander.

- Mit der Erfolgswahrscheinlichkeit von $p = 0{,}7$ gewinnt Sarah einen Satz.
- Mit der Wahrscheinlichkeit von $1 - p = 0{,}3$ gewinnt Robin einen Satz.

Wir veranschaulichen das dreistufige Bernoulli-Experiment mit Hilfe eines Baumdiagramms. Die Ereignisse sind dabei Erfolg E (Satzgewinn Sarah) und Misserfolg M (Satzgewinn Robin).

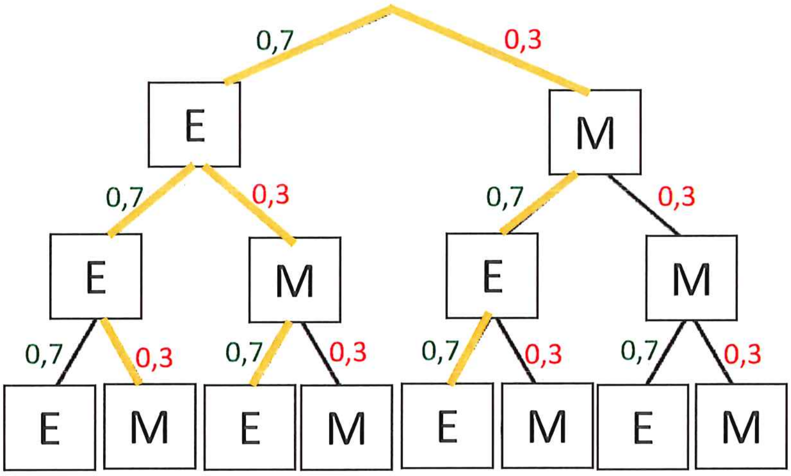


Fragestellung 1: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sarah die ersten beiden Sätze gewinnt und den dritten Satz verliert? – Anwendung Produktregel vom Baumdiagramm

$$P(erste\ 2\ Sätze\ gewinnen, 3. Satz\ verliert) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}147 = 14{,}7\ \%$$

Fragestellung 2: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sarah zwei Sätze gewinnt?

Anwendung Produkt- und Summenregeln vom Baumdiagramm:



<u>Erinnerung:</u> Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gewonnen Sätze von Sarah an.

$P(X=2) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = \mathbf{3} \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = \binom{3}{2} \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}441 = 44{,}1\ \%$

Was fällt uns auf?

Die Wahrscheinlichkeit, mit der Sarah zwei Sätze und Robin einen Satz gewinnt ist stets $0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3$.

Es ist Sarah aber **frei** gelassen, **in welcher Reihenfolge** sie die **zwei Sätze** gewinnt. Sie muss aus drei Sätzen zwei Sätze gewinnen. Wie viele Möglichkeiten hat sie dazu?

- Sieg / Sieg / Niederlage
- Sieg / Niederlage / Sieg
- Niederlage / Sieg / Sieg

$\binom{3}{2} = 3$ Möglichkeiten

Der Binomialkoeffizient $\binom{3}{2}$ gibt an, auf wie viele verschiedene Möglichkeiten Sarah von drei Sätzen zwei gewinnen kann. Zur Berechnung verwendet man folgende Formel:

Wie oft tritt Erfolg ein?
Erfolg = Gewonnener Satz von Sarah

Wie oft tritt Misserfolg ein?
Misserfolg = Verlorener Satz von Sarah

Wie viele Sätze werden gespielt? $n = 3$

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^1$$

Binomialkoeffizient $\binom{3}{2}$

Wahrscheinlichkeit für Misserfolg 1-p

Erfolgswahrscheinlichkeit p

Binomialverteilung:
Wird ein Bernoulli-Experiment n-mal mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p durchgeführt und gibt die diskrete Zufallsvariable X die Anzahl der Versuche an, bei denen das Ereignis E mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p eintritt, so gilt für die Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$:

$$f(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad mit\ 0 \leq p \leq 1\ und\ k = 0,1,2, \dots, n$$

- Die **diskrete Zufallsvariable X** heißt **binomialverteilt.**
- Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung f** wird als **Binomialverteilung** $B(n, p)$ mit den Parametern n und p bezeichnet.
- Die **Variable n** gibt die **Anzahl** der **Versuche** an.
- Es gibt zwei mögliche Ausgänge: Erfolg - Misserfolg
- Die **Erfolgswahrscheinlichkeit p** gibt die **Wahrscheinlichkeit** an, mit der das gewünschte Ereignis (= **Erfolg**) eintritt.

Bemerkungen zur Formel:

k: Wie oft tritt Erfolg ein?

$n - k$: Wie oft tritt Misserfolg ein?

n: Anzahl der Versuche

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$
Anzahl der Möglichkeiten, dass bei n Versuchen k Mal Erfolg eintritt

Erfolgswahrscheinlichkeit p
Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt Erfolg ein?

$1 - p$:
Wahrscheinlichkeit für Misserfolg

Die Formel der Binomialverteilung schaut auf den ersten Blick deutlich komplizierter aus, als die Thematik dahinter ist. Betrachten wir dazu noch einmal das Musterbeispiel mit folgender Fragestellung:

Sarah und Robin spielen 10 Sätze. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Sarah **sieben Sätze**?

- Anzahl Sätze $n = 10$
- Wie tritt Erfolg ein: $k = 7$
- Wahrscheinlichkeit für Erfolg:$p = 0{,}7$
- Wie oft tritt Misserfolg ein: $n - k = 3$
- Wahrscheinlichkeit für Misserfolg:$1 - p = 0{,}3$
- Anzahl der Möglichkeiten, von 10 Sätzen 7 zu gewinnen: $\binom{10}{7}$

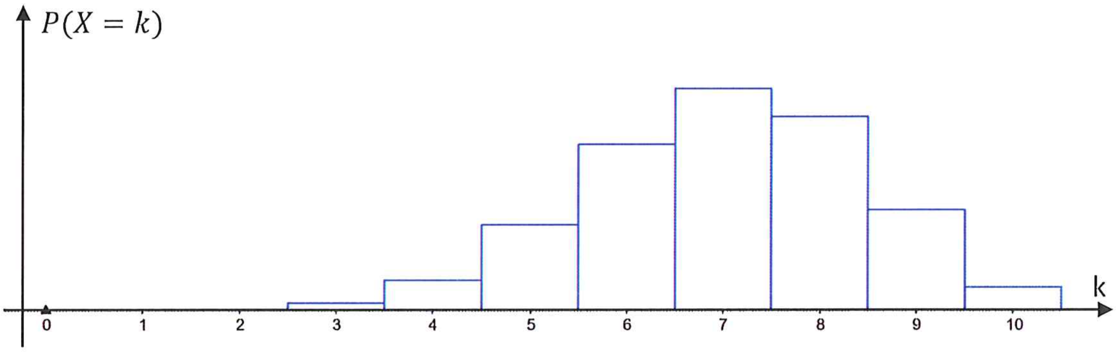
$$P(X = 7) = \binom{10}{7} \cdot 0{,}7^7 \cdot 0{,}3^3 = 0{,}2668 \approx 26{,}7\ \%$$

Interpretiere folgenden Ausdruck im **Sachzusammenhang**: $\binom{9}{2} \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^7$

Der Ausdruck gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass Sarah bei neun gespielten Sätzen gerade einmal zwei gewinnt.

Graphische Darstellung der **Wahrscheinlichkeitsfunktion** mit $n = 10$ und $p = 0{,}7$:

k	$P(X = k)$
0	0,0000059
1	0,00014
2	0,0014
3	0,009
4	0,037
5	0,103
6	0,200
7	0,267
8	0,233
9	0,121
10	0,028



WICHTIG: Die Erfolgswahrscheinlichkeit p gibt die Wahrscheinlichkeit für Erfolg bei einem Einzelversuch an!

Bsp. 7) In einer Urne sind 40 Kugeln enthalten. 30 Kugeln sind mit der Aufschrift „du gewinnst leider nichts" beschriftet. Die restlichen Kugeln sind mit der Aufschrift „du gewinnst 100 €" beschriftet.

Es wird sieben Mal mit Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Kugeln an, mit denen die Person 100 € gewonnen hat.

a. Ist die Zufallsvariable X binomialverteilt? Begründe.
b. Gib die Parameter p und n an. Stelle die Binomialverteilung auf.
c. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person 200 € gewinnt?
d. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person mindestens 600 € gewinnt?
e. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person maximal drei Kugeln zieht, mit denen sie gewinnt?
f. Stelle die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X als Tabelle und graphisch dar.

Bsp. 8) Beim Tennisspielen gewinnt Markus erfahrungsgemäß zu 80 % einen Satz gegen Paul. Markus und Paul spielen an diesem Tag am Vormittag vier Sätze und am Nachmittag weitere drei.

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gewonnenen Sätze von Paul an diesem Tag an.

a. Ist die Zufallsvariable X binomialverteilt? Begründe.
b. Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung als Tabelle und graphisch als Diagramm dar.
c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Paul maximal drei Sätze gewinnt.
d. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Paul mindestens fünf Sätze gewinnt.
e. Am nächsten Tag sind sie etwas müde und spielen weniger Sätze. Interpretiere den Ausdruck im gegebenen Kontext:

$$\binom{5}{3} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 + \binom{5}{4} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^1 + 0{,}8^5$$

Bsp. 9) Bei einer Produktion von Spielkonsolen ist ein Gerät erfahrungsgemäß zu einem Prozent defekt. Es werden 200 Konsolen auf ihre Funktionalität überprüft. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl geprüften Geräte, die fehlerhaft sind.

a. Ist die Zufallsvariable X binomialverteilt?

b. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass maximal drei Geräte defekt sind.

c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Überprüfung kein Gerät defekt ist.

Bsp. 10) Beim Biathlon trifft ein Biathlet beim Liegend-Schießen mit 95 %-iger Wahrscheinlichkeit, sowie beim Stehend-Schießen mit 80%-iger Wahrscheinlichkeit die Zielscheibe.

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer an.

a. Im Sprint-Bewerb muss der Sportler fünf Schüsse liegend abgeben. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Sportler genau vier Mal die Scheibe trifft.

b. Im Einzel-Bewerb über 20 Kilometer werden 10 Schüsse stehend abgegeben. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Biathlet (a) genau sieben, (b) maximal drei, (c) mindestens acht Scheiben trifft.

c. An einem Trainingstag legt der Biathlet eine Schusserie von 40 Schüssen in liegender Position hin. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Biathlet mindestens 38 Treffer erzielt.

d. Am selben Trainingstag legt der Sportler noch eine Stehend-Serie hin. Interpretiere den Ausdruck im gegebenen Kontext:

$$\binom{20}{19} \cdot 0{,}8^{19} \cdot 0{,}2^{1} + \binom{20}{20} \cdot 0{,}8^{20} \cdot 0{,}2^{0}$$

Bsp. 11) Kreuze die beiden äquivalente Terme zum Term $\binom{10}{3} \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^7$ an.

$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!\,3!}$

$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$

$\binom{10}{3} \cdot 0{,}6^3 \cdot (1-0{,}4)^7$	O
$\binom{10}{7} \cdot 0{,}6^3 \cdot (1-0{,}6)^7$	X
$720 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^{10-3}$	O
$120 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^7$	X
$120 \cdot 0{,}6^7 \cdot 0{,}4^3$	O

Bsp. 12) Ein Fußballspieler verwertet erfahrungsgemäß zu 90 % einen Elfmeter. Im Training tritt er sieben Mal nacheinander gegen den Torhüter an. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer des Schützen an.

a. Welche Werte kann die Zufallsvariable X annehmen? Ist die Zufallsvariable X binomialverteilt? Begründe.

b. Stelle die Tabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung auf.

c. Lies die Wahrscheinlichkeit aus der Tabelle ab, dass der Spieler genau vier Elfmeter verwertet.

d. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Schütze mindestens fünf Elfmeter verwertet.

e. Interpretiere den Ausdruck im gegebenen Kontext:

$$0{,}1^7 + 7 \cdot 0{,}9^1 \cdot 0{,}1^6$$

Musterbeispiel:

Ein Basketballspieler verwertet einen Wurf von der Mittellinie mit einer Wahrscheinlichkeit von 24%. **Wie oft müsste der Basketballer werfen, dass er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens einmal von der Mittellinie trifft?**

Gesucht: Mindestens ein Treffer mit der Wahrscheinlichkeit von 90 %
➔ Gegenwahrscheinlichkeit zu mindestens ein Treffer = Kein Treffer

Wahrscheinlichkeit für keinen Treffer: $0{,}76 \cdot 0{,}76 \cdot \ldots \cdot 0{,}76 = 0{,}76^n$ (bei n Würfen)

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Schütze mindestens einmal trifft, wird über die Gegenwahrscheinlichkeit ausgedrückt:

$$P(\text{mindestens 1 Treffer}) = 1 - 0{,}76^n \quad \geq 0{,}9$$

Diese Wahrscheinlichkeit soll größer als 90 % sein. Es muss folgende Ungleichung gelöst werden:

$$1 - 0{,}76^n \geq 0{,}9 \quad | + 0{,}76^n, -0{,}9$$

$$0{,}1 \geq 0{,}76^n \quad | \, ln$$

$$\ln(0{,}01) \geq n \cdot \ln(0{,}76) \quad | : \ln(0{,}76)$$

Bemerkung: $\ln(0{,}76) = -0{,}27$ → dividiert man bei einer Ungleichung durch eine negative Zahl, so **ändert** sich das **Ungleichheitszeichen**:

$$\frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}76)} \leq n$$

$$16{,}78 \leq n$$

$$n \geq 16{,}78$$

Antwort: Der Basketballspieler muss mindestens 17 Mal Werfen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens einmal den Korb trifft.

Bsp. 13) Ein Würfel (1-6) wird 18-mal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der geworfenen Dreier an.

a. Ist die Zufallsvariable X normalverteilt? Begründe.

b. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass genau vier Mal ein Dreier gewürfelt wird.

c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 15-mal ein Dreier gewürfelt wird.

d. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass maximal zwei Mal ein Dreier gewürfelt wird.

e. Wie oft müsste man würfeln, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 97 % mindestens ein Mal einen Dreier würfelt?

Bsp. 14) Zwei Würfel (1-6) werden gleichzeitig 10-mal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl an, bei der die Summe der Augenzahlen der beiden Würfel sieben ergibt.

a. Ist die Zufallsvariable X ~~normal~~binomialverteilt? Begründe.

b. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass genau drei Mal die Summe der beiden Augenzahlen sieben ergibt.

c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass maximal zwei Mal die Summe der beiden Augenzahlen sieben ergibt.

d. Wie oft müsste man würfeln, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 93 % mindestens einmal die Summe der Augenzahlen der Würfel von sieben würfelt?

Bsp. 15) Bei einem Test bekommt man eine positive Note, wenn man mindestens 60 % der Fragen richtig beantwortet. Zum Test kommen 20 Multiple-Choice Fragen zu je vier Antwortmöglichkeiten. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der richtig beantworteten Fragen an.

a. Lars kreuzt nach dem Zufallsprinzip an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er eine positive Note erhält?

b. Für ein „Sehr Gut" müssen mindestens 92 % richtig beantwortet werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dies mit einem zufälligen Ankreuzen gelingt?

Bsp. 16) Ein Jäger schießt zur Übung leere Cola-Dosen. Diese trifft er aus 100 Meter Entfernung mit einer Wahrscheinlichkeit von 54 %.

a. Wie oft müsste der Jäger schießen, dass er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 97 % mindestens einmal die Cola-Dose trifft.

b. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Treffer einer Cola-Dose. Der Jäger schießt 24-mal aus dieser Entfernung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er zwischen 7 und 10 Treffer landet?

3. Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsvariable

Sei X eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern n und p. Wir definieren:

- **Erwartungswert** von X: $E(X) = \mu = n \cdot p$
- **Varianz** von X: $V(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$
- **Standardabweichung** von X: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

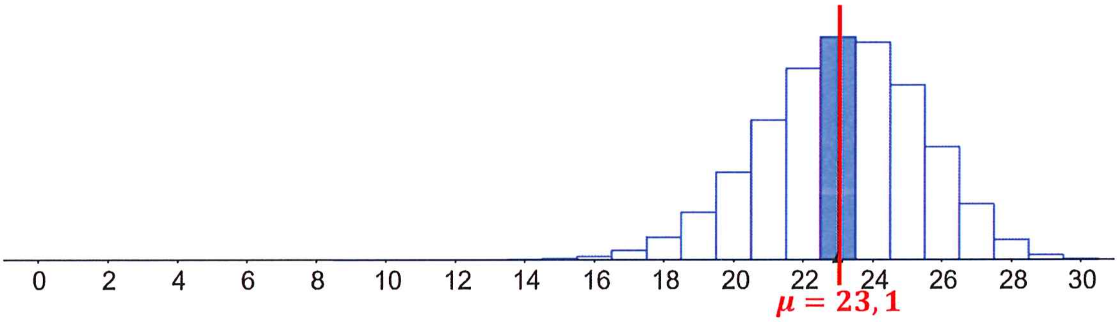
Musterbeispiel:
Ein Handballspieler verwertet zu 77 % einen 7-Meter-Wurf. An einem Trainingstag tritt der Handballspieler 30-mal zum 7-Meter-Wurf an. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer an.

Aufgabe: Berechne den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung. Interpretiere die Werte im gegebenen Kontext.

- 30 Würfe $\rightarrow n = 30$
- Erfolgswahrscheinlichkeit für einen Treffer ist 77 % $\rightarrow p = 0{,}77$

Erwartungswert $E(X) = n \cdot p = 30 \cdot 0{,}77 = 23{,}1$

Interpretation: Wiederholt der Handballspieler sehr oft dieses Training (30 7-Meter-Würfe), so wird er durchschnittlich ca. 23 Treffer erzielen.



Varianz $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 30 \cdot 0{,}77 \cdot 0{,}23 = 5{,}313$

Interpretation: Wiederholt der Handballspieler sehr oft dieses Training (30 7-Meter-Würfe), so strebt die empirische Varianz der Datenreihe gegen die Varianz $V(X) = 5{,}3$.

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{5{,}313} \approx 2{,}3$

$$[\mu - \sigma; \mu + \sigma] = [20{,}8; 25{,}4]$$

Interpretation 1: Wiederholt der Handballspieler sehr oft dieses Training (30 7-Meter-Würfe), so wird er oft 21 bis 25 Treffer erzielen.

$$[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma] = [18{,}5; 27{,}7]$$

Interpretation 2: Führt der Handballer sehr oft dieses Training aus (30 7-Meter-Würfe), so wird er selten maximal 18 bzw. mindestens 28 Treffer erzielen. Bei den meisten Durchgängen wird er eine Trefferanzahl zwischen 19 und 27 erzielen.

Bsp. 17) Bei einem Produkt sind erfahrungsgemäß 13 % in einem defekten Zustand. 12 Geräte werden überprüft. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der defekten Geräte bei der Überprüfung an.

a. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass genau drei Geräte defekt sind.

b. Bestimme den Erwartungswert. Interpretiere den Wert im gegebenen Kontext.

c. Bestimme die Varianz und Standardabweichung und interpretiere die Werte.

d. Wie viele Geräte müsste man überprüfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens ein defektes Gerät zu enthalten?

e. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte für X innerhalb des Intervalls $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegen.

Bsp. 18) Beim Elfmeterschießen hält ein Torwart mit einer Wahrscheinlichkeit von 55 % einen Elfmeter. Alle 17 Kaderspieler treten zum Elfmeter an (Wahrscheinlichkeit ist bei jedem Schützen gleich). Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der gehaltenen Elfmeter an.

a. Berechne den Erwartungswert und interpretiere im gegebenen Sachzusammenhang.

b. Berechne die Varianz und die Standardabweichung.

c. Wie groß ist der Erwartungswert, wenn die Zufallsvariable X die Anzahl der nicht-gehaltenen Elfmeter angibt. Berechne.

d. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte für X innerhalb des Intervalls $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegen.

e. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte für X unterhalb von $\mu - 2\sigma$ liegen.

Bsp. 19) Bei der olympischen Disziplin „Schießen" trifft ein Schütze mit einer Wahrscheinlichkeit von 68 % den Wert 10,0. An einem Trainingstag feuert er 500 Schüsse ab. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer an.

a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau ~~300~~ 362-mal den Wert 10,0 zu treffen?

b. Berechne den Erwartungswert und interpretiere im gegebenen Sachzusammenhang.

c. Berechne die Varianz und die Standardabweichung und interpretiere die Werte.

d. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte für X innerhalb des Intervalls $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegen.

e. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte für X oberhalb von $\mu + 2\sigma$ liegen.

Bsp. 20) Ein Würfel (1-6) wird 40-mal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der geworfenen Sechser an.

a. Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung. Interpretiere die Werte im gegebenen Kontext.

b. Ein 20-seitiger Würfel mit den Ziffern 1-20 wird ebenfalls 40-mal geworfen. Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung. Vergleiche die Werte mit deinen Ergebnissen aus Aufgabe a). Was fällt dir auf?

c. Führe dasselbe mit einem 50-seitigen Würfel mit den Ziffern 1-50 aus. Interpretiere die Ergebnisse.

Bsp. 21) Beim Roulette-Spiel setzt jemand 20-mal hintereinander auf **(i)** die Farbe Rot, **(ii)** die zweiten 12 (13-24) und **(iii)** die Zahl 7. Die Zufallsvariable X gibt jeweils die Anzahl der jeweiligen eintretenden Ereignisse an.

a. Berechne jeweils den Erwartungswert. Vergleiche die Werte und interpretiere dies im gegebenen Sachzusammenhang.

b. Berechne jeweils die Standardabweichung und vergleiche die Werte untereinander.

c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man bei 13 Versuchen das gewünschte Ereignis (i – iii) erreicht

Bsp. 22) An einem Bahnhof verspäten sich Züge mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 %. An drei Tagen werden insgesamt 400 Züge beobachtet.

a. Berechne den Erwartungswert, wenn die Zufallsvariable X die Anzahl der pünktlichen Züge angibt. Berechne die Standardabweichung und interpretiere die beiden Werte im gegebenen Kontext. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ~~350~~ 370 Züge pünktlich erscheinen.

b. Für dieselben Schritte für den Erwartungswert und die Standardabweichung durch, wenn die Zufallsvariable X die Anzahl der verspäteten Züge angibt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 30 Züge verspätet erscheinen.

Bsp. 23) Bei der Lieferung von Porzellan-Teller wird die Ware erfahrungsgemäß in 3 % aller Pakete kaputt. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Pakete an, in denen die Ware gebrochen ist.

a. Es werden [illegible] Pakete nach der Auslieferung kontrolliert. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass (i) genau 12[illegible], (ii) maximal 20[illegible], (iii) mindestens 100[illegible], (iv) zwischen 10[illegible] und 20[illegible] Pakete eine kaputte Ware enthalten.

b. Bestimme den Erwartungswert. Interpretiere den Wert im gegebenen Kontext.

c. Bestimme die Standardabweichung und interpretiere sie.

d. Wie viele Geräte müsste man überprüfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens ein defektes Gerät zu enthalten?

e. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte für X innerhalb des Intervalls $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegen.

7) WSK für Erfolg $p = \frac{10}{40} = 0{,}25$

1

a) SA!
- 2 Ausgänge
- gleiche WSK!
- beliebig oft durchführbar

b) $p = 0{,}25$; $n = 7$

$$P(X=k) = \binom{7}{k} \cdot 0{,}25^k \cdot 0{,}75^{7-k}$$

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

c) $P(X=2) = \binom{7}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^5 =$

$$21 \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^5 = 0{,}311 \approx \underline{\underline{31{,}1\%}}$$

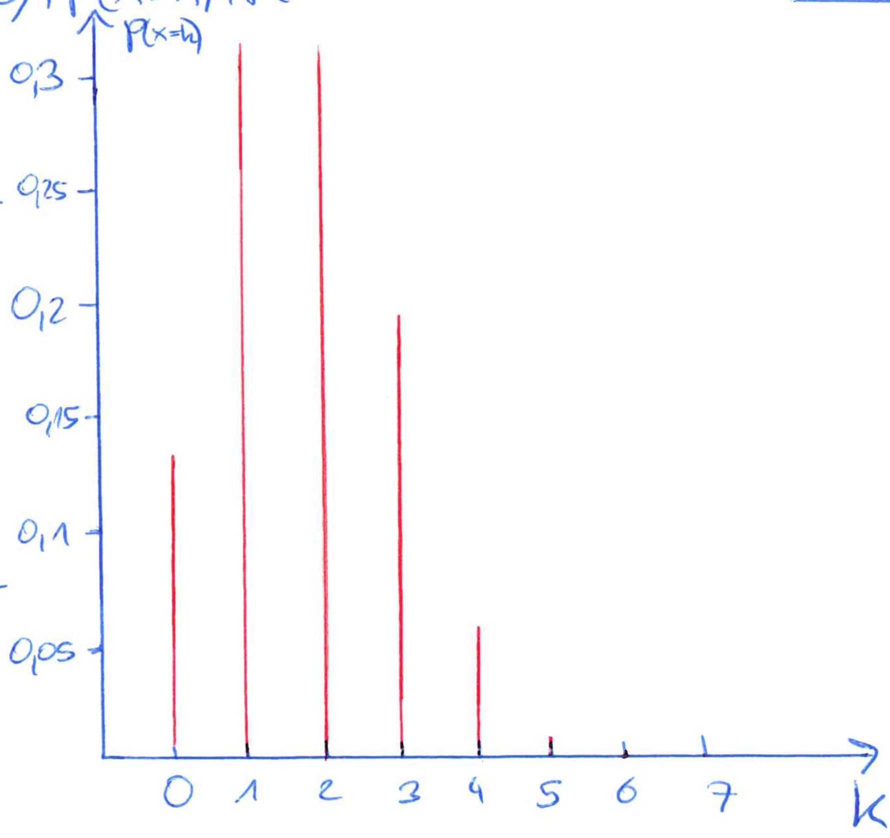
d) $P(X \geq 6) = P(X=6) + P(X=7)$

$$= \underbrace{\binom{7}{6}}_{7} \cdot 0{,}25^6 \cdot 0{,}75 + \underbrace{\binom{7}{7}}_{1} \cdot 0{,}25^7 = 0{,}0013 \approx \underline{\underline{0{,}13\%}}$$

e) $P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0{,}9294 \approx \underline{\underline{92{,}94\%}}$

f)

k	P(X=k)
0	0,1335
1	0,3115
2	0,3115
3	0,173
4	0,0577
5	0,0115
6	0,0013
7	0,0001



8) p ... Satzgewinn PAUL!

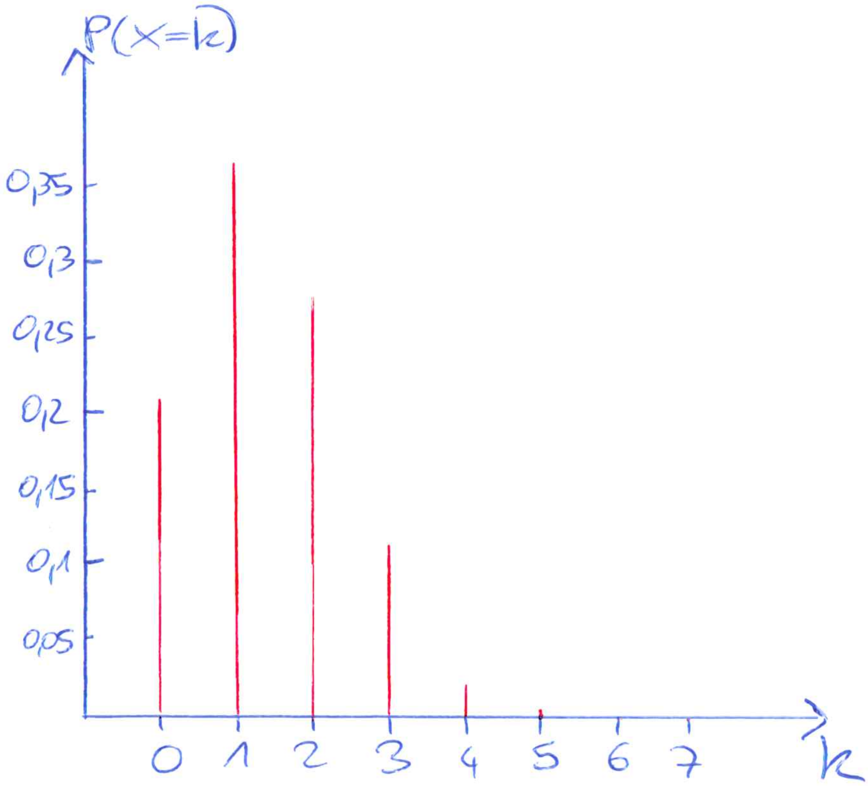
$p = 0{,}2$

a) SA: $n = 7,\ p = 0{,}2$ (WSK bleibt gleich!)

$$P(X=k) = \binom{7}{k} \cdot 0{,}2^k \cdot 0{,}8^{7-k}$$

b)

k	$P(X=k)$
0	0,2097
1	0,367
2	0,2753
3	0,1147
4	0,0287
5	0,0043
6	0,0004
7	0,000012



c) $P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0{,}967 \approx \underline{\underline{96{,}7\%}}$

d) $P(X \geq 5) = P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) = 0{,}0047 \approx \underline{\underline{0{,}47\%}}$

e) Der Term gibt die WSK an, dass Paul von 5 Sätzen mindestens 3 gewinnt.

9) a) SA.
$n = 200,\ p = 0{,}01$

b) $P(X \leq 3) = 0{,}858 = \underline{\underline{85{,}8\%}}$

c) $P(X=0) = 0{,}134 = \underline{\underline{13{,}4\%}}$

10a) $n=5,\ p=0{,}95$

$P(X=4)=0{,}204=\underline{\underline{20{,}4\%}}$

b) $n=10,\ p=0{,}8$

(i) $P(X=7)=0{,}201=\underline{20{,}1\%}$

(ii) $P(X\leq 3)=0{,}00086=\underline{0{,}086\%}$

(iii) $P(X\geq 8)=0{,}678=\underline{67{,}8\%}$

c) $n=40,\ p=0{,}95$

$P(X\geq 38)=0{,}677=\underline{67{,}7\%}$

d) Der Term gibt die WSK an, dass der Biathlet von 20 Stehend-Versuchen mindestens 19 trifft.

11a) SA. $n=7,\ p=0{,}9$ (WSK bleibt gleich, 2 Ausgänge → Treffer, → kein Treffer)

$X=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

b)

X	P(X=k)
0	0,0000001
1	0,0000063
2	0,00017
3	0,0026
4	0,023
5	0,124
6	0,372
7	0,478

c) → $P(X=4)=2{,}3\%$

d) $P(X\geq 5)=0{,}974=\underline{\underline{97{,}4\%}}$

e) Der Term gibt die WSK an, dass der Spieler von 7 Elfmetern maximal einen verwertet.

13a) BA, $n=18$, $p=\frac{1}{6}$ (für 3er)
⇝ WSK bleiben gleich
⇝ 2 Ausgänge: 3er, kein 3er ✓

b) $P(X=4)=0{,}184=\underline{\underline{18{,}4\%}}$

c) $P(X\geq 10)=0{,}000196\approx\underline{\underline{0{,}0196\,\%}}$

d) $P(X\leq 2)=0{,}403=\underline{\underline{40{,}3\%}}$

e) $P(\text{kein Treffer})=\left(\frac{5}{6}\right)^n$ bei n Würfen

$P(\text{mind. 1 Treffer})=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\geq 0{,}97 \quad |+\left(\frac{5}{6}\right)^n, -0{,}97$

$0{,}03\geq\left(\frac{5}{6}\right)^n \quad |\ln$

$\ln(0{,}03)\geq n\cdot\underbrace{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}_{-0{,}18} \quad |:\ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0$

$\frac{\ln(0{,}03)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}\leq n$

$\underline{n\geq 19{,}2}$

⇝ Man müsste 20x würfeln, um mit einer WSK. von mind. 97 % mind. 1x 3er zu erhalten.

14) Augensumme $=7$ ⇝ $P(\text{Summe}=7)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
(3,4), (4,3), (2,5), (5,2), (1,6), (6,1)

a) BA: $n=10$, $p=\frac{1}{6}$
- WSK bleibt gleich
- 2 Ausgänge: Summe $=7$, oder Summe $\neq 7$ ✓

b) $P(X=3)=0{,}155=\underline{\underline{15{,}5\%}}$

c) $P(X\leq 2)=0{,}775=\underline{\underline{77{,}5\%}}$

d) $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\geq 0{,}93 \quad |-0{,}93, +\left(\frac{5}{6}\right)^n$

$0{,}07\geq\left(\frac{5}{6}\right)^n \quad |\ln$

$\ln(0{,}07)\geq n\cdot\ln\left(\frac{5}{6}\right) \quad |:\ln$

da $\ln\left(\frac{5}{6}\right)<0$

$\frac{\ln(0{,}07)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}\leq n$

$n\geq 14{,}6$

$\underline{\underline{\text{15 Würfe}}}$

15) $n=20$, $p=0{,}25$

a) $0{,}6 \cdot 20 = 12 \rightarrow$ er muss 12 Fragen beantworten:

$P(X \geq 12) = 0{,}00094 = \underline{\underline{0{,}094\%}}$

b) $0{,}90 \cdot 20 = 18$

$P(X \geq 18) = 0{,}00000000 16 = \underline{\underline{0{,}00000016\%}}$

16) a) $p = 0{,}54 \rightarrow 1-p = 0{,}46$

$1 - 0{,}46^n \geq 0{,}97 \quad | -0{,}97, +0{,}46^n$

$0{,}03 \geq 0{,}46^n \quad | \ln$

$\ln(0{,}03) \geq n \cdot \ln(0{,}46) \quad | : \ln$

<0

$\frac{\ln(0{,}03)}{\ln(0{,}46)} \leq n$

$\underline{\underline{n \geq 4{,}5}}$

$\rightsquigarrow$ $\underline{\underline{5 \text{ Schüsse}}}$

b) $n=24$, $p=0{,}54$

$P(7 \leq X \leq 10) = 0{,}153 = \underline{\underline{15{,}3\%}}$

17) $n=12$, $p=0{,}13$

a) $P(X=3) = 0{,}138 = \underline{\underline{13{,}8\%}}$

b) $\mu = n \cdot p = 1{,}56$

Würde man sehr oft 12 Geräte überprüfen, so wären im Schnitt ca. 1,56 defekt.

c) $\sigma^2 = n \cdot p(1-p) = 1{,}357 \xrightarrow{\sqrt{}} \sigma \approx 1{,}165$

d)

$\longrightarrow$ nächste Seite

d) $1-p=0{,}87$

$\rightarrow 1-0{,}87^n \geq 0{,}95 \quad |-0{,}95, +0{,}87^n$

$0{,}05 \geq 0{,}87^n \quad |\ln$

$\ln(0{,}05) \geq n \cdot \ln(0{,}87) \quad |:\ln$

$\ln(0{,}87) < 0$

$\frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}87)} \leq n$

$n \geq 21{,}5 \rightarrow$ 22 Produkte

e) $[1{,}56-1{,}16 ; 1{,}56+1{,}16] = [0{,}4 ; 2{,}72]$

$\Downarrow$

$[1 ; 2]$

$P(1 \leq X \leq 2) = 0{,}614 = 61{,}4\%$

18) $p=0{,}55, n=17$

a) $\mu = n \cdot p = 9{,}35$

$\rightarrow$ Messwert, dass er von 17 Schüssen durchschnittlich 9,35 hält.

b) $\sigma^2 = V(X) = 4{,}21 \rightarrow \sigma = \sqrt{V(X)} \approx 2{,}051$

c) $n=17, p=0{,}45$

$\mu = 7{,}65$

d) $[9{,}35-2{,}05 ; 9{,}35+2{,}05] = [7{,}3 ; 11{,}4]$

$\rightarrow P(8 \leq X \leq 11) \approx 0{,}6695 \approx 66{,}95\%$

e) $\mu - 2\sigma = 9{,}35 - 2 \cdot 2{,}05 = 5{,}25$

$P(X \leq 5) = 0{,}030 \approx 3{,}0\%$

19a) $n=500$, $p=0{,}68$

$P(X=362)=0{,}004=\underline{\underline{0{,}4\%}}$

b) $\mu=n\cdot p=\underline{\underline{340}}$

Es werden 340 Treffer (10,0) erwartet. Würde der Schütze sehr oft dieses TR durchführen, so würde er durchschnittlich ca. 340× 10,0 treffen.

c) $V(X)=\sigma^2=\underline{\underline{108{,}799..}}$ $\rightarrow$ $\underline{\underline{\sigma=10{,}43}}$

d) $[340-10{,}43;340+10{,}43]=[329{,}57;350{,}43]$

$P(330\leq X\leq 350)=0{,}686=\underline{\underline{68{,}6\%}}$

e) $\mu+2\sigma=340+2\cdot 10{,}43=360{,}86$

$P(X\geq 361)=0{,}0297=\underline{\underline{2{,}97\%}}$

20) $n=40$, $p=\frac{1}{6}$

a) $\mu=n\cdot p=6{,}\overline{6}$ → Bei 40 Würfen werden im Schnitt $6{,}\overline{6}$ Sechser erwartet.

$\sigma=2{,}36$ → ~~Die~~ Viele Werte streuen um 2,36 umzu (knapp 70%)

b) $n=40$, $p=\frac{1}{20}$

→ $\mu=2$ → Es werden nur 2 Sechser erwartet.

→ $\sigma=1{,}37$ → Kleinere Streuung

c) $n=40$, $p=\frac{1}{50}$

→ $\mu=0{,}8$ → Erwartungswert nur mehr 0,8

→ $\sigma=0{,}89$ → σ kleiner.

21)

a)

	ROT	2.12 13–24	Zahl 7
$n=20$	$p=\frac{18}{37}$	$p=\frac{12}{37}$	$p=\frac{1}{37}$
	$\mu=9{,}7$	$\mu=6{,}5$	$\mu=0{,}5$

→ Je höher die WSK bei einem Einzelversuch für das jeweilige Ereignis ist, desto größer ist der Erwartungswert.

$\sigma=2{,}24$	$\sigma=2{,}09$	$\sigma=0{,}72$

→ ~~Je~~ Bei ROT ist die Standardabweichung am größten.

$P(X=13)=0{,}062$ $=6{,}2\%$	$P(X=13)=0{,}002$ $=0{,}2\%$	$P(X=13)=0{,}0000000\ldots$

22) $n=400$, $p=0{,}95$

↑ Erfolg = PÜNKTLICH

a) $\mu=n\cdot p=380$
Es wird erwartet, dass von 400 Zügen 380 im Schnitt pünktlich erscheinen.

b) $\sigma=4{,}36$

c) $P(X\geq 370)=0{,}9886=98{,}86\%$

d) $n=400$, $p=0{,}05$
$\mu=20$, $\sigma=4{,}36$
$P(X\geq 30)=0{,}019=1{,}9\%$

23) $n=190,\ p=0{,}03$ 9

a) $P(X=12)=0{,}0076=7{,}6\%$

$P(X\leq 20)=0{,}9999965=99{,}99965\%$

$P(X\geq 100)=0{,}00000\ldots\ldots=0\%$

$P(10\leq X\leq 20)=0{,}062=6{,}2\%$

b) $\mu=5{,}7$

$\sigma=2{,}35$

c) $1-p=0{,}97$

$1-0{,}97^n\geq 0{,}99 \quad |-0{,}99,+0{,}97^n$

$0{,}01\geq 0{,}97^n \quad |\ln$

$\ln(0{,}01)\geq \ln(0{,}97)\cdot n \quad |:\ln(0{,}97)$

$\underset{<0}{\downarrow}$

$\frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}97)}\leq n$

$n\geq 151{,}2$

$\rightarrow$ 152 Porzellan-Teller

d) $[5{,}7-2{,}35;5{,}7+2{,}35]=[3{,}35;8{,}05]$

$P(4\leq X\leq 8)=0{,}704=70{,}4\%$