Grundkompetenz WS3.2-3.4: Binomialverteilung

Beispiele aus Maturaterminen 2022-24 (AHS, BHS, Kompensationsprüfungen AHS)

TYP-1:

Therapie

Die Anwendung einer bestimmten Therapie ist bei 90 % der Personen erfolgreich.
Ein Facharzt wendet diese Therapie bei 30 Personen an.
Die als binomialverteilt angenommene Zufallsvariable X gibt die Anzahl derjenigen Personen an, bei denen die Therapie erfolgreich ist.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl derjenigen Personen, bei denen die Therapie erfolgreich ist, größer als der Erwartungswert $E(X)$ ist.

[0/1 P.]

Eissalon

In einem Eissalon werden 24 verschiedene Eissorten angeboten.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Anzahl der Möglichkeiten an, aus den 24 angebotenen Eissorten 3 verschiedene Eissorten auszuwählen. (Dabei spielt die Reihenfolge der Auswahl keine Rolle.)

Qualitätssicherung

Im Zuge der Qualitätssicherung bei der Produktion von Porzellanfiguren werden diese nach ihrer Fertigstellung auf Fehler hin überprüft. Erfahrungsgemäß weiß man, dass 2 % der Porzellanfiguren fehlerhaft sind.

Es wird eine Zufallsstichprobe von n Porzellanfiguren entnommen ($n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$). Die Anzahl an fehlerhaften Porzellanfiguren wird als binomialverteilt angenommen.
Das Ereignis, dass mindestens 1 der n Porzellanfiguren fehlerhaft ist, wird mit E bezeichnet.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie mithilfe von n eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(E)$ auf.

$P(E) =$ ______________________________

Bit-Kombinationen

Ein Computer rechnet mit sogenannten *Bits*. Ein Bit kann entweder den Wert 0 oder den Wert 1 annehmen. Eine beliebige Abfolge aus acht Bits wird *Byte* genannt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenige Interpretation an, die im gegebenen Sachzusammenhang für $\binom{8}{3}$ zutrifft. *[1 aus 6]*

$\binom{8}{3}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass in einem Byte die ersten drei Bit 1er sind.	☐
$\binom{8}{3}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass in einem Byte genau drei 1er hintereinander auftreten.	☐
$\binom{8}{3}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass in einem Byte genau drei 1er enthalten sind.	☐
$\binom{8}{3}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, dass in einem Byte genau drei 1er enthalten sind.	☐
$\binom{8}{3}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, dass in einem Byte genau drei 1er hintereinander auftreten.	☐
$\binom{8}{3}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, dass in einem Byte die ersten drei Bit 1er sind.	☐

Binomialkoeffizient

Gegeben ist der Binomialkoeffizient $\binom{10}{2}$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Anzahlen an, die mit dem Binomialkoeffizienten $\binom{10}{2}$ übereinstimmen. *[2 aus 5]*

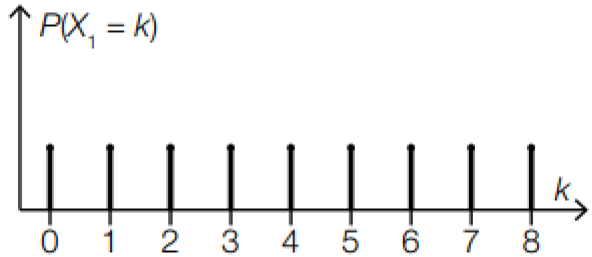
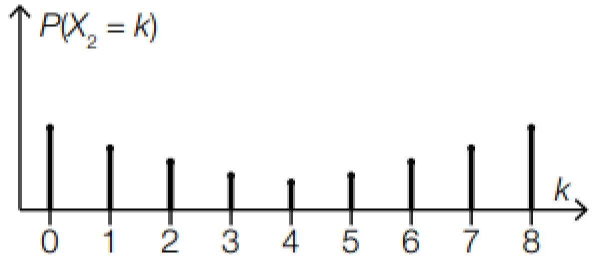
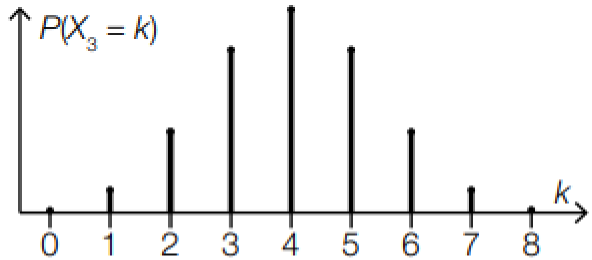
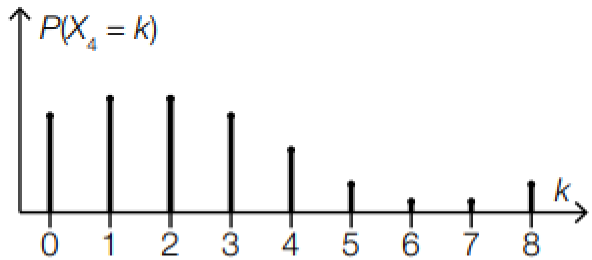
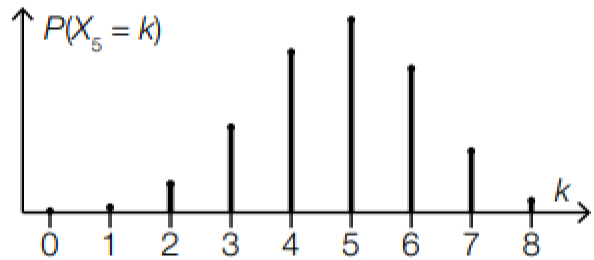
die Anzahl der zweielementigen Teilmengen einer zehnelementigen Menge	☐
die Anzahl derjenigen Zahlen, die mit zwei Ziffern gebildet werden können	☐
die Anzahl der Möglichkeiten, zwei Personen aus einer Gruppe von zehn Personen auszuwählen	☐
die Anzahl der möglichen Versuchsausgänge beim zehnmaligen Werfen einer Münze	☐
die Anzahl der möglichen Versuchsausgänge beim Werfen zweier Würfel, die jeweils zehn mit den Ziffern 1 bis 10 beschriftete Seitenflächen haben	☐

Binomialverteilung

Gegeben sind die fünf Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3, X_4 und X_5, die nur ganzzahlige Werte von 0 bis 8 annehmen. Deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind in den unten stehenden Abbildungen dargestellt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Abbildungen an, die einer Binomialverteilung entsprechen können.
[2 aus 5]

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

Glücksrad

Bei einem Gewinnspiel wird ein Glücksrad gedreht, das in 24 gleich große Sektoren unterteilt ist. Zwei der Sektoren sind grün, alle anderen rot.

Für jede Drehung gilt:

- Der Zeiger des Glücksrads zeigt auf jeden Sektor mit der gleichen Wahrscheinlichkeit.
- Zeigt der Zeiger nach der Drehung auf einen grünen Sektor, gewinnt man einen Preis.
- Zeigt der Zeiger nach der Drehung auf einen roten Sektor, gewinnt man keinen Preis.

Das Glücksrad wird n-mal gedreht. Die Ergebnisse der Drehungen sind voneinander unabhängig.

Aufgabenstellung:

Geben Sie den Erwartungswert für die Anzahl der gewonnenen Preise in Abhängigkeit von n an.

Binomialkoeffizienten

Gegeben sind die zwei natürlichen Zahlen a und b mit $0 \leq a < b \leq 9$.

Für zwei Binomialkoeffizienten gilt:

$\binom{9}{a} = \binom{9}{b}$

Aufgabenstellung:

Geben Sie a in Abhängigkeit von b an.

$a =$ ____

Sportwettbewerb

An einem Sportwettbewerb nehmen 20 Personen teil. Diese werden in Gruppen eingeteilt.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie $\binom{20}{4} = 4\,845$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Binomialverteilte Zufallsvariable

Bei einem bestimmten Zufallsversuch tritt entweder „Erfolg" oder „Misserfolg" ein. Dieser Zufallsversuch wird 30-mal durchgeführt. Die binomialverteilte Zufallsvariable X gibt an, wie oft dabei „Erfolg" eintritt. Für den Erwartungswert gilt: $E(X) = 12$.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(18 \leq X \leq 20)$.

$P(18 \leq X \leq 20) =$ ____________________

TYP-2:

Flugreisen:

c) Für einen bestimmten Flug haben 124 Personen jeweils einen Platz gebucht.

Modellhaft wird angenommen: Die für einen Flug gebuchten Plätze werden unabhängig voneinander jeweils mit der Wahrscheinlichkeit p in Anspruch genommen.

Für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E gilt:

$$P(E) = 1 - \binom{124}{123} \cdot p^{123} \cdot (1-p) - \binom{124}{124} \cdot p^{124}$$

1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass jedenfalls eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

Das Ereignis E ist: „Es werden ____①____ ____②____ der gebuchten Plätze in Anspruch genommen."

①	
höchstens	☐
genau	☐
mindestens	☐

②	
122	☐
123	☐
124	☐

Fitnessuhren:

b) Die Fitnessuhr *Sporty* ist besonders beliebt.
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person in Österreich eine Fitnessuhr *Sporty* besitzt, beträgt p.

Im Rahmen einer Studie werden 160 zufällig ausgewählte Personen in Österreich befragt.

Die binomialverteilte Zufallsvariable X gibt die Anzahl derjenigen Personen unter den 160 Befragten an, die eine Fitnessuhr *Sporty* besitzen.

1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass jedenfalls eine richtige Aussage entsteht. *[0/½/1 P.]*

Die Wahrscheinlichkeit, dass von den 160 Befragten niemand eine Fitnessuhr *Sporty* besitzt, beträgt ____①____; mit ____②____ wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass von den 160 Befragten mindestens 2 eine Fitnessuhr *Sporty* besitzen.

①	
$1 - p$	☐
p^{160}	☐
$(1 - p)^{160}$	☐

②	
$1 - \left[\binom{160}{0} \cdot p^0 \cdot (1 - p)^{160} + \binom{160}{1} \cdot p \cdot (1 - p)^{159}\right]$	☐
$\binom{160}{0} \cdot p^0 \cdot (1 - p)^{160} + \binom{160}{1} \cdot p \cdot (1 - p)^{159}$	☐
$\binom{160}{2} \cdot p^2 \cdot (1 - p)^{158}$	☐

BHS – Beispiele:

https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM

Fluggebäck:

c) Immer wieder werden Gepäckstücke beim Transport beschädigt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gepäckstück beim Transport beschädigt wird, beträgt jeweils 0,7 %.

Eine Zufallsstichprobe von 300 Gepäckstücken wird nach dem Transport untersucht.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 dieser Gepäckstücke beim Transport beschädigt worden sind. *[0/1 P.]*

2) Beschreiben Sie ein Ereignis *E* im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet wird.

   $P(E) = 1 - 0{,}993^{300} \approx 0{,}88$ *[0/1 P.]*

Raucherentwöhnung

a) 10 Raucher führen unabhängig voneinander eine Entwöhnungskur durch. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Entwöhnungskur erfolgreich ist, beträgt jeweils 60 %.

1) Kreuzen Sie den zutreffenden Ausdruck zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis *E* an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

   E ... „bei genau 8 Rauchern ist die Entwöhnungskur erfolgreich“

$P(E) = \binom{10}{8} \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^8$	☐
$P(E) = 1 - \binom{10}{8} \cdot 0{,}6^8 \cdot 0{,}4^2$	☐
$P(E) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^8$	☐
$P(E) = 1 - \binom{10}{8} \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^8$	☐
$P(E) = \binom{10}{8} \cdot 0{,}6^8 \cdot 0{,}4^2$	☐

Sonnenblumen

c) In einer Gärtnerei werden Kerne von Sonnenblumen in mit Erde befüllte Kisten eingesetzt. In jede Kiste werden 10 Kerne eingesetzt. Aus Erfahrung weiß man, dass jeder Kern unabhängig von den anderen Kernen mit einer Wahrscheinlichkeit p keimt.

1) Ordnen Sie den beiden Wahrscheinlichkeiten jeweils den zutreffenden Ausdruck aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Wahrscheinlichkeit, dass in einer zufällig ausgewählten Kiste höchstens 1 Kern keimt	
Wahrscheinlichkeit, dass in einer zufällig ausgewählten Kiste genau 9 Kerne keimen	

A	$1 - \binom{10}{9} \cdot p^9 \cdot (1-p)^1$
B	$\binom{10}{9} \cdot p^9 \cdot (1-p)^1$
C	$\binom{10}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^9 + (1-p)^{10}$
D	$\binom{10}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^9$