WS3.2/3 Binomialverteilung (inkl. Binomialkoeffizient)

Maturaskript AHS (20 Seiten)

Grundkompetenzen:

- **WS2.4** Binomialkoeffizienten berechnen und interpretieren können
- **WS3.2** Binomialverteilung als Modell einer diskreten Verteilung kennen – Erwartungswert sowie Varianz/Standardabweichung binomialverteilter Zufallsgrößen ermitteln können, Wahrscheinlichkeitsverteilung binomialverteilter Zufallsgrößen angeben können, Arbeiten mit der Binomialverteilung in anwendungsorientierten Bereichen
- **WS 3.3** Situationen erkennen und beschreiben können, in denen mit Binomialverteilung modelliert werden kann

k: Wie oft tritt Erfolg ein?

$n - k$: Wie oft tritt Misserfolg ein?

n: Anzahl der Versuche

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$
Anzahl der Möglichkeiten, dass bei n Versuchen k Mal Erfolg eintritt

Erfolgswahrscheinlichkeit p
Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt Erfolg ein?

$1 - p$:
Wahrscheinlichkeit für Misserfolg

Prof. Tegischer

Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

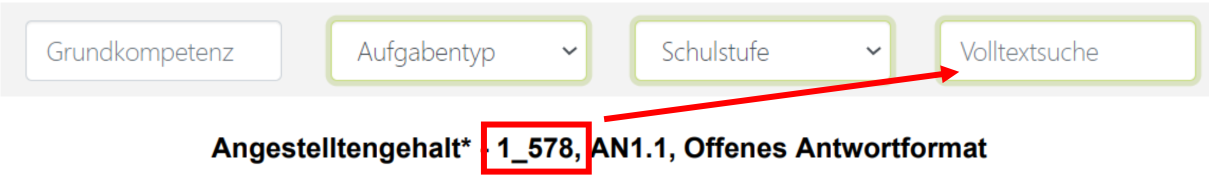
Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=M
2) Gib im Feld „**Volltextsuche**“ die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.



Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. 1_578) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**“ und „**GeoGebra**“ erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**“ erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln	**Weitere Regeln für Lehrpersonen**
▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen. ▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen. ▪ Sie dürfen mein Materialien **NICHT** gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden. ▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden. ▪ Bei einem **Missbrauch** erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.	**WICHTIGSTE REGEL:** LehrerInnen dürfen die Materialien in **Ihrem eigenen Unterricht** verwenden: ▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen. ▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben. ▪ Es ist **nicht erlaubt**, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben. ▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

WS3.2 Binomialverteilung (inkl. Binomialkoeffizient)

1. Der Binomialkoeffizient:

Definition: Aus einer Menge bestehend aus n Elementen werden k Elemente (ohne Wiederholung/Zurücklegen) ausgewählt. Die Anzahl der Möglichkeiten, wie die k Elemente ohne Beachtung der Reihenfolge ausgewählt werden können, berechnet man mit dem **Binomialkoeffizienten**:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Video 1/4

- **Sprechweise**: n über k
- Der Binomialkoeffizient ist kein Vektor, sondern eine reelle Zahl (-> Rechnung)
- Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus n Elementen k Elemente auszuwählen, wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt.

Beispiel 1

Im Zeichenunterricht sollen die Kinder aus ihrem Malkasten (10 Farben) vier verschiedene Farben für ihre nächste Zeichnung aussuchen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, vier verschiedene Farben aus 10 möglichen zu wählen?

- **ohne Wiederholung**: die Farben müssen verschieden sein und dürfen nicht doppelt gewählt.
- **ohne Reihenfolge**: es spielt keine Rolle, welche die erste Farbe der Kinder ist, an die sie denken. Sie sollen gesamt vier Farben auswählen.

➔ aufgrund dessen: Lösen mit dem Binomialkoeffizienten. Aus 10 möglichen Farben sollen vier gewählt werden:

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{(10-4)! \cdot 4!} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5040}{24} = 210\ Möglichkeiten$$

Rechenregeln für den Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{n} = 1 \quad \rightarrow \quad \binom{10}{10} = 1$$

$$\binom{n}{1} = 1 \quad \rightarrow \quad \binom{8}{1} = 8$$

$$\binom{n}{n-1} = n \quad \rightarrow \quad \binom{7}{7-1} = 7$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \rightarrow \quad \binom{10}{3} = \binom{10}{7}$$

Bsp. 1) Berechne den Binomialkoeffizienten.

a. $\binom{4}{2} =$	b. $\binom{7}{2} =$	c. $\binom{8}{8} =$
d. $\binom{14}{9} =$	e. $\binom{14}{10} =$	f. $\binom{23}{20} =$

Bsp. 2) Für eine Veranstaltung haben sich 12 Personen für einen Posten im Organisationsteam gemeldet.

a. Unter diesen Personen soll ein fünfköpfiges Team gewählt werden, welches den Ticket-Verkauf organisiert. Auf wie viele unterschiedlichen Möglichkeiten kann das Team bestimmt werden?

b. Aus den verbleibenden sieben Personen sollen sich drei für das Sicherheits-Team melden, die die Veranstaltung sicherheitstechnisch absichern und abwickeln. Wie viele Möglichkeiten ergeben sich für die Bildung dieses Teams?

Bsp. 3) Ein Eishockeytrainer besitzt einen Spielerkader von 13 fitten Spielern.

a. Für ein Hobby-Spiel möchte er sechs Spieler zufällig auswählen. Wie viele Möglichkeiten hat der Trainer, die Spieler aus der Startelf zu bestimmen?

b. Das Spiel endet nach 60 Minuten inkl. Overtime 8:8 und wird mit dem Penalty-Schießen entschieden. Drei Penalty-Schützen treten an. In jeder Mannschaft sind sechs Spieler. Wie viele Optionen hat der Trainer, die drei Schützen zu bestimmen?

Bsp. 4) In einem Trainingscamp für den olympischen Zweier-Bob-Bewerb nehmen acht potenzielle Kandidaten teil. Auf wie viele unterschiedliche Arten kann das Bob-Team zusammengestellt werden?

Bsp. 5) In einer Hip-Hop Tanzgruppe nehmen 16 begeisterte Tänzerinnen und Tänzer teil. Für den nächsten Auftritt werden k Personen $(k \leq n)$ ausgewählt.

Berechne (falls möglich) und interpretiere die Binomialkoeffizienten im gegebenen Kontext:

a. $\binom{16}{10} =$	b. $\binom{16}{4} =$

Bsp. 6) Bei einer Frauen-Handballmannschaft stehen dem Trainer 14 aktive Spielerinnen für 6 Positionen zur Verfügung. Interpretiere den Ausdruck $\binom{14}{6}$ im gegebenen Kontext.

Anzahl an Möglichkeiten* - 1_659, WS2.4, Halboffenes Antwortformat

Eine Mannschaft besteht aus n Spielerinnen. Aus diesen wählt die Trainerin an einem Tag sechs Spielerinnen, an einem anderen Tag acht Spielerinnen aus, wobei es auf die Reihenfolge der Auswahl der Spielerinnen jeweils nicht ankommt. In beiden Fällen ist die Anzahl der Möglichkeiten, die Auswahl zu treffen, gleich groß.
Geben Sie n (die Anzahl der Spielerinnen dieser Mannschaft) an!

$n =$ ______________________________

Auswahlmöglichkeiten* - 1_875, WS2.4, Halboffenes Antwortformat

Bei einem bestimmten Preisausschreiben kann man Jahrestickets für den Zoo gewinnen.
Bei diesem Preisausschreiben haben 1 000 Personen jeweils 1-mal teilgenommen.
Als Gewinner/innen werden 2 Personen nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

Geben Sie die Anzahl der Möglichkeiten an, diese 2 Personen aus den 1 000 Teilnehmerinnen und Teilnehmern nach dem Zufallsprinzip auszuwählen.

Die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten beträgt: ______________________________

Binomialkoeffizient* - 1_803, WS2.4, Lückentext

Eine Gruppe besteht aus 12 Schülerinnen.

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Der Binomialkoeffizient $\binom{12}{2}$ hat den Wert ______①______; er kann dazu verwendet werden, die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, ______②______, zu berechnen.

①	
24	☐
66	☐
144	☐

②	
2 Schülerinnen dieser Gruppe auszuwählen, die gemeinsam ein Referat halten sollen	☐
2 Schülerinnen dieser Gruppe 2 unterschiedliche Preise zu verleihen	☐
die Schülerinnen in 2 Gruppen zu je 6 Schülerinnen einzuteilen	☐

Elfmeterschießen* - 1_400, WS2.4, Offenes Antwortformat

In einer Fußballmannschaft stehen elf Spieler als Elfmeterschützen zur Verfügung.

Deuten Sie den Ausdruck $\binom{11}{5}$ im gegebenen Kontext!

Sportwettbewerb* - 1_1200, WS2.4, Offenes Antwortformat

An einem Sportwettbewerb nehmen 20 Personen teil. Diese werden in Gruppen eingeteilt.

Interpretieren Sie $\binom{20}{4} = 4\,845$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Binomialkoeffizient* - 1_352, WS2.4, 2 aus 5

Betrachtet wird der Binomialkoeffizient $\binom{6}{2}$.

Kreuzen Sie die beiden Aufgabenstellungen an, die mit der Rechnung $\binom{6}{2} = 15$ gelöst werden können!

Gegeben sind sechs verschiedene Punkte einer Ebene, von denen nie mehr als zwei auf einer Geraden liegen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei Punkte auszuwählen, um jeweils eine Gerade durchzulegen?	☐
An einem Wettrennen nehmen sechs Personen teil. Wie viele Möglichkeiten gibt es für den Zieleinlauf, wenn nur die ersten beiden Plätze relevant sind?	☐
Von sechs Kugeln sind vier rot und zwei blau. Sie unterscheiden sich nur durch ihre Farbe. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln in einer Reihe anzuordnen?	☐
Sechs Mädchen einer Schulklasse kandidieren für das Amt der Klassensprecherin. Die Siegerin der Wahl soll Klassensprecherin werden, die Zweitplatzierte deren Stellvertreterin. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Vergabe der beiden Ämter?	☐
Wie viele sechsstellige Zahlen können aus den Ziffern 6 und 2 gebildet werden?	☐

Jugendgruppe* - 1_545, WS2.4, Lückentext

Eine Jugendgruppe besteht aus 21 Jugendlichen. Für ein Spiel sollen Teams gebildet werden.
Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Der Binomialkoeffizient $\binom{21}{3}$ gibt an, _____①_____; sein Wert beträgt _____②_____.

①	
wie viele der 21 Jugendlichen in einem Team sind, wenn man drei gleich große Teams bildet	☐
wie viele verschiedene Möglichkeiten es gibt, aus den 21 Jugendlichen ein Dreierteam auszuwählen	☐
auf wie viele Arten drei unterschiedliche Aufgaben auf drei Mitglieder der Jugendgruppe aufgeteilt werden können	☐

②	
7	☐
1 330	☐
7 980	☐

2. Bernoulli-Experiment und Binomialverteilung

Man spricht bei einem Zufallsversuch von einem **Bernoulli-Experiment**, wenn folgende Bedingungen gelten:

- Es dürfen **nur zwei Ereignisse** auftreten – meist: Erfolg & Misserfolg
  Die Wahrscheinlichkeit für **Erfolg** wird mit der **Erfolgswahrscheinlichkeit** $\boldsymbol{p}$ bezeichnet, für **Misserfolg** mit $\mathbf{1-p}$ (Gegenwahrscheinlichkeit).

Führt man das Bernoulli-Experiment n-mal aus, so spricht man von einem **n-stufigen Bernoulli-Experiment**.
Die Bedingungen bleiben dieselben:

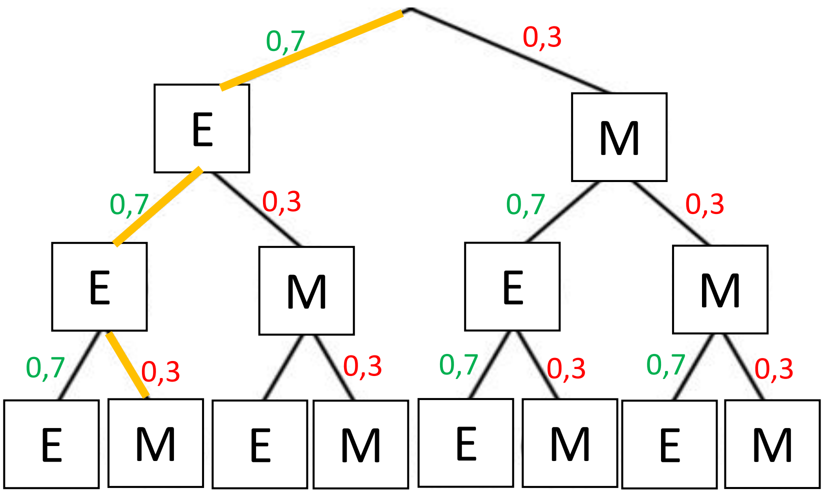
- Jeder Einzelversuch besitzt **genau zwei Versuchsausgänge**: Erfolg & Misserfolg.
- Jeder Einzelversuch wird unter **denselben Bedingungen** ausgeführt.
  Die Wahrscheinlichkeiten p & 1-p bleiben gleich.

Beispiel: Beim Tischtennis spielen Robin und Sarah gegeneinander. Aus Erfahrung weiß man, dass Sarah die bessere Spielerin ist. Sie gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 % einen Satz.

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Satzgewinne von Sarah. Sarah und Robin spielen drei Mal gegeneinander.

- Mit der Erfolgswahrscheinlichkeit von $p = 0{,}7$ gewinnt Sarah einen Satz.
- Mit der Wahrscheinlichkeit von $1 - p = 0{,}3$ gewinnt Robin einen Satz.

Wir veranschaulichen das dreistufige Bernoulli-Experiment mit Hilfe eines Baumdiagramms. Die Ereignisse sind dabei Erfolg E (Satzgewinn Sarah) und Misserfolg M (Satzgewinn Robin).

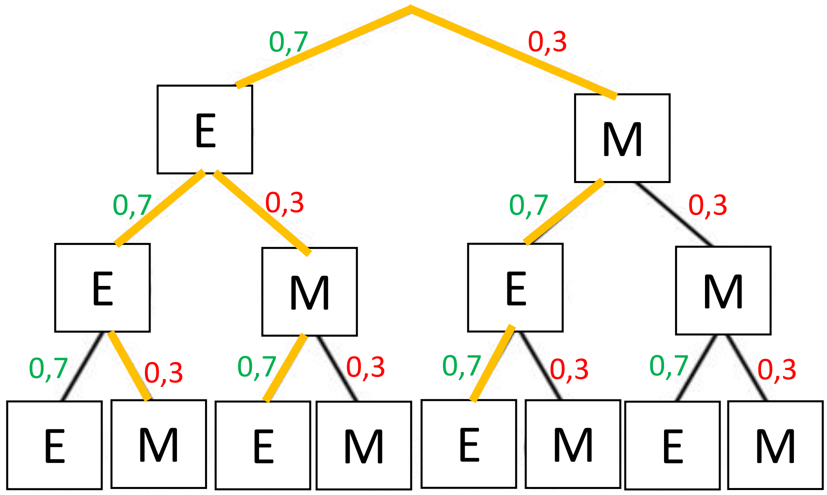


Fragestellung 1: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sarah die ersten beiden Sätze gewinnt und den dritten Satz verliert? – Anwendung Produktregel vom Baumdiagramm

$$P(erste\ 2\ Sätze\ gewinnen, 3.\,Satz\ verliert) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}147 = 14{,}7\ \%$$

Fragestellung 2: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sarah zwei Sätze gewinnt?

Anwendung Produkt- und Summenregeln vom Baumdiagramm:



<u>Erinnerung:</u> Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gewonnen Sätze von Sarah an.

$$P(X=2) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = \mathbf{3} \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = \binom{3}{2} \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}441 = 44{,}1\ \%$$

Was fällt uns auf?

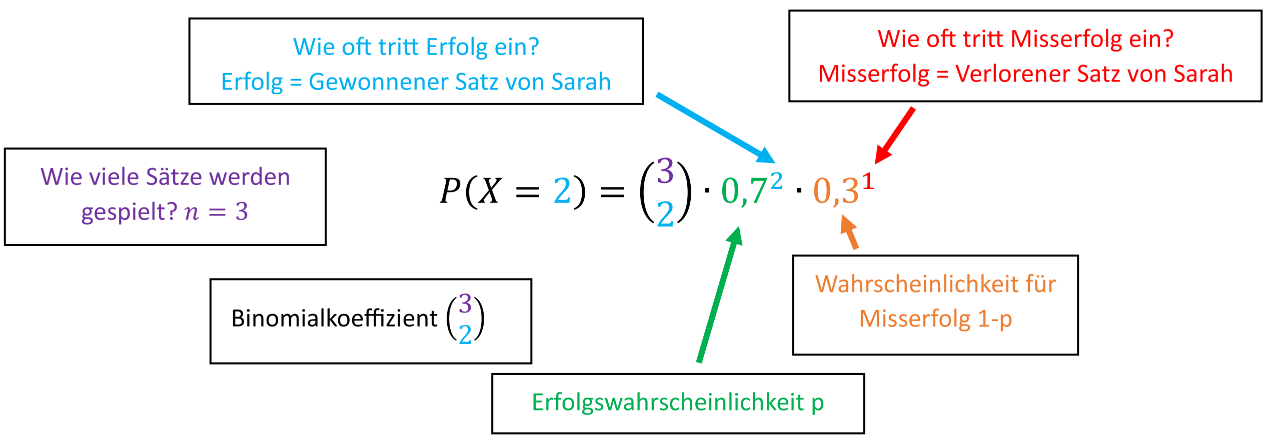
Die Wahrscheinlichkeit, mit der Sarah zwei Sätze und Robin einen Satz gewinnt ist stets $0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3$.

Es ist Sarah aber **frei** gelassen, **in welcher Reihenfolge** sie die **zwei Sätze** gewinnt. Sie muss aus drei Sätzen zwei Sätze gewinnen. Wie viele Möglichkeiten hat sie dazu?

- Sieg / Sieg / Niederlage
- Sieg / Niederlage / Sieg
- Niederlage / Sieg / Sieg

$\boxed{\binom{3}{2} = 3 \text{ Möglichkeiten}}$

Der Binomialkoeffizient $\binom{3}{2}$ gibt an, auf wie viele verschiedene Möglichkeiten Sarah von drei Sätzen zwei gewinnen kann. Zur Berechnung verwendet man folgende Formel:



Binomialverteilung:
Wird ein Bernoulli-Experiment n-mal mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p durchgeführt und gibt die diskrete Zufallsvariable X die Anzahl der Versuche an, bei denen das Ereignis E mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p eintritt, so gilt für die Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$:

$$f(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad mit\ 0 \leq p \leq 1\ und\ k = 0{,}1{,}2, \dots, n$$

- Die **diskrete Zufallsvariable X** heißt **binomialverteilt**.
- Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung f** wird als **Binomialverteilung** $B(n, p)$ mit den Parametern n und p bezeichnet.
- Die **Variable n** gibt die **Anzahl** der **Versuche** an.
- Es gibt zwei mögliche Ausgänge: Erfolg - Misserfolg
- Die **Erfolgswahrscheinlichkeit p** gibt die **Wahrscheinlichkeit** an, mit der das gewünschte Ereignis (= **Erfolg**) eintritt.

Bemerkungen zur Formel:

k: Wie oft tritt Erfolg ein?

$n-k$: Wie oft tritt Misserfolg ein?

n: Anzahl der Versuche

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$
Anzahl der Möglichkeiten, dass bei n Versuchen k Mal Erfolg eintritt

Erfolgswahrscheinlichkeit p
Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt Erfolg ein?

$1-p$:
Wahrscheinlichkeit für Misserfolg

Die Formel der Binomialverteilung schaut auf den ersten Blick deutlich komplizierter aus, als die Thematik dahinter ist. Betrachten wir dazu noch einmal das Musterbeispiel mit folgender Fragestellung:

Sarah und Robin spielen 10 Sätze. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Sarah **sieben Sätze**?

- Anzahl Sätze $n = 10$
- Wie tritt Erfolg ein: $k = 7$
- Wahrscheinlichkeit für Erfolg:$p = 0{,}7$
- Wie oft tritt Misserfolg ein: $n - k = 3$
- Wahrscheinlichkeit für Misserfolg: $1 - p = 0{,}3$
- Anzahl der Möglichkeiten, von 10 Sätzen 7 zu gewinnen: $\binom{10}{7}$

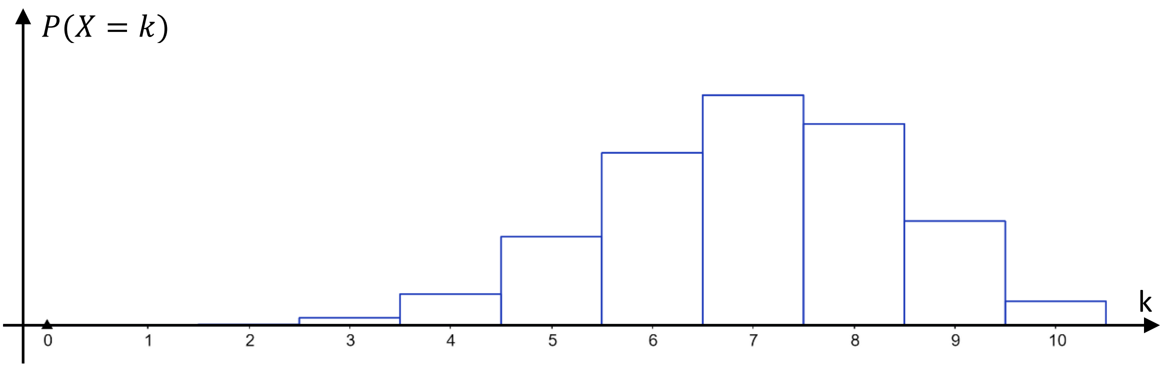
$$P(X = 7) = \binom{10}{7} \cdot 0{,}7^7 \cdot 0{,}3^3 = 0{,}2668 \approx 26{,}7\ \%$$

Interpretiere folgenden Ausdruck im **Sachzusammenhang**: $\binom{9}{2} \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^7$

Der Ausdruck gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass Sarah bei neun gespielten Sätzen gerade einmal zwei gewinnt.

Graphische Darstellung der **Wahrscheinlichkeitsverteilung** mit $n = 10$ und $p = 0{,}7$:

k	$P(X = k)$
0	0,0000059
1	0,00014
2	0,0014
3	0,009
4	0,037
5	0,103
6	0,200
7	0,267
8	0,233
9	0,121
10	0,028



WICHTIG: Die Erfolgswahrscheinlichkeit p gibt die Wahrscheinlichkeit für Erfolg bei einem Einzelversuch an!

Bsp. 7) In einer Urne sind 40 Kugeln enthalten. 30 Kugeln sind mit der Aufschrift „du gewinnst leider nichts“ beschriftet. Die restlichen Kugeln sind mit der Aufschrift „du gewinnst 100 €“ beschriftet.

Es wird sieben Mal mit Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Kugeln an, mit denen die Person 100 € gewonnen hat.

a. Ist die Zufallsvariable X binomialverteilt? Begründe.

b. Gib die Parameter p und n an. Stelle die Binomialverteilung auf.

c. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person 200 € gewinnt?

d. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person mindestens 600 € gewinnt?

e. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person maximal drei Kugeln zieht, mit denen sie gewinnt?

f. Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X als Tabelle und graphisch dar.

Bsp. 8) Beim Tennisspielen gewinnt Markus erfahrungsgemäß zu 80 % einen Satz gegen Paul. Markus und Paul spielen an diesem Tag am Vormittag vier Sätze und am Nachmittag weitere drei.

Video 2/4

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gewonnenen Sätze von Paul an diesem Tag an.

a. Ist die Zufallsvariable X binomialverteilt? Begründe.

b. Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung als Tabelle und graphisch als Diagramm dar.

c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Paul maximal drei Sätze gewinnt.

d. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Paul mindestens fünf Sätze gewinnt.

e. Am nächsten Tag sind sie etwas müde und spielen weniger Sätze. Interpretiere den Ausdruck im gegebenen Kontext:

$$\binom{5}{3} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 + \binom{5}{4} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^1 + 0{,}8^5$$

SCAN MICH

Bsp. 9) Bei einer Produktion von Spielkonsolen ist ein Gerät erfahrungsgemäß zu einem Prozent defekt. Es werden 200 Konsolen auf ihre Funktionalität überprüft. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl geprüften Geräte, die fehlerhaft sind.

a. Ist die Zufallsvariable X binomialverteilt?

b. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass maximal drei Geräte defekt sind.

c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Überprüfung kein Gerät defekt ist.

Bsp. 10) Beim Biathlon trifft ein Biathlet beim Liegend-Schießen mit 95 %-iger Wahrscheinlichkeit, sowie beim Stehend-Schießen mit 80%-iger Wahrscheinlichkeit die Zielscheibe.

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer an.

a. Im Sprint-Bewerb muss der Sportler fünf Schüsse liegend abgeben. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Sportler genau vier Mal die Scheibe trifft.

b. Im Einzel-Bewerb über 20 Kilometer werden 10 Schüsse stehend abgegeben. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Biathlet (i) genau sieben, (ii) maximal drei, (iii) mindestens acht Scheiben trifft.

c. An einem Trainingstag legt der Biathlet eine Schusserie von 40 Schüssen in liegender Position hin. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Biathlet mindestens 38 Treffer erzielt.

d. Am selben Trainingstag legt der Sportler noch eine Stehend-Serie hin. Interpretiere den Ausdruck im gegebenen Kontext:

$$\binom{20}{19} \cdot 0{,}8^{19} \cdot 0{,}2^{1} + \binom{20}{20} \cdot 0{,}8^{20} \cdot 0{,}2^{0}$$

Bsp. 11) Kreuze die beiden äquivalente Terme zum Term $\binom{10}{3} \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^7$ an.

$\binom{10}{3} \cdot 0{,}6^3 \cdot (1-0{,}4)^7$	O
$\binom{10}{7} \cdot 0{,}6^3 \cdot (1-0{,}6)^7$	O
$720 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^{10-3}$	O
$120 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^7$	O
$120 \cdot 0{,}6^7 \cdot 0{,}4^3$	O

Bsp. 12) Ein Fußballspieler verwertet erfahrungsgemäß zu 90 % einen Elfmeter. Im Training tritt er sieben Mal nacheinander gegen den Torhüter an. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer des Schützen an.

a. Welche Werte kann die Zufallsvariable X annehmen? Ist die Zufallsvariable X binomialverteilt? Begründe.

b. Stelle die Tabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung auf.

c. Lies die Wahrscheinlichkeit aus der Tabelle ab, dass der Spieler genau vier Elfmeter verwertet.

d. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Schütze mindestens fünf Elfmeter verwertet.

e. Interpretiere den Ausdruck im gegebenen Kontext:

$$0{,}1^7 + 7 \cdot 0{,}9^1 \cdot 0{,}1^6$$

Video 3/4

Musterbeispiel:

Ein Basketballspieler verwertet einen Wurf von der Mittellinie mit einer Wahrscheinlichkeit von 24%. **Wie oft müsste der Basketballer werfen, dass er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens einmal von der Mittellinie trifft?**

Gesucht: Mindestens ein Treffer mit der Wahrscheinlichkeit von 90 %

➔ Gegenwahrscheinlichkeit zu mindestens ein Treffer = Kein Treffer

Wahrscheinlichkeit für keinen Treffer: $0{,}76 \cdot 0{,}76 \cdot \ldots \cdot 0{,}76 = 0{,}76^n$ (bei n Würfen)

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Schütze mindestens einmal trifft, wird über die Gegenwahrscheinlichkeit ausgedrückt:

$$P(\text{mindestens 1 Treffer}) = 1 - 0{,}76^n \quad \geq 0{,}9$$

Diese Wahrscheinlichkeit soll größer als 90 % sein. Es muss folgende Ungleichung gelöst werden:

$$1 - 0{,}76^n \geq 0{,}9 \quad | + 0{,}76^n, -0{,}9$$

$$0{,}1 \geq 0{,}76^n \quad | \, ln$$

$$\ln(0{,}01) \geq n \cdot \ln(0{,}76) \quad | : \ln(0{,}76)$$

Bemerkung: $\ln(0{,}76) = -0{,}27$ → dividiert man bei einer Ungleichung durch eine negative Zahl, so **ändert** sich das **Ungleichheitszeichen**:

$$\frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}76)} \leq n$$

$$16{,}78 \leq n$$

$$n \geq 16{,}78$$

Antwort: Der Basketballspieler muss mindestens 17 Mal Werfen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens einmal den Korb trifft.

Bsp. 13) Ein Würfel (1-6) wird 18-mal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der geworfenen Dreier an.

a. Ist die Zufallsvariable X binomialverteilt? Begründe.

b. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass genau vier Mal ein Dreier gewürfelt wird.

c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 10-mal ein Dreier gewürfelt wird.

d. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass maximal zwei Mal ein Dreier gewürfelt wird.

e. Wie oft müsste man würfeln, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 97 % mindestens ein Mal einen Dreier würfelt?

Bsp. 14) Zwei Würfel (1-6) werden gleichzeitig 10-mal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Würfe an, bei der die Summe der Augenzahlen der beiden Würfel sieben ergibt.

a. Ist die Zufallsvariable X binomialverteilt? Begründe.

b. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass genau drei Mal die Summe der beiden Augenzahlen sieben ergibt.

c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass maximal zwei Mal die Summe der beiden Augenzahlen sieben ergibt.

d. Wie oft müsste man würfeln, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens einmal die Summe der Augenzahlen der Würfel von sieben würfelt?

Bsp. 15) Bei einem Test bekommt man eine positive Note, wenn man mindestens 60 % der Fragen richtig beantwortet. Zum Test kommen 20 Multiple-Choice Fragen zu je vier Antwortmöglichkeiten. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der richtig beantworteten Fragen an.

a. Lars kreuzt nach dem Zufallsprinzip an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er eine positive Note erhält?

b. Für ein „Sehr Gut" müssen mindestens 90 % richtig beantwortet werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dies mit einem zufälligen Ankreuzen gelingt?

Bsp. 16) Ein Jäger schießt zur Übung leere Cola-Dosen. Diese trifft er aus 100 Meter Entfernung mit einer Wahrscheinlichkeit von 54 %.

a. Wie oft müsste der Jäger schießen, dass er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 97 % mindestens einmal die Cola-Dose trifft.

b. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Treffer einer Cola-Dose. Der Jäger schießt 24-mal aus dieser Entfernung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er zwischen 7 und 10 Treffer landet?

Massenproduktion* - 1_636, WS3.2, Offenes Antwortformat

Bei der Massenproduktion eines bestimmten Produkts werden Packungen zu 100 Stück erzeugt. In einer solchen Packung ist jedes einzelne Stück (unabhängig von den anderen) mit einer Wahrscheinlichkeit von 6 % mangelhaft.
Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit in dieser Packung höchstens zwei mangelhafte Stücke zu finden sind!

Binomialverteilung* - 1_660, WS3.2, Zuordnungsformat

Der relative Anteil der österreichischen Bevölkerung mit der Blutgruppe „AB Rhesusfaktor negativ" (AB–) ist bekannt und wird mit p bezeichnet.
In einer Zufallsstichprobe von 100 Personen soll ermittelt werden, wie viele dieser zufällig ausgewählten Personen die genannte Blutgruppe haben.

Ordnen Sie den vier angeführten Ereignissen jeweils denjenigen Term (aus A bis F) zu, der die diesem Ereignis entsprechende Wahrscheinlichkeit angibt!

Genau eine Person hat die Blutgruppe AB–.	
Mindestens eine Person hat die Blutgruppe AB–.	
Höchstens eine Person hat die Blutgruppe AB–.	
Keine Person hat die Blutgruppe AB–.	

A	$1 - p^{100}$
B	$p \cdot (1-p)^{99}$
C	$1 - (1-p)^{100}$
D	$(1-p)^{100}$
E	$p \cdot (1-p)^{99} \cdot 100$
F	$(1-p)^{100} + p \cdot (1-p)^{99} \cdot 100$

Multiple-Choice-Antwort* - 1_326, WS3.2, Offenes Antwortformat

Bei einer schriftlichen Prüfung werden der Kandidatin / dem Kandidaten fünf Fragen mit je vier Antwortmöglichkeiten vorgelegt. Genau eine der Antworten ist jeweils richtig.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Kandidatin / der Kandidat bei zufälligem Ankreuzen mindestens viermal die richtige Antwort kennzeichnet!

Rauchverhalten* - 1_852, WS3.2, Offenes Antwortformat

Laut einer Studie wollen 34 % aller Raucher/innen mit dem Rauchen aufhören.

Interpretieren Sie den nachstehenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang.

$$\binom{200}{57} \cdot 0{,}34^{57} \cdot 0{,}66^{143}$$

Reifen* - 1_588, WS3.2, Offenes Antwortformat

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein neuer Autoreifen einer bestimmten Marke innerhalb der ersten 10 000 Kilometer Fahrt durch einen Materialfehler defekt wird, liegt bei p %.

Eine Zufallsstichprobe von 80 neuen Reifen dieser Marke wird getestet.
Geben Sie einen Ausdruck an, mit dem man die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer dieser Reifen innerhalb der ersten 10 000 Kilometer Fahrt durch einen Materialfehler defekt wird, berechnen kann!

Tennisspiel* - 1_398, WS3.2, Offenes Antwortformat

Stefan und Helmut spielen im Training 5 Sätze Tennis. Stefan hat eine konstante Gewinnwahrscheinlichkeit von 60 % für jeden gespielten Satz.
Es wird folgender Wert berechnet:

$$\binom{5}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}2304$$

Geben Sie an, was dieser Wert im Zusammenhang mit der Angabe aussagt!

Trefferwahrscheinlichkeit* - 1_708, WS3.2, Zuordnungsformat

Bei einem Training wirft eine Basketballspielerin einen Ball sechsmal hintereinander zum Korb. Fällt der Ball in den Korb, spricht man von einem Treffer. Die Trefferwahrscheinlichkeit dieser Spielerin beträgt bei jedem Wurf 0,85 (unabhängig von den anderen Würfen).

Ordnen Sie den vier Ereignissen jeweils denjenigen Term (aus A bis F) zu, der die Wahrscheinlichkeit des Eintretens dieses Ereignisses beschreibt!

Die Spielerin trifft genau einmal.	
Die Spielerin trifft höchstens einmal.	
Die Spielerin trifft mindestens einmal.	
Die Spielerin trifft genau zweimal.	

A	$1 - 0{,}85^6$
B	$0{,}15^6 + \binom{6}{1} \cdot 0{,}85^1 \cdot 0{,}15^5$
C	$1 - 0{,}15^6$
D	$0{,}85^6 + \binom{6}{1} \cdot 0{,}85^5 \cdot 0{,}15^1$
E	$6 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}15^5$
F	$\binom{6}{2} \cdot 0{,}85^2 \cdot 0{,}15^4$

Verschiedenfärbige Kugeln* - 1_471, WS3.2, 1 aus 6

Auf einem Tisch steht eine Schachtel mit drei roten und zwölf schwarzen Kugeln. Nach dem Zufallsprinzip werden nacheinander drei Kugeln aus der Schachtel gezogen, wobei die gezogene Kugel jeweils wieder zurückgelegt wird.
Gegeben ist der folgende Ausdruck:

$3 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2$

Kreuzen Sie dasjenige Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit durch diesen Ausdruck berechnet wird!

Es wird höchstens eine schwarze Kugel gezogen.	☐
Es werden genau zwei schwarze Kugeln gezogen.	☐
Es werden zwei rote Kugeln und eine schwarze Kugel gezogen.	☐
Es werden nur rote Kugeln gezogen.	☐
Es wird mindestens eine rote Kugel gezogen.	☐
Es wird keine rote Kugel gezogen.	☐

Wurf einer Münze* - 1_804, WS3.2, Offenes Antwortformat

Eine Münze zeigt nach einem Wurf entweder *Kopf* oder *Zahl*. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze *Kopf* zeigt, ist bei jedem Wurf genauso hoch wie die Wahrscheinlichkeit, dass sie *Zahl* zeigt. Die Ergebnisse der Würfe sind voneinander unabhängig. Die Münze wird 20-mal geworfen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei diesen 20 Würfen die Münze genau 12-mal *Kopf* zeigt.

Zimmerbuchung* - 1_780, WS3.2, Offenes Antwortformat

Ein Hotelmanager geht aufgrund langjähriger Erfahrung davon aus, dass jede Zimmerbuchung, die unabhängig von anderen Zimmerbuchungen erfolgte, mit 10%iger Wahrscheinlichkeit storniert wird. Er nimmt für einen bestimmten Termin 40 voneinander unabhängige Zimmerbuchungen an.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an diesem Termin von den 40 Zimmerbuchungen höchstens 5 % storniert werden.

Würfeln* - 1_374, WS3.2, 2 aus 5

Ein fairer Würfel wird zehnmal geworfen.

Kreuzen Sie die beiden Wahrscheinlichkeiten an, die durch
$1 - \left[\binom{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^9 \cdot \frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^{10}\right]$ angegeben werden können.

Wahrscheinlichkeit, höchstens acht Sechser zu werfen	☐
Wahrscheinlichkeit, mehr als zweimal keinen Sechser zu werfen	☐
Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal keinen Sechser zu werfen	☐
Wahrscheinlichkeit, weniger als neun Sechser zu werfen	☐
Wahrscheinlichkeit, mehr als acht Sechser zu werfen	☐

Aufnahmetest (b) - 2_002, WS3.2, Offenes Antwortformat

Bei einem Aufnahmetest werden 10 Multiple-Choice-Fragen gestellt. Für jede Frage sind 4 Antwortmöglichkeiten angegeben, wobei nur eine davon richtig ist.
Kandidat K nimmt an diesem Aufnahmetest teil. Er kreuzt alle Antworten zufällig und unabhängig voneinander an.

b) Beantwortet man mindestens 7 Fragen richtig, so gilt der Aufnahmetest als bestanden. Beantwortet man alle 10 Fragen richtig, so erhält man zusätzlich ein Leistungsstipendium.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Kandidat K nicht aufgenommen wird.

2) Interpretieren Sie die Wahrscheinlichkeit $0{,}25^{10}$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Sicherheitskontrolle* (b) - 2_096, WS3.2, Offenes Antwortformat

Beim Einlass in ein bestimmtes Stadion findet bei einer Veranstaltung eine maximal dreistufige Sicherheitskontrolle bei Personen statt, um mitgeführte Gegenstände zu kontrollieren und unzulässige Gegenstände zu erfassen. Liefert die erste Stufe dieser Sicherheitskontrolle kein eindeutiges Ergebnis, dann wird die zweite Stufe der Sicherheitskontrolle durchgeführt. Liegt dann noch immer kein eindeutiges Ergebnis vor, kommt die dritte Stufe der Sicherheitskontrolle zum Einsatz.

Die erste und die zweite Stufe der Sicherheitskontrolle dauern jeweils 15 s, die dritte Stufe dauert 300 s. Ein eindeutiges Ergebnis liefert dabei die erste Stufe mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 %, die zweite Stufe mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 %.

b) Der Wert p gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Person einen unzulässigen Gegenstand mit sich führt. Die Wahrscheinlichkeit, dass von 2 zufällig und unabhängig voneinander ausgewählten Personen beide einen unzulässigen Gegenstand mit sich führen, beträgt 10 %.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p.

2) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 10 zufällig und unabhängig voneinander ausgewählten Personen mindestens 5 Personen einen unzulässigen Gegenstand mit sich führen.

3. Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsvariable

Video 4/4

Sei X eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern n und p. Wir definieren:

- **Erwartungswert** von X: $E(X) = \mu = n \cdot p$
- **Varianz** von X: $V(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$
- **Standardabweichung** von X: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

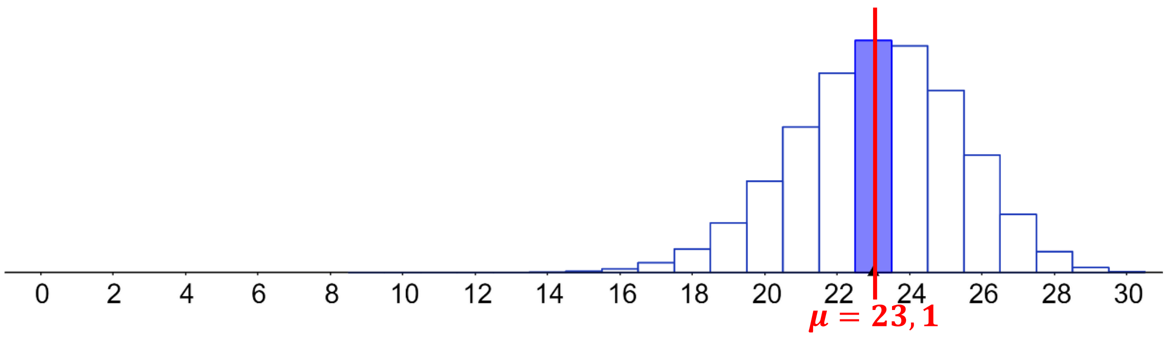
Musterbeispiel:
Ein Handballspieler verwertet zu 77 % einen 7-Meter-Wurf. An einem Trainingstag tritt der Handballspieler 30-mal zum 7-Meter-Wurf an. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer an.

Aufgabe: Berechne den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung. Interpretiere die Werte im gegebenen Kontext.

- 30 Würfe $\rightarrow n = 30$
- Erfolgswahrscheinlichkeit für einen Treffer ist 77 % $\rightarrow p = 0{,}77$

Erwartungswert $E(X) = n \cdot p = 30 \cdot 0{,}77 = 23{,}1$

Interpretation: Wiederholt der Handballspieler sehr oft dieses Training (30 7-Meter-Würfe), so wird er durchschnittlich ca. 23 Treffer erzielen.



Varianz $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 30 \cdot 0{,}77 \cdot 0{,}23 = 5{,}313$

Interpretation: Wiederholt der Handballspieler sehr oft dieses Training (30 7-Meter-Würfe), so strebt die empirische Varianz der Datenreihe gegen die Varianz $V(X) = 5{,}3$.

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{5{,}313} \approx 2{,}3$

$$[\mu - \sigma; \mu + \sigma] = [20{,}8; 25{,}4]$$

Interpretation 1: Wiederholt der Handballspieler sehr oft dieses Training (30 7-Meter-Würfe), so wird er oft 21 bis 25 Treffer erzielen.

$$[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma] = [18{,}5; 27{,}7]$$

Interpretation 2: Führt der Handballer sehr oft dieses Training aus (30 7-Meter-Würfe), so wird er selten maximal 18 bzw. mindestens 28 Treffer erzielen. Bei den meisten Durchgängen wird er eine Trefferanzahl zwischen 19 und 27 erzielen.

Bsp. 17) Bei einem Produkt sind erfahrungsgemäß 13 % in einem defekten Zustand. 12 Geräte werden überprüft. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der defekten Geräte bei der Überprüfung an.

a. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass genau drei Geräte defekt sind.
b. Bestimme den Erwartungswert. Interpretiere den Wert im gegebenen Kontext.
c. Bestimme die Varianz und Standardabweichung.
d. Wie viele Geräte müsste man überprüfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens ein defektes Gerät zu enthalten?
e. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte für X innerhalb des Intervalls $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegen.

Bsp. 18) Beim Elfmeterschießen hält ein Torwart mit einer Wahrscheinlichkeit von 55 % einen Elfmeter. Alle 17 Kaderspieler treten zum Elfmeter an (Wahrscheinlichkeit ist bei jedem Schützen gleich). Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der gehaltenen Elfmeter an.

a. Berechne den Erwartungswert und interpretiere im gegebenen Sachzusammenhang.
b. Berechne die Varianz und die Standardabweichung.
c. Wie groß ist der Erwartungswert, wenn die Zufallsvariable X die Anzahl der nicht-gehaltenen Elfmeter angibt. Berechne.
d. X gibt wieder die Anzahl der gehaltenen Elfmeter an. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte für X innerhalb des Intervalls $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegen.
e. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte für X unterhalb von $\mu - 2\sigma$ liegen.

Bsp. 19) Bei der olympischen Disziplin „Schießen“ trifft ein Schütze mit einer Wahrscheinlichkeit von 68 % den Wert 10,0. An einem Trainingstag feuert er 500 Schüsse ab. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer an.

a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau 362-mal den Wert 10,0 zu treffen?
b. Berechne den Erwartungswert und interpretiere im gegebenen Sachzusammenhang.
c. Berechne die Varianz und die Standardabweichung.
d. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte für X innerhalb des Intervalls $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegen.
e. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte für X oberhalb von $\mu + 2\sigma$ liegen.

Bsp. 20) Ein Würfel (1-6) wird 40-mal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der geworfenen Sechser an.

a. Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung. Interpretiere die Werte im gegebenen Kontext.

b. Ein 20-seitiger Würfel mit den Ziffern 1-20 wird ebenfalls 40-mal geworfen. Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung. Vergleiche die Werte mit deinen Ergebnissen aus Aufgabe a). Was fällt dir auf?

c. Führe dasselbe mit einem 50-seitigen Würfel mit den Ziffern 1-50 aus. Interpretiere die Ergebnisse.

Bsp. 21) Beim Roulette-Spiel setzt jemand 20-mal hintereinander auf **(i)** die Farbe Rot, **(ii)** die zweiten 12 (13-24) und **(iii)** die Zahl 7. Die Zufallsvariable X gibt jeweils die Anzahl der jeweiligen eintretenden Ereignisse an.

a. Berechne jeweils den Erwartungswert. Vergleiche die Werte und interpretiere dies im gegebenen Sachzusammenhang.

b. Berechne jeweils die Standardabweichung und vergleiche die Werte untereinander.

c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man das gewünschte Ereignis (i – iii) genau 13 mal erhält

Bsp. 22) An einem Bahnhof verspäten sich Züge mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 %. An drei Tagen werden insgesamt 400 Züge beobachtet.

a. Berechne den Erwartungswert, wenn die Zufallsvariable X die Anzahl der pünktlichen Züge angibt. Interpretiere den Wert im gegebenen Kontext.

b. Berechne die Standardabweichung.

c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 370 Züge pünktlich erscheinen.

d. Führe dieselben Schritte für den Erwartungswert und die Standardabweichung durch, wenn die Zufallsvariable X die Anzahl der verspäteten Züge angibt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 30 Züge verspätet erscheinen.

Bsp. 23) Bei der Lieferung von Porzellan-Teller wird die Ware erfahrungsgemäß in 3 % aller Pakete kaputt. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Pakete an, in denen die Ware gebrochen ist.

a. Es werden 190 Pakete nach der Auslieferung kontrolliert. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass (i) genau 12, (ii) maximal 20, (iii) mindestens 100, (iv) zwischen 10 und 20 Pakete eine kaputte Ware enthalten.

b. Bestimme den Erwartungswert und die Standardabweichung.

c. Wie viele Geräte müsste man überprüfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens ein defektes Gerät zu enthalten?

d. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte für X innerhalb des Intervalls $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegen.

Binomialverteilte Zufallsvariable* - 1_1202, WS3.2, Halboffenes Antwortformat

Bei einem bestimmten Zufallsversuch tritt entweder „Erfolg" oder „Misserfolg" ein. Dieser Zufallsversuch wird 30-mal durchgeführt. Die binomialverteilte Zufallsvariable X gibt an, wie oft dabei „Erfolg" eintritt. Für den Erwartungswert gilt: $E(X) = 12$.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(18 \leq X \leq 20)$.

$P(18 \leq X \leq 20) =$ ______________________________

Binomialverteilte Zufallsvariable* - 1_877, WS3.2, Halboffenes Antwortformat

Ein bestimmter Zufallsversuch mit der unbekannten Erfolgswahrscheinlichkeit p wird 400-mal durchgeführt. Die binomialverteilte Zufallsvariable X beschreibt dabei die Anzahl der Erfolge. Für den Erwartungswert gilt: $\mu = 80$.

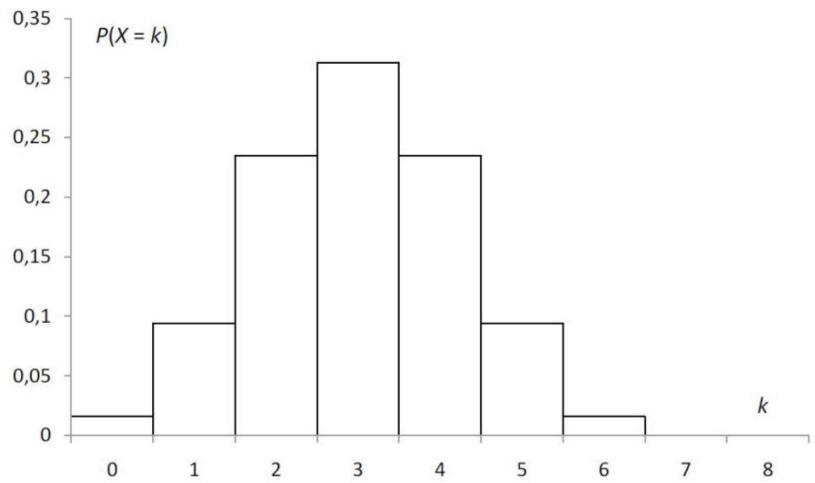
Berechnen Sie die Erfolgswahrscheinlichkeit p sowie die Standardabweichung σ der Zufallsvariablen X.

$p =$ ______________________________

$\sigma =$ ______________________________

Binomialverteilung* - 1_351, WS3.2, Konstruktionsformat

In der untenstehenden Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsvariablen X mit den Parametern $n = 6$ und $p = 0,5$ durch ein Säulendiagramm (Säulenbreite = 1) dargestellt. μ bezeichnet den Erwartungswert von X.
Schraffieren Sie diejenigen Rechtecksflächen, die $P(X > \mu)$ veranschaulichen!



Computerchips* - 1_683, WS3.2, Halboffenes Antwortformat

Ein Unternehmen stellt Computerchips her. Jeder produzierte Computerchip ist unabhängig von den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit von 97 % funktionsfähig.
Das Unternehmen produziert an einem bestimmten Tag 500 Computerchips.
Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Anzahl der funktionsfähigen Computerchips, die an diesem bestimmten Tag produziert werden!

Erwartungswert: ____________________________________

Standardabweichung: ____________________________________

Defekte Geräte* - 1_827, WS3.2, Halboffenes Antwortformat

Erfahrungsgemäß sind 2,5 % der Geräte, die von einem bestimmten Unternehmen geliefert werden, defekt. Die binomialverteilte Zufallsvariable X gibt die Anzahl der defekten Geräte in einer Zufallsstichprobe vom Umfang n an. Für den Erwartungswert gilt: $E(X) = 20$.

Berechnen Sie den Umfang n der Zufallsstichprobe.

$n =$ ____________________________________

Parameter einer Binomialverteilung* - 1_495, WS3.2, Halboffenes Antwortformat

Ein Zufallsexperiment wird durch eine binomialverteilte Zufallsvariable X beschrieben. Diese hat die Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0{,}36$ und die Standardabweichung $\sigma = 7{,}2$.
Berechnen Sie den zugehörigen Parameter n (Anzahl der Versuche)!

$n =$ ____________________________________

Pasch* - 1_732, WS3.2, Offenes Antwortformat

Bei einem Spiel werden in jeder Spielrunde zwei Würfel geworfen. Zeigen nach einem Wurf beide Würfel die gleiche Augenzahl, spricht man von einem *Pasch*. Die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch zu werfen, beträgt $\frac{1}{6}$.

Bildquelle: BMBWF

Es werden acht Runden (unabhängig voneinander) gespielt. Die Zufallsvariable X bezeichnet dabei die Anzahl der geworfenen Pasche.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fall, dass die Anzahl X der geworfenen Pasche unter dem Erwartungswert $E(X)$ liegt.