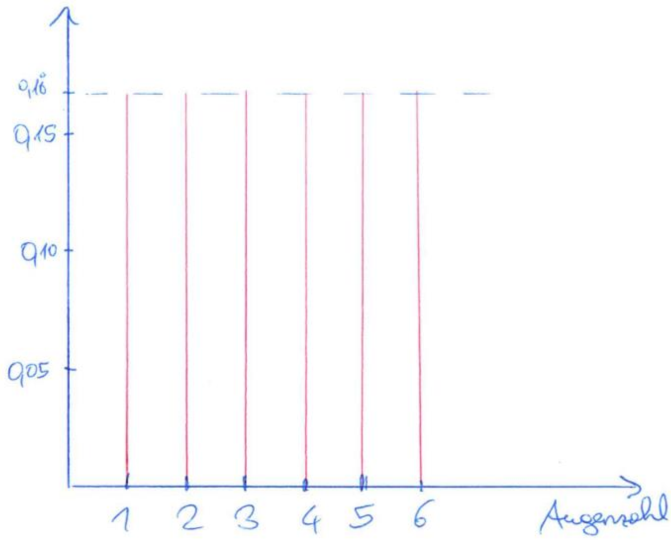
WS3.1 Diskrete Zufallsvariable (LÖSUNGEN)

Bsp. 1)

13) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ③

b)



k	$P(X=k)$
1	$0{,}1\dot{6}$
2	$0{,}1\dot{6}$
3	$0{,}1\dot{6}$
4	$0{,}1\dot{6}$
5	$0{,}1\dot{6}$
6	$0{,}1\dot{6}$

c) $P(X=3) = 0{,}1\dot{6} = \underline{16{,}\dot{6}\,\%}$

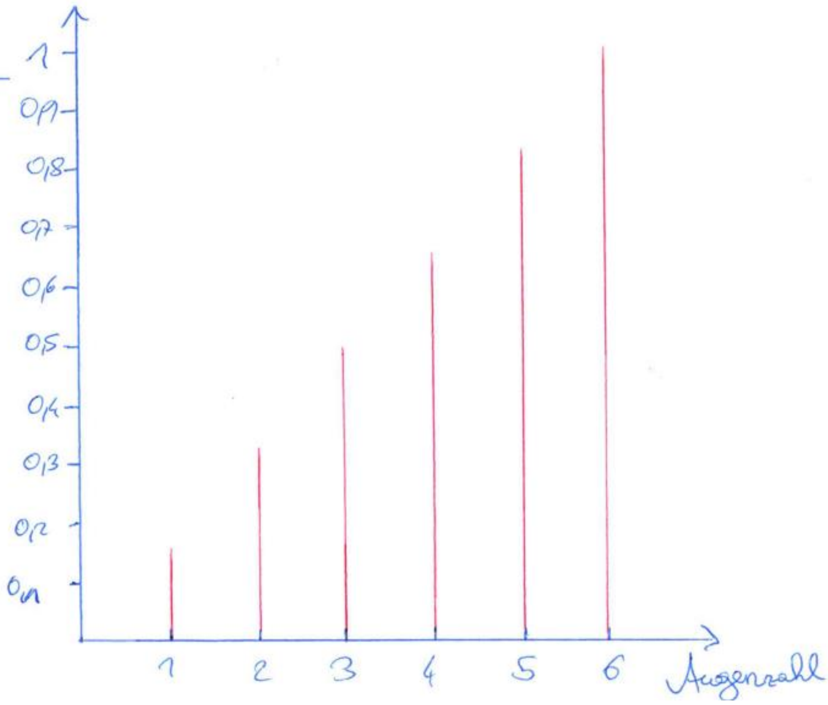
$P(X \geq 2) = \frac{5}{6} = 0{,}8\dot{3} = \underline{83{,}\dot{3}\,\%}$

$P(X < 10) = 1 = \underline{100\,\%}$

$P(2 < X \leq 5) = \frac{3}{6} = \underline{50\,\%}$

d)

$P(X \leq k)$	P
$P(X \leq 1)$	$0{,}1\dot{6}$
$P(X \leq 2)$	$0{,}\dot{3}$
$P(X \leq 3)$	$0{,}5$
$P(X \leq 4)$	$0{,}\dot{6}$
$P(X \leq 5)$	$0{,}8\dot{3}$
$P(X \leq 6)$	1



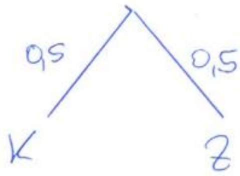
Bsp. 2)

14) X… Anzahl Kopf

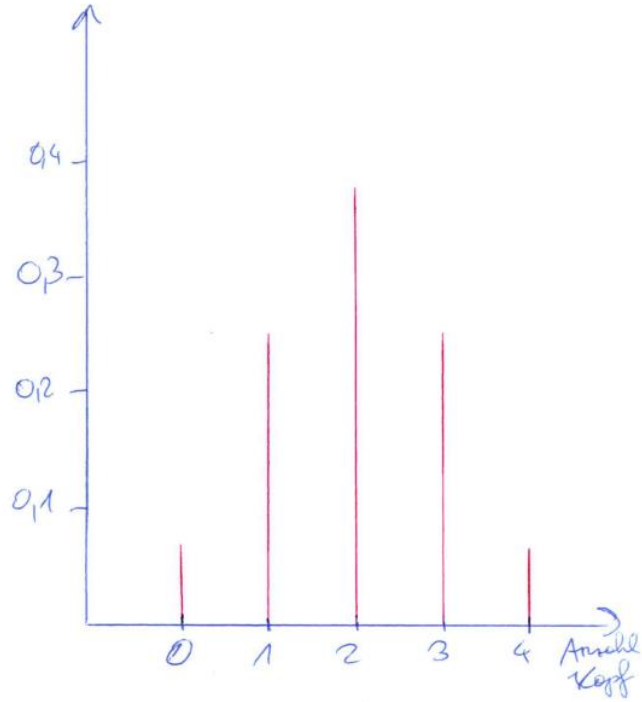
(4)

a) X = {0, 1, 2, 3, 4}

b)



k	P(X=k)
0	0,0625
1	4 Pfade: $4 \cdot 0{,}5^4 = 0{,}25$
2	6 Pfade: $6 \cdot 0{,}5^4 = 0{,}375$
3	4 Pfade: $4 \cdot 0{,}5^4 = 0{,}25$
4	0,0625

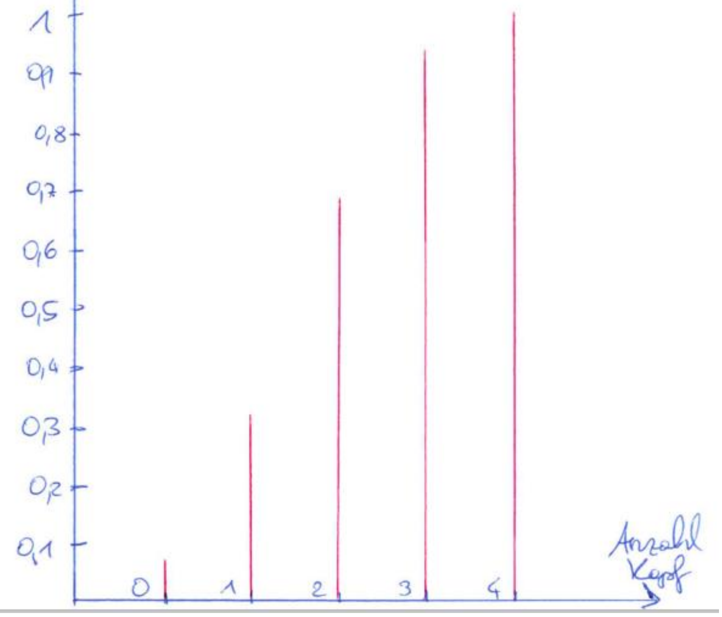


c) $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$
$= 0{,}375 + 0{,}25 + 0{,}0625 = 0{,}6875 = \underline{\underline{68{,}75\%}}$

d) $P(1 \leq X \leq 2) = P(X=1) + P(X=2) = \underline{\underline{0{,}625 = 62{,}5\%}}$
↳ Wahrscheinlichkeit, dass Kopf einmal oder zweimal kommt.

e)

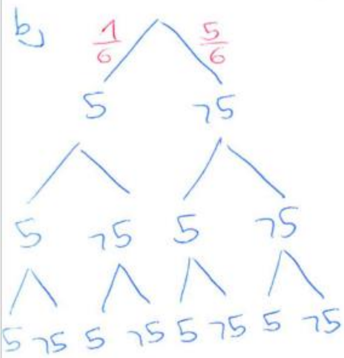
k	P(X≤k)
0	0,0625
1	0,3125
2	0,6875
3	0,9375
4	1



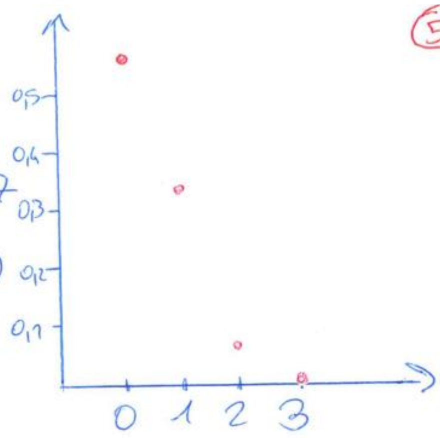
Bsp. 3)

15) a) $X = \{0,1,2,3\}$

b)



k	P(X=k)
0	$\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0{,}579$
1	$3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6} \approx 0{,}347$
2	$3\cdot\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2 \approx 0{,}069$
3	$\left(\frac{1}{6}\right)^3 \approx 0{,}005$



c) $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = 0{,}069 + 0{,}005 = 0{,}074 = \underline{\underline{7{,}4\%}}$

d) $P(X<2) = P(X=0) + P(X=1) = 0{,}926 = \underline{\underline{92{,}6\%}}$

... dass maximal einmal ein 5er gewürfelt wird.

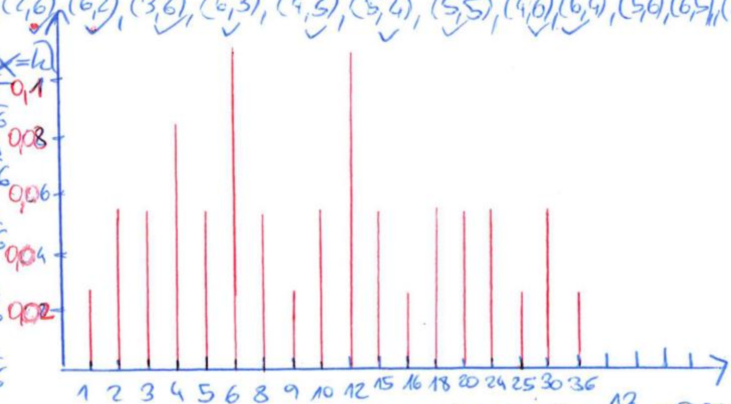
Bsp. 4)

18) a) $\Omega = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(1,3),(1,4),(4,1),(2,3),(3,2),(3,3),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3),(1,6),(6,1),(4,4),(3,5),(5,3),(2,6),(6,2),(3,6),(6,3),(4,5),(5,4),(5,5),(4,6),(6,4),(5,6),(6,5),(6,6)\}$

b)

k	P(X=k)
1	$\frac{1}{36} \approx 0{,}02\dot{7}$
2	$\frac{2}{36} \approx 0{,}0\dot{5}$
3	$\frac{2}{36}$
4	$\frac{3}{36} \approx 0{,}08\dot{3}$
5	$\frac{2}{36}$
6	$\frac{4}{36} = 0{,}\dot{1}$
8	$\frac{2}{36}$
9	$\frac{1}{36}$
10	$\frac{2}{36}$
12	$\frac{4}{36}$

k	P(X=k)
15	$\frac{2}{36}$
16	$\frac{1}{36}$
18	$\frac{2}{36}$
20	$\frac{2}{36}$
24	$\frac{2}{36}$
25	$\frac{1}{36}$
30	$\frac{2}{36}$
36	$\frac{1}{36}$



c) $P(X=4) = 0{,}08\dot{3} = 8{,}3\%$ $\quad P(X \geq 15) = \frac{13}{36} \approx 0{,}36 = 36\%$

$P(X \leq 10) = \frac{17}{36} \approx 0{,}472 \approx 47{,}2\%$

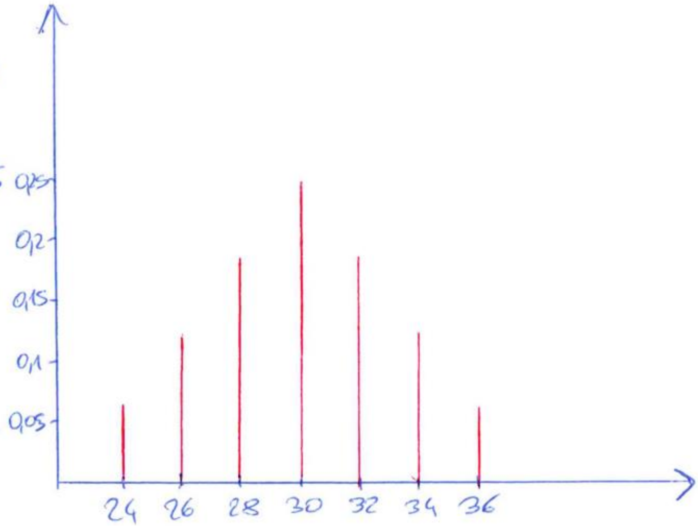
$P(8 < X \leq 19) = \frac{12}{36} = 0{,}\dot{3} = 33{,}3\%$

Bsp. 5)

19. $\Omega = \{(12,12),(12,14),(14,12),(12,16),(16,12),(12,18),(18,12),(14,16),(16,14),(14,18),(18,14),(16,18),(18,16),(14,14),(16,16),(18,18)\}$ 16

a)

k	$P(X=k)$
24	$\frac{1}{16}=0{,}0625$
26	$\frac{2}{16}=0{,}125$
28	$\frac{3}{16}=0{,}1875$
30	$\frac{4}{16}=0{,}25$
32	$\frac{3}{16}=0{,}1875$
34	$\frac{2}{16}=0{,}125$
36	$\frac{1}{16}=0{,}0625$



b) $P(X=26)=\frac{2}{16}=12{,}5\%$

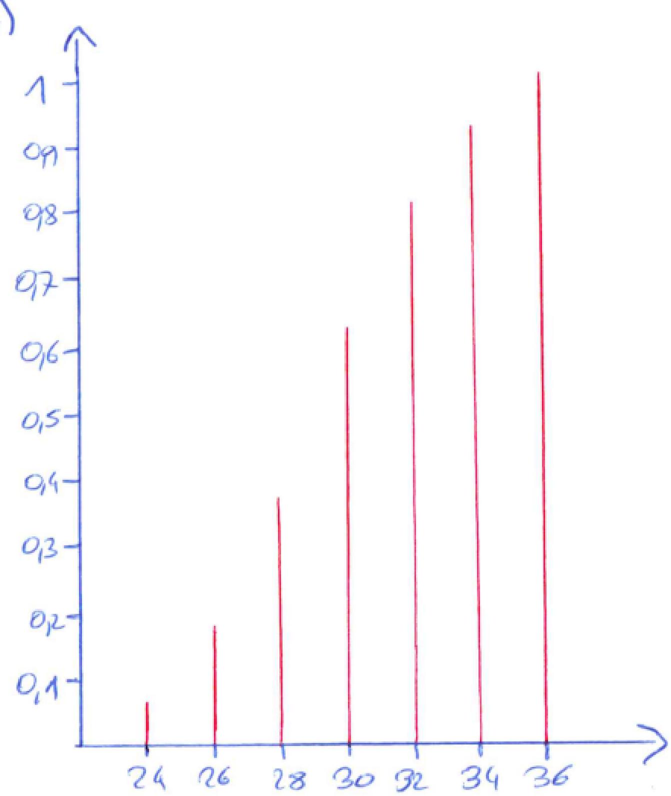
$P(X\geq 35)=\frac{1}{16}=6{,}25\%$

$P(X\leq 10)=0=0\%$

$P(20<X\leq 30)=\frac{10}{16}=62{,}5\%$

c)

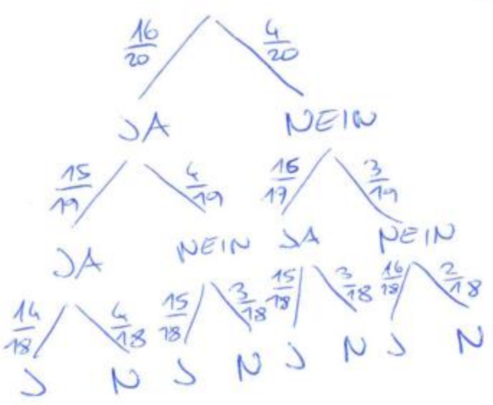
k	$P(X\leq k)$
24	0,0625
26	0,1875
28	0,375
30	0,625
32	0,8125
34	0,9375
36	1



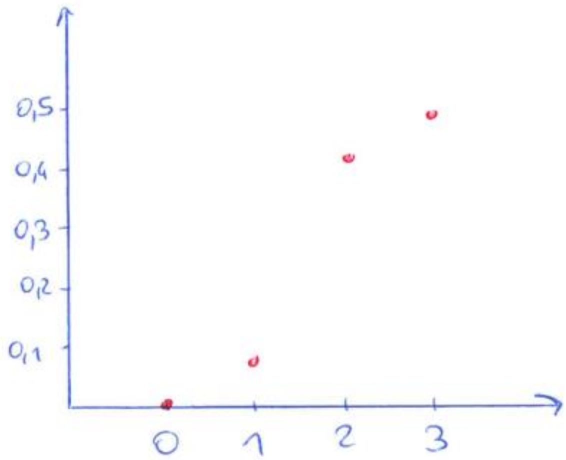
Bsp. 6)

2a) 20: ↗ 4 NEIN, → 16 JA

(10)



k	$P(X=k)$
0	$\frac{4}{20}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{2}{18}=0{,}0035$
1	$3\cdot\frac{16}{20}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{3}{18}\approx 0{,}084$
2	$3\cdot\frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{4}{18}\approx 0{,}421$
3	$\frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18}\approx 0{,}491$



b) $P(X\geq 2)=0{,}912=\underline{\underline{91{,}2\%}}$

Bsp. 7)

2a)

k	$P(X=k)$
1	0,3
2	0,2
3	0,1
4	0,4

(11)

b) • $E(X)=\mu=1\cdot0{,}3+2\cdot0{,}2+3\cdot0{,}1+4\cdot0{,}4$

$=\underline{\underline{2{,}6}}$

• $V(X)=(1-2{,}6)^2\cdot0{,}3+(2-2{,}6)^2\cdot0{,}2+(3-2{,}6)^2\cdot0{,}1+(4-2{,}6)^2\cdot0{,}4$

$=\underline{\underline{1{,}64}}$

• $\sigma=\sqrt{V(X)}\approx\underline{\underline{1{,}28}}$

Bsp. 8)

a. Vervollständige die Tabelle:

Zufallsvariable	Wahrscheinlichkeit
Robin verliert: $X = 0$	$\frac{19}{37}$
Robin gewinnt: $X = 40$	$\frac{18}{37}$

b. Berechne den Erwartungswert der Zufallsvariable X. Interpretiere im gegebenen Sachzusammenhang. $E(X) = 0 \cdot \frac{19}{37} + 40 \cdot \frac{18}{37} = 19{,}46€$

→ Im Durchschnitt verliert Robin 0,54€ pro Spiel.

Bsp. 9)

24a) EINSATZ: 10€

k	P(X=k)
0	0,6
15	0,3
30	0,1

- $E(X) = 0 \cdot 0{,}6 + 15 \cdot 0{,}3 + 30 \cdot 0{,}1 = \underline{7{,}5€}$

NEIN, es ist NICHT ratsam! im Schnitt (bei sehr vielen Versuchen): −2,50 €

- $V(X) = (0-7{,}5)^2 \cdot 0{,}6 + (15-7{,}5)^2 \cdot 0{,}3 + (30-7{,}5)^2 \cdot 0{,}1 =$
  $= \underline{101{,}25}$
- $\sigma = \sqrt{V(X)} \approx \underline{10{,}06}$

b)

k	P(X=k)
0	0,6
1	0,3
120	0,1

- $E(X) = 0 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}3 + 120 \cdot 0{,}1 = \underline{12{,}3€}$

Würde man sehr oft spielen, gewinnt man im Schnitt 2,30 €! Das Risiko ist, dass man bei diesem Rad oft verliert & eventuell nach einigen Fehlversuchen mit einem Verlust aufhört zu spielen.

- $V(X) = (0-12{,}3)^2 \cdot 0{,}6 + (1-12{,}3)^2 \cdot 0{,}3 + (120-12{,}3)^2 \cdot 0{,}1$
  $= 1289{,}01$
- $\sigma = \sqrt{V(X)} \approx 35{,}9$.

Dieses 2. Glücksrad streut deutlich stärker aufgrund der Aufteilung 0€ − 1€ − 120€

Bsp. 10)

10)

k	$P(X=k)$
1	$0{,}5\dot{3}$
2	$0{,}4$
5	$0{,}0\dot{3}$
10	$0{,}0032\dot{6}$
10000	$0{,}0000\dot{6}$

$E(X) = 1\cdot 0{,}5\dot{3} + 2\cdot 0{,}4 + 5\cdot 0{,}0\dot{3} + 10\cdot 0{,}0032\dot{6} + 10000\cdot 0{,}0000\dot{6} = 2{,}20\,€$

⇒ Im Schnitt macht man mit einem Los einen Verlust von 2,80€!

⇒ Bei 15 000 Losen zu je 5€ werden 75 000 €. Davon werden aber nur 12740 € ausbezahlt! Großer Marketing-GAG! NICHT zum Empfehlen.

⇒ Bei 5€ Einsatz verliert man im Schnitt

Bsp. 11)

27) $E(X) = 0\cdot 0{,}5 + 5\cdot 0{,}3 + 15\cdot 0{,}2 = \underline{\underline{4{,}50\,€}}$

- Faires Spiel: Einsatz $= 4{,}50\,€$
- Vorteilhaft für Spieler: Einsatz $< 4{,}50\,€$

Bsp. 12)

3) $3 = 1\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0{,}3 + x\cdot 0{,}5$

$3 = 0{,}2 + 0{,}6 + x\cdot 0{,}5 \quad | -0{,}8$

$2{,}2 = 0{,}5x \quad | : 0{,}5$

$4{,}4 = x$

$\underline{\underline{x = 4{,}4\,€}}$

- Vorteilhaft für den Spieler: $\underline{\underline{x > 4{,}40\,€}}$

Bsp. 13)

a) $\underbrace{2\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}+9\cdot\frac{1}{6}+14\cdot\frac{1}{6}+18\cdot\frac{1}{6}}_{\frac{49}{6}}+x\cdot\frac{1}{6}=15$

$$\frac{49}{6}+\frac{x}{6}=15 \quad |\cdot 6$$

$$49+x=90 \quad |-49$$

$$\underline{\underline{x=41}}$$

b) $Var(X)=(2-15)^2\cdot\frac{1}{6}+(6-15)^2\cdot\frac{1}{6}+(9-15)^2\cdot\frac{1}{6}+(14-15)^2\cdot\frac{1}{6}+$

$+(18-15)^2\cdot\frac{1}{6}+(41-15)^2\cdot\frac{1}{6}=162$

$\sigma=\sqrt{Var(X)}\approx\underline{\underline{12{,}73}}$

Bsp. 14)

a) • $E(X)=1\cdot0{,}13+2\cdot0{,}22+3\cdot0{,}3+4\cdot0{,}09+5\cdot0{,}26=\underline{\underline{3{,}13}}$

• $V(X)=(1-3{,}13)^2\cdot0{,}13+(2-3{,}13)^2\cdot0{,}13+(3-3{,}13)^2\cdot0{,}3+(4-3{,}13)^2\cdot0{,}3+(5-3{,}13)^2\cdot0{,}26$

$=1{,}95 \rightarrow \sigma=\sqrt{V(X)}\approx\underline{\underline{1{,}40}}$

b) $E(X)=1\cdot0{,}13+2\cdot0{,}22+3\cdot0{,}1+4\cdot0{,}09+5\cdot0{,}22+6\cdot0{,}05+7\cdot0{,}19=\underline{\underline{3{,}96}}$

• $V(X)=(1-3{,}96)^2\cdot0{,}13+(2-3{,}96)^2\cdot0{,}22+(3-3{,}96)^2\cdot0{,}1+(4-3{,}96)^2\cdot0{,}09+(5-3{,}96)^2\cdot0{,}22$

$+(6-3{,}96)^2\cdot0{,}05+(7-3{,}96)^2\cdot0{,}19=14{,}53\rightarrow\sigma=\sqrt{V(X)}\approx\underline{\underline{3{,}8}}$