Grundkompetenz WS3.1 Zufallsvariable, Diskrete Verteilungen

Beispiele aus Maturaterminen 2022-24 (AHS, BHS, Kompensationsprüfungen AHS)

TYP-1:

Elfmetertraining

Johanna trainiert regelmäßig mit ihrer Fußballmannschaft Elfmeterschießen.
Sie hat 5 Versuche. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der dabei erzielten Tore k an.

In der nachstehenden Tabelle ist die auf Erfahrungswerten basierende Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	0,001	0,008	0,131	0,310	0,372	$P(X = 5)$

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Johanna bei 5 Versuchen mehr als 3 Tore erzielt.

$P(X > 3) =$ ____________________________________

Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses

Ein Zufallsexperiment wird n-mal durchgeführt ($n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 12$).

Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft ein bestimmtes Ereignis bei diesen n Durchführungen eintritt.
Die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Ereignis mindestens 10-mal eintritt, beträgt 35 %.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die jedenfalls zutreffen. *[2 aus 5]*

$P(X = 0) = 0$	☐
$P(X \leq 10) = 0{,}35$	☐
$P(X < 9) \leq 0{,}65$	☐
$P(X \geq 10) = 0{,}35$	☐
$P(X > 11) > 0{,}4$	☐

Zufallsversuch

Bei einem bestimmten Zufallsversuch tritt als Ergebnis entweder „Erfolg" oder „Misserfolg" ein. Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft „Erfolg" eintritt, wenn dieser Zufallsversuch 7-mal durchgeführt wird.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Wahrscheinlichkeiten jeweils die jedenfalls gleich große Wahrscheinlichkeit aus A bis F zu.

$P(X < 3)$	
$P(X \leq 3)$	
$P(X \geq 3)$	
$P(X > 3)$	

A	$P(X > 2)$
B	$1 - P(X \leq 4)$
C	$P(X \leq 2)$
D	$P(X = 3) + P(X > 4)$
E	$P(X = 4) + P(X \geq 5)$
F	$1 - P(X > 3)$

Münzwurf

Ein Zufallsexperiment besteht aus dem mehrmaligen Werfen einer Münze. Die Münze zeigt nach einem Wurf entweder „Kopf" oder „Zahl". Die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze „Kopf" zeigt, ist bei jedem Wurf genauso hoch wie die Wahrscheinlichkeit, dass sie „Zahl" zeigt. Die Ergebnisse der Würfe sind voneinander unabhängig. Die Münze wird so oft geworfen, bis sie zum zweiten Mal „Kopf" oder zum zweiten Mal „Zahl" zeigt.

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der dafür benötigten Münzwürfe.

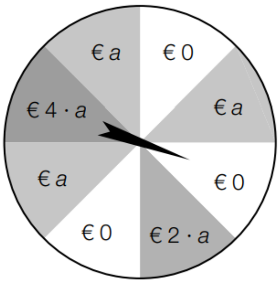
Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X = 3)$.

Glücksrad

In der Mitte des unten abgebildeten Glücksrads ist ein Zeiger montiert. Für jede Drehung des Zeigers gilt:
Der Zeiger bleibt in jedem Sektor mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ stehen.

Die Gewinne, die ausbezahlt werden, wenn der Zeiger im entsprechenden Sektor stehen bleibt, sind auf dem nachstehend abgebildeten Glücksrad angeschrieben ($a \in \mathbb{R}^+$).



Der Zeiger wird 1-mal gedreht.

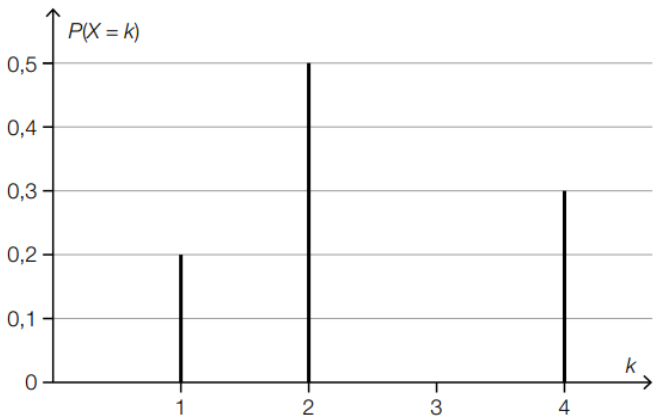
Die Zufallsvariable X gibt dabei die Höhe des ausbezahlten Gewinns an.
Für den Erwartungswert in Euro gilt: $E(X) = 4{,}5$

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie a.

Wahrscheinlichkeitsverteilung

In der nachstehenden Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X dargestellt.



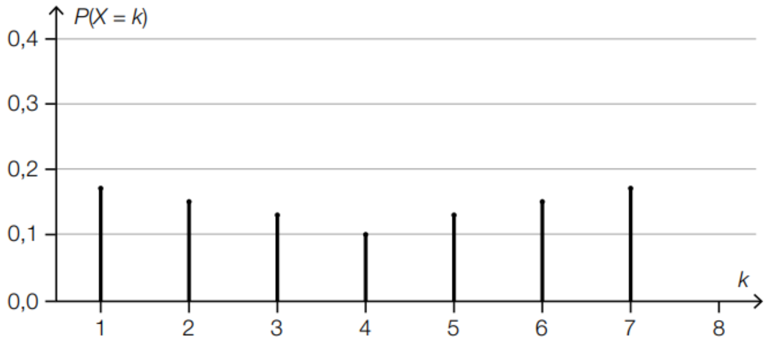
Die Zufallsvariable X nimmt nur die Werte 1, 2 und 4 mit einer positiven Wahrscheinlichkeit an.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$.

Erwartungswerte und Standardabweichungen

Gegeben sind die zwei Zufallsvariablen X und Y, die jeweils genau 7 ganzzahlige Werte mit positiver Wahrscheinlichkeit annehmen. Nachstehend sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für X und Y dargestellt.



Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Für die Erwartungswerte $E(X)$ und $E(Y)$ gilt _____①_____;
für die Standardabweichungen $\sigma(X)$ und $\sigma(Y)$ gilt _____②_____.

①	
$E(X) < E(Y)$	☐
$E(X) = E(Y)$	☐
$E(X) > E(Y)$	☐

②	
$\sigma(X) < \sigma(Y)$	☐
$\sigma(X) = \sigma(Y)$	☐
$\sigma(X) > \sigma(Y)$	☐

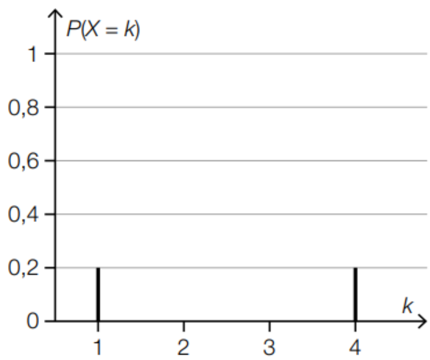
Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen

Gegeben ist die Zufallsvariable X, die nur 1, 2, 3 oder 4 als Wert annehmen kann.

Es gilt: $P(X = 2)$ ist doppelt so groß wie $P(X = 1)$.

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X die fehlenden Werte $P(X = 2)$ und $P(X = 3)$ ein.

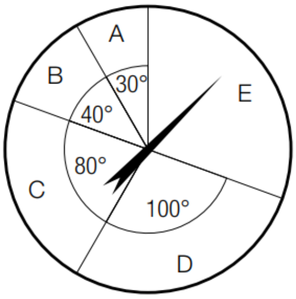


BHS – Beispiele:

https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM

Spielshow

a) Ein Glücksrad ist in die Sektoren A, B, C, D und E unterteilt. In der Mitte des Glücksrads ist ein drehbarer Zeiger montiert, der im Rahmen einer Spielshow gedreht wird. (Siehe nebenstehende Abbildung.)



Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger des Glücksrads nach einer Drehung auf einen bestimmten Sektor zeigt, ist direkt proportional zum Winkel des jeweiligen Sektors.

Zeigt der Zeiger auf den Sektor A, so werden 10 Punkte gewonnen.
Zeigt der Zeiger auf den Sektor B, so werden 16 Punkte gewonnen.
Zeigt der Zeiger auf den Sektor C, so werden 20 Punkte gewonnen.
Zeigt der Zeiger auf den Sektor D, so werden 25 Punkte gewonnen.
Zeigt der Zeiger auf den Sektor E, so werden 31 Punkte <u>verloren</u>.

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl derjenigen Punkte, die nach einmaligem Drehen des Zeigers gewonnen bzw. verloren werden.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle durch Eintragen der fehlenden Wahrscheinlichkeiten. *[0/1 P.]*

Sektor	A	B	C	D	E
x_i	10	16	20	25	–31
$P(X = x_i)$					

2) Berechnen Sie den Erwartungswert von X. *[0/1 P.]*

3) Interpretieren Sie den Erwartungswert von X im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*