WS3.1 Diskrete Zufallsvariable

Maturaskript AHS (17 Seiten)

Grundkompetenz:

- **WS3.1** die Begriffe Zufallsvariable, (Wahrscheinlichkeits-)Verteilung, Erwartungswert und Standardabweichung verständig deuten und einsetzen können

Elementarereignisse	k	**Wahrscheinlichkeitsverteilung** $P(X=k)$	**Verteilungsfunktion** $P(X \leq k)$
$(1{,}1)$	2	$\frac{1}{36} = 0{,}02\dot{7} = 2,\dot{7}\%$	$P(X \leq 2) = 0{,}02\dot{7} = 2,\dot{7}\%$
$(1{,}2), (2{,}1)$	3	$\frac{2}{36} = 0{,}0\dot{5} = 5,\dot{5}\%$	$P(X \leq 3) = 0{,}08\dot{3} = 8,\dot{3}\%$
$(1{,}3), (3{,}1), (2{,}2)$	4	$\frac{3}{36} = 0{,}08\dot{3} = 8,\dot{3}\%$	$P(X \leq 4) = 0{,}1\dot{6} = 16,\dot{6}\%$
$(1{,}4), (4{,}1), (2{,}3), (3{,}2)$	5	$\frac{4}{36} = 0,\dot{1} = 11,\dot{1}\%$	$P(X \leq 5) = 0{,}2\dot{7} = 27,\dot{7}\%$
$(1{,}5), (5{,}1), (2{,}4), (4{,}2), (3{,}3)$	6	$\frac{5}{36} = 0{,}13\dot{8} = 13,\dot{8}\%$	$P(X \leq 6) = 041\dot{6} = 41,\dot{6}\%$
$(1{,}6), (6{,}1), (2{,}5), (5{,}2), (4{,}3), (3{,}4)$	7	$\frac{6}{36} = 0{,}1\dot{6} = 16,\dot{6}\%$	$P(X \leq 7) = 0{,}58\dot{3} = 58,\dot{3}\%$
$(2{,}6), (6{,}2), (3{,}5), (5{,}3), (4{,}4)$	8	$\frac{5}{36} = 0{,}13\dot{8} = 13,\dot{8}\%$	$P(X \leq 8) = 0{,}7\dot{2} = 72,\dot{2}\%$
$(3{,}6), (6{,}3), (5{,}4), (4{,}5)$	9	$\frac{4}{36} = 0,\dot{1} = 11,\dot{1}\%$	$P(X \leq 9) = 0{,}8\dot{3} = 83,\dot{3}\%$
$(4{,}6), (6{,}4), (5{,}5)$	10	$\frac{3}{36} = 0{,}08\dot{3} = 8,\dot{3}\%$	$P(X \leq 10) = 0{,}91\dot{6} = 91,\dot{6}\%$
$(5{,}6), (6{,}5)$	11	$\frac{2}{36} = 0{,}0\dot{5} = 5,\dot{5}\%$	$P(X \leq 11) = 0{,}97\dot{2} = 97,\dot{2}\%$
$(6{,}6)$	12	$\frac{1}{36} = 0{,}02\dot{7} = 2,\dot{7}\%$	$P(X \leq 12) = 1 = 100\ \%$

Prof. Tegischer

Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

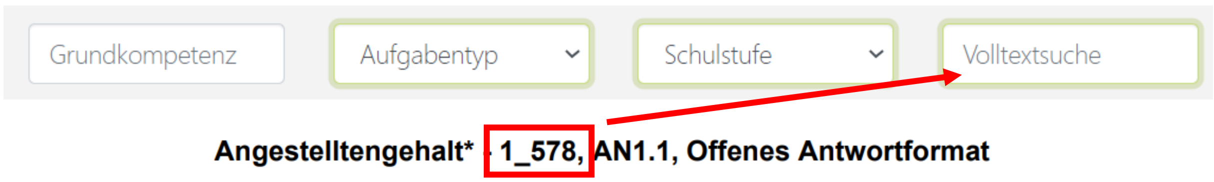
Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/

- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=M

2) Gib im Feld „**Volltextsuche**“ die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.



Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. 1_578) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**“ und „**GeoGebra**“ erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**“ erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln

- Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen.
- Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen.
- Sie dürfen mein Materialen **NICHT** gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden.
- Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden.
- Bei einem **Missbrauch** erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.

Weitere Regeln für Lehrpersonen

WICHTIGSTE REGEL: LehrerInnen dürfen die Materialien in **Ihrem eigenen Unterricht** verwenden:

- Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen.
- LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben.
- Es ist **nicht erlaubt**, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben.
- LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien

WS3.1 Diskrete Zufallsvariable

1. Diskrete Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Verteilungsfunktion

Eine **diskrete Zufallsvariable X** ist eine Funktion, die jedem Elementarereignis aus dem Grundraum eine ganze Zahl zuordnet.

$$X: \Omega \to \mathbb{Z}$$

Video

Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung f** gibt die Wahrscheinlichkeit P an, mit der die Zufallsvariable X den Wert $k \in \mathbb{Z}$ annimmt.

$$f: \mathbb{Z} \to [0;1] \quad mit\ f(k) = P(X = k)$$

Sprechweise: f gibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable X an.

Musterbeispiel 1: Ein Würfel wird zwei Mal geworfen. Der Grundraum Ω besteht aus allen Elementarereignissen (gesamt 36):

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), \dots, (6,6)\}$$

Schritt 1: Zufallsversuch & Grundraum

Der **Grundraum** entspricht der **Definitionsmenge** der **Zufallsvariable**

Die diskrete Zufallsvariable X ordnet jedem Elementarereignis die Summe der Augenzahlen zu. Bei zwei Würfen kann die Summe einen Wert zwischen 2 und 12 annehmen:

Schritt 2: Was soll die **diskrete Zufallsvariable** darstellen?
In diesem Beispiel: Summe der beiden Augenzahlen

Elementarereignisse	k Summe der Augenzahlen	$P(X = k)$
$(1,1)$	2	$P(X = 2) = \frac{1}{36} = 0{,}02\dot{7} = 2{,}\dot{7}\%$
$(1,2), (2,1)$	3	$P(X = 3) = \frac{2}{36} = 0{,}0\dot{5} = 5{,}\dot{5}\%$
$(1,3), (3,1), (2,2)$	4	$P(X = 4) = \frac{3}{36} = 0{,}08\dot{3} = 8{,}\dot{3}\%$
$(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)$	5	$P(X = 5) = \frac{4}{36} = 0{,}\dot{1} = 11{,}\dot{1}\%$
$(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)$	6	$P(X = 6) = \frac{5}{36} = 0{,}13\dot{8} = 13{,}\dot{8}\%$
$(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (4,3), (3,4)$	7	$P(X = 7) = \frac{6}{36} = 0{,}1\dot{6} = 16{,}\dot{6}\%$
$(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)$	8	$P(X = 8) = \frac{5}{36} = 0{,}13\dot{8} = 13{,}\dot{8}\%$
$(3,6), (6,3), (5,4), (4,5)$	9	$P(X = 9) = \frac{4}{36} = 0{,}\dot{1} = 11{,}\dot{1}\%$
$(4,6), (6,4), (5,5)$	10	$P(X = 10) = \frac{3}{36} = 0{,}08\dot{3} = 8{,}\dot{3}\%$
$(5,6), (6,5)$	11	$P(X = 11) = \frac{2}{36} = 0{,}0\dot{5} = 5{,}\dot{5}\%$
$(6,6)$	12	$P(X = 12) = \frac{1}{36} = 0{,}02\dot{7} = 2{,}\dot{7}\%$

Schritt 3: Berechnung der **Wahrscheinlichkeiten** und Bestimmung der Wahrscheinlichkeits-verteilung.

$$f: \Omega \to [0;1]$$

$$f(k) = P(X = k)$$

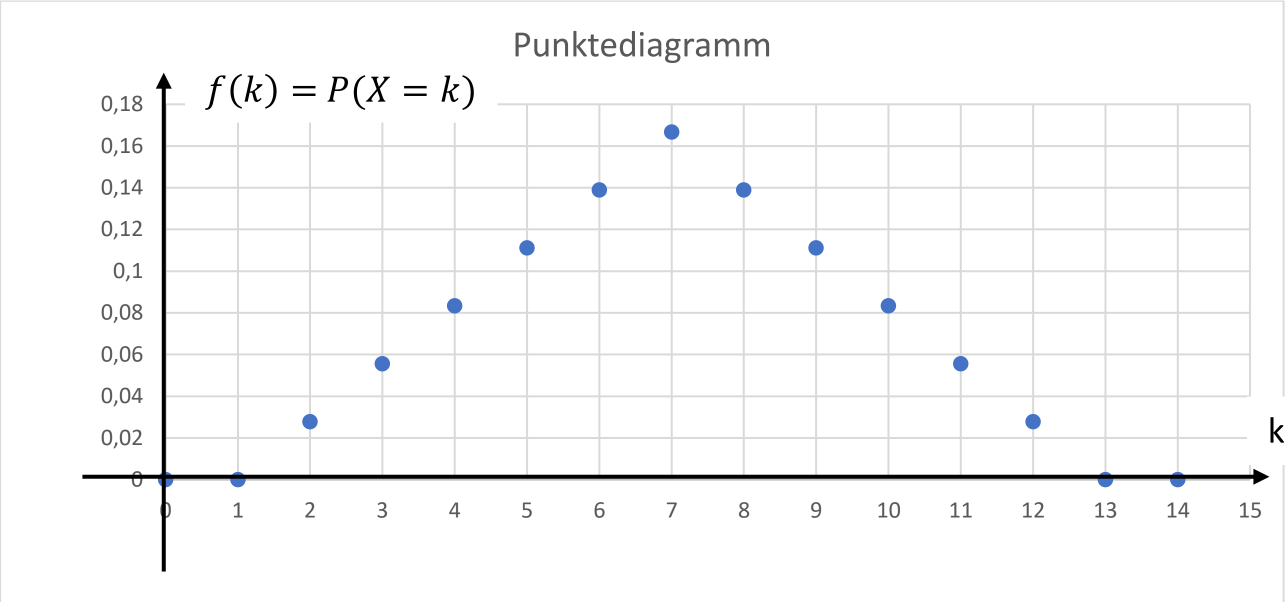
$$f(3) = P(X = 3) = 0{,}0\dot{5}$$

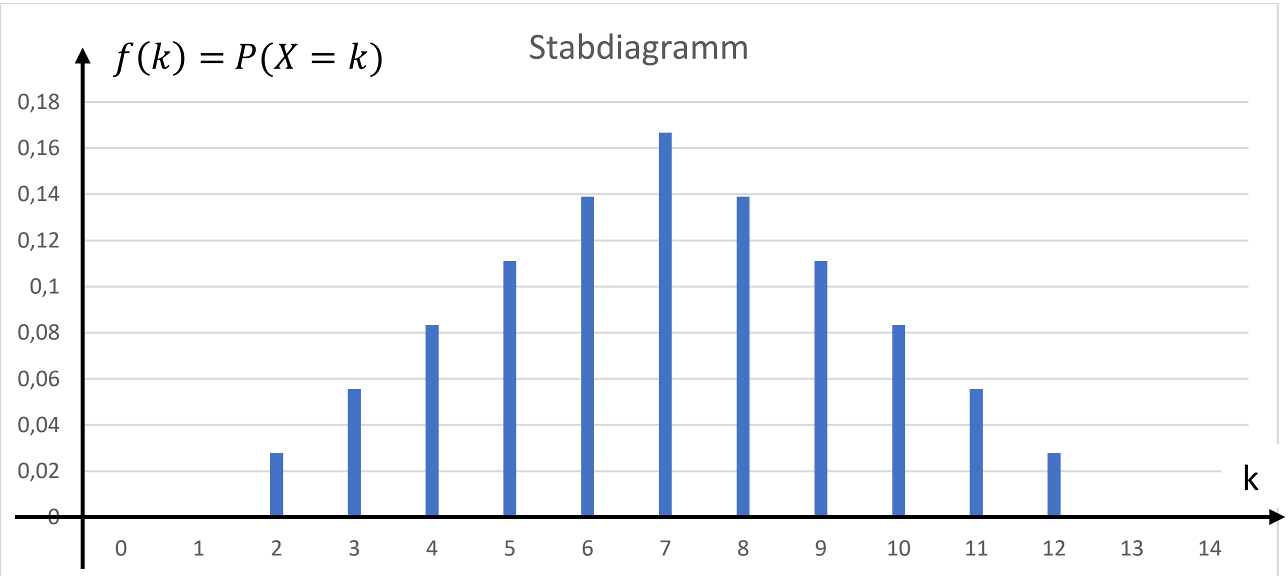
Meistens lässt man f weg:

$$P(X = 12) = 0{,}02\dot{7}$$

Bemerkung: Die Wahrscheinlichkeitsverteilung nimmt für alle anderen Zahlen, die nicht in der Wertemenge {2,3,4,5,...,12} liegen, den Wert 0 an. $\rightarrow P(X = 1) = 0$

Graphische Darstellung





<u>Mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung können weitere Berechnungen durchgeführt werden:</u>

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen kleiner als 5 ist?

Gesucht: $\boldsymbol{P(X < 5)}$

$$\boldsymbol{P(X < 5)} = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = 0{,}1\dot{6} = 16{,}\dot{6}\%$$

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen größer als 10 ist?

Gesucht: $\boldsymbol{P(X > 10)}$

$$\boldsymbol{P(X>10)} = P(X=11)+P(X=12) = \frac{2}{36}+\frac{1}{36} = \frac{3}{36} = 0{,}08\dot{3} = 8,\dot{3}\%$$

Verteilungsfunktion:

Die Verteilungsfunktion F einer diskreten Zufallsvariable ordnet jedem $k \in \mathbb{Z}$ die Wahrscheinlichkeit zu, mit der die **Zufallsvariable X höchstens** den **Wert k** annimmt.

$$F: \mathbb{Z} \to [0;1]\ mit\ F(k) = P(X \leq k)$$

Unterschied Wahrscheinlichkeitsverteilung f – Verteilungsfunktion F

- $f(3) = P(X=3)$ … gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Zufallsvariable den Wert 3 einnimmt.
- $F(3) = P(X \leq 3)$ … gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Zufallsvariable höchstens den Wert 3 einnimmt.

Fortsetzung Musterbeispiel 1:

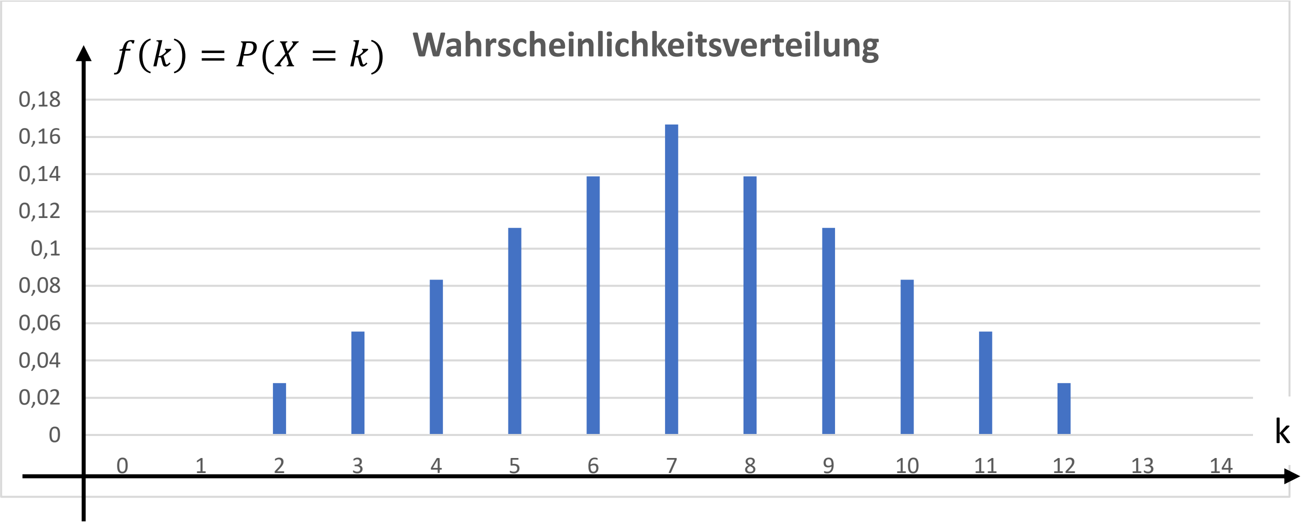
Bei der Verteilungsfunktion werden die Wahrscheinlichkeiten auf-addiert (je nach Wert):

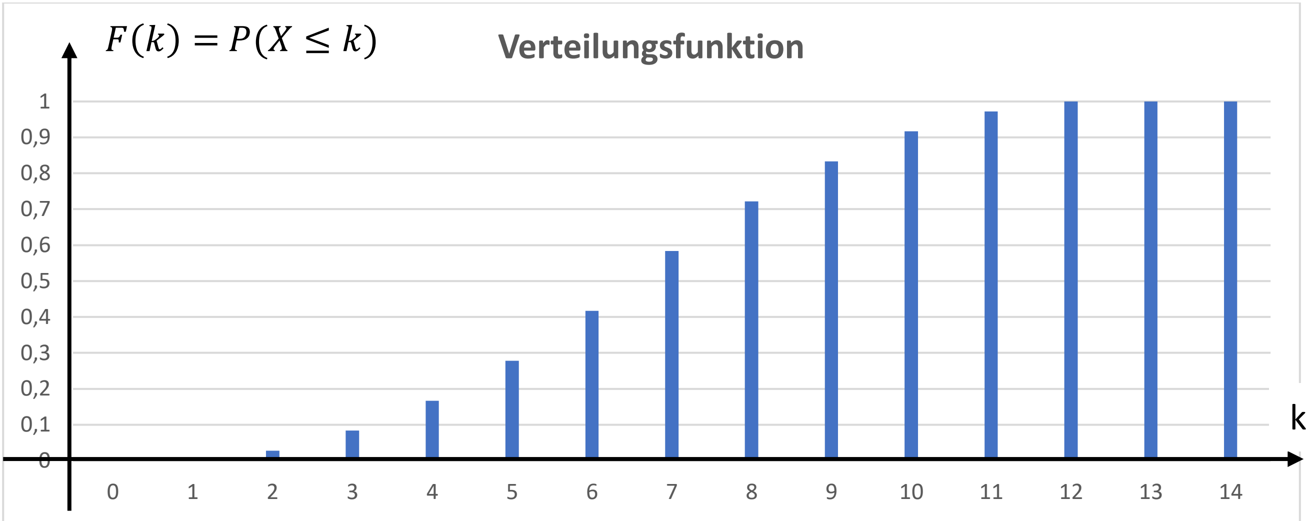
Elementarereignisse	k	**Wahrscheinlichkeitsverteilung** $\boldsymbol{P(X=k)}$	**Verteilungsfunktion** $\boldsymbol{P(X \leq k)}$
$(1,1)$	2	$\frac{1}{36} = 0{,}02\dot{7} = 2,\dot{7}\%$	$P(X \leq 2) = 0{,}02\dot{7} = 2,\dot{7}\%$
$(1,2), (2,1)$	3	$\frac{2}{36} = 0{,}0\dot{5} = 5,\dot{5}\%$	$P(X \leq 3) = 0{,}08\dot{3} = 8,\dot{3}\%$
$(1,3), (3,1), (2,2)$	4	$\frac{3}{36} = 0{,}08\dot{3} = 8,\dot{3}\%$	$P(X \leq 4) = 0{,}1\dot{6} = 16,\dot{6}\%$
$(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)$	5	$\frac{4}{36} = 0,\dot{1} = 11,\dot{1}\%$	$P(X \leq 5) = 0{,}2\dot{7} = 27,\dot{7}\%$
$(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)$	6	$\frac{5}{36} = 0{,}13\dot{8} = 13,\dot{8}\%$	$P(X \leq 6) = 041\dot{6} = 41,\dot{6}\%$
$(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (4,3), (3,4)$	7	$\frac{6}{36} = 0{,}1\dot{6} = 16,\dot{6}\%$	$P(X \leq 7) = 0{,}58\dot{3} = 58,\dot{3}\%$
$(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)$	8	$\frac{5}{36} = 0{,}13\dot{8} = 13,\dot{8}\%$	$P(X \leq 8) = 0{,}7\dot{2} = 72,\dot{2}\%$
$(3,6), (6,3), (5,4), (4,5)$	9	$\frac{4}{36} = 0,\dot{1} = 11,\dot{1}\%$	$P(X \leq 9) = 0{,}8\dot{3} = 83,\dot{3}\%$
$(4,6), (6,4), (5,5)$	10	$\frac{3}{36} = 0{,}08\dot{3} = 8,\dot{3}\%$	$P(X \leq 10) = 0{,}91\dot{6} = 91,\dot{6}\%$
$(5,6), (6,5)$	11	$\frac{2}{36} = 0{,}0\dot{5} = 5,\dot{5}\%$	$P(X \leq 11) = 0{,}97\dot{2} = 97,\dot{2}\%$
$(6,6)$	12	$\frac{1}{36} = 0{,}02\dot{7} = 2,\dot{7}\%$	$P(X \leq 12) = 1 = 100\ \%$

Bemerkung – Rechenweg:

- $P(X \leq 3) = P(X=2) + P(X=3)$

- $P(X \leq 5) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$
- $P(X \leq 8) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8)$





Bei der Verteilungsfunktion werden die Wahrscheinlichkeiten auf-addiert.

Bsp. 1) Ein Würfel (1-6) wird geworfen. Die Zufallsvariable X gibt die Augenzahl an.

a. Welche Werte kann die Zufallsvariable X annehmen?
b. Erstelle die Tabelle für die Wahrscheinlichkeitsverteilung. Zeichne ein Stabdiagramm.
c. Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:
   (1) $P(X = 3)$ (2) $P(X \geq 2)$ (3) $P(X < 10)$ (4) $P(2 < X \leq 5)$
d. Erstelle eine Tabelle der Verteilungsfunktion. Stelle die Verteilungsfunktion graphisch als Stabdiagramm dar.

Bsp. 2) Eine Münze (Kopf, Zahl) wird vier Mal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl von Kopf an.

a. Welche Werte kann die Zufallsvariable X annehmen?
b. Erstelle mit Hilfe eines vereinfachten Baumdiagramms die Tabelle für die Wahrscheinlichkeitsverteilung. Zeichne ein Stabdiagramm.
   Bemerkung:
   - Für die Wahrscheinlichkeiten $P(X = 1)$ & $P(X = 3)$ gibt es jeweils 4 Pfade.
   - Für die Wahrscheinlichkeiten $P(X = 2)$ gibt es 6 Pfade.
c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Mal Kopf geworfen wird.

d. Berechne und interpretiere folgenden Ausdruck im gegebenen Kontext: $P(1 \leq X \leq 2)$
e. Erstelle eine Tabelle der Verteilungsfunktion. Stelle die Verteilungsfunktion graphisch als Stabdiagramm dar.

Bsp. 3) Ein Würfel (1-6) wird drei Mal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gewür Fünfer an.

SCAN MICH

Video

a. Welche Werte kann die Zufallsvariable X annehmen?
b. Erstelle mit Hilfe eines Baumdiagramms (Fünfer / Kein Fünfer) die Tabelle für die Wahrscheinlichkeitsverteilung. Zeichne ein Punktdiagramm.
c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Mal ein Fünfer gewürfelt wird.
d. Berechne und interpretiere folgenden Ausdruck im gegebenen Kontext: $P(X < 2)$

Bsp. 4) Ein Würfel (1-6) wird zwei Mal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt das Produkt der beiden Augenzahlen an.

a. Bestimme die Grundmenge Ω.
b. Bestimme die Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung und stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung graphisch dar.
c. Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:
   (1) $P(X = 4)$ (2) $P(X \geq 15)$ (3) $P(X < 10)$ (4) $P(8 < X \leq 19)$

Bsp. 5) In einer Urne liegen Kugeln mit folgenden Nummernwerten: 12, 14, 16, 18

Es werden zwei Kugeln nacheinander (mit Zurücklegen) gezogen.

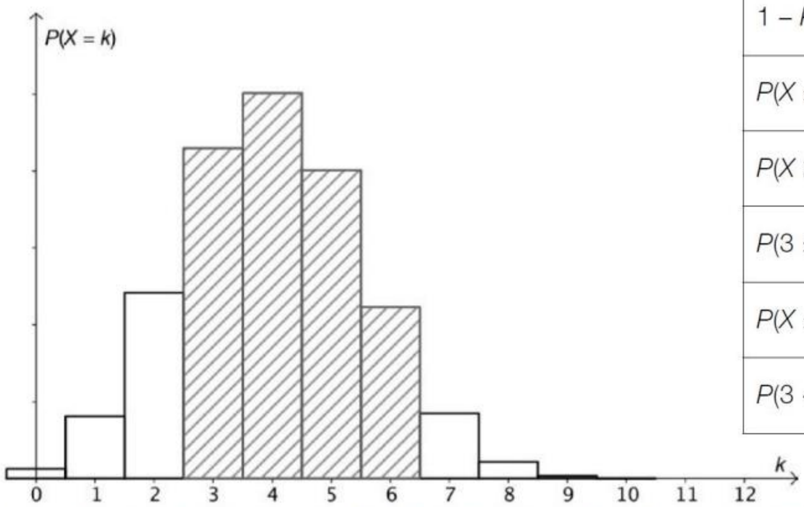
a. Die Zufallsvariable X gibt die Summe der Nummernwerte der Kugel an. Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung als Tabelle und graphisch als Diagramm dar.
b. Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:
   (1) $P(X = 26)$ (2) $P(X \geq 35)$ (3) $P(X < 10)$ (4) $P(20 < X \leq 30)$
c. Bestimme die Werte der Verteilungsfunktion und stelle sie graphisch dar.

Bsp. 6) Am Strand haben von 20 ausgewählten Personen vier Personen die Sonnencreme zu Hause vergessen. Es werden von diesem Personenkreis drei verschiedene nach dem Zufallsprinzip ausgewählt. Die Zufallsvariable X gibt an, wie viele Menschen bei der Kontrolle eine Sonnencreme haben.

a. Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Hilfe einer Tabelle und graphisch als Punktdiagramm. Berechne die Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe eines Baumdiagramms.
b. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Personen eine Sonnencreme haben?

Diskrete Zufallsvariable* - 1_327, WS3.1, 1 aus 6

Die unten stehende Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen X.

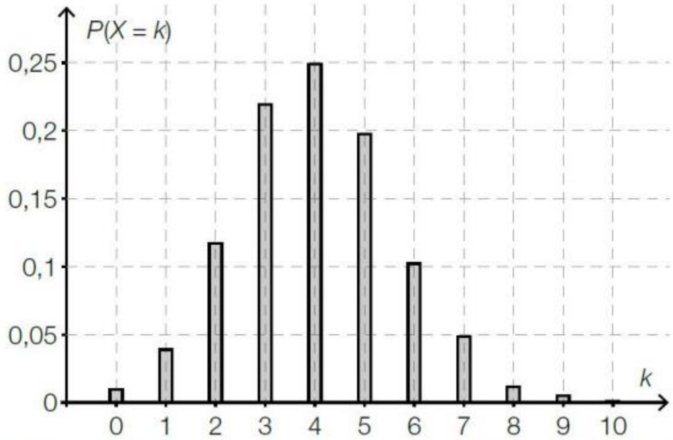


$1 - P(X \leq 2)$	☐
$P(X \leq 6) - P(X \leq 3)$	☐
$P(X \geq 3) + P(X \leq 6)$	☐
$P(3 \leq X \leq 6)$	☐
$P(X \leq 6) - P(X < 2)$	☐
$P(3 < X < 6)$	☐

Welcher der folgenden Ausdrücke beschreibt die Wahrscheinlichkeit, die dem Inhalt der schraffierten Fläche entspricht?
Kreuzen Sie den zutreffenden Ausdruck an!

Wahrscheinlichkeit bestimmen* - 1_587, WS3.1, Halboffenes Antwortformat

Die nachstehende Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen X.



Geben Sie mithilfe dieser Abbildung näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(4 \leq X < 7)$ an!

$P(4 \leq X < 7) \approx$ ______________________________

Wahrscheinlichkeit* - 1_611, WS3.1, Halboffenes Antwortformat

Die Zufallsvariable X hat den Wertebereich $\{0, 1, \ldots, 9, 10\}$.
Gegeben sind die beiden Wahrscheinlichkeiten $P(X = 0) = 0{,}35$ und $P(X = 1) = 0{,}38$.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 2)$!

$P(X \geq 2) =$ ______________________________

Wahrscheinlichkeiten einer Zufallsvariablen* - 1_851, WS3.1, Halboffenes Antwortformat

Eine bestimmte Zufallsvariable X kann nur den Wert -4, den Wert 0 oder den Wert 2 annehmen.

Für die Wahrscheinlichkeiten gilt:

$P(X = -4) = 0{,}3$
$P(X = 0) = a$
$P(X = 2) = b$

Dabei sind a und b positive reelle Zahlen.

Der Erwartungswert von X ist null, also $E(X) = 0$.
Geben Sie a und b an.

a = ________________________________

b = ________________________________

Wahrscheinlichkeiten* - 1_826, WS3.1, 2 aus 5

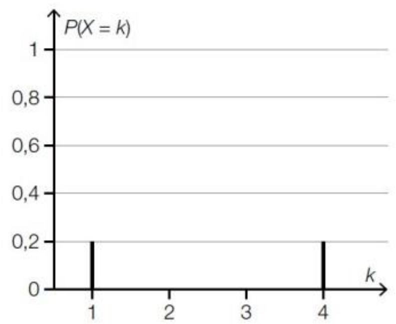
Die Zufallsvariable X kann ausschließlich die Werte 0, 1, 2 und 3 annehmen.
Es gilt: $P(X = 1) = 0{,}1$ und $P(X > 1) = 0{,}6$.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

$P(X \leq 2) = 0{,}3$	☐
$P(X < 2) = 0{,}4$	☐
$P(X = 0) = 0$	☐
$P(X \geq 0) = 0{,}9$	☐
$P(X \geq 1) = 0{,}7$	☐

Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen* - 1_1201, WS3.1, Konstruktionsformat

Gegeben ist die Zufallsvariable X, die nur 1, 2, 3 oder 4 als Wert annehmen kann.

Es gilt: $P(X = 2)$ ist doppelt so groß wie $P(X = 1)$.
Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X die fehlenden Werte $P(X = 2)$ und $P(X = 3)$ ein.



Wahrscheinlichkeitsverteilung* - 1_472, WS3.1, Halboffenes Antwortformat

Der Wertebereich einer Zufallsvariablen X besteht aus den Werten x_1, x_2, x_3.
Man kennt die Wahrscheinlichkeit $P(X = x_1) = 0,4$. Außerdem weiß man, dass x_3 doppelt so wahrscheinlich wie x_2 ist.
Berechnen Sie $P(X = x_2)$ und $P(X = x_3)$!

$P(X = x_2) =$ ____

$P(X = x_3) =$ ____

Wahrscheinlichkeitsverteilung* - 1_779, WS3.1, 2 aus 5

In einer Urne befinden sich ausschließlich weiße und schwarze Kugeln. Drei Kugeln werden ohne Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln an.

Durch die nachstehende Tabelle ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X gegeben.

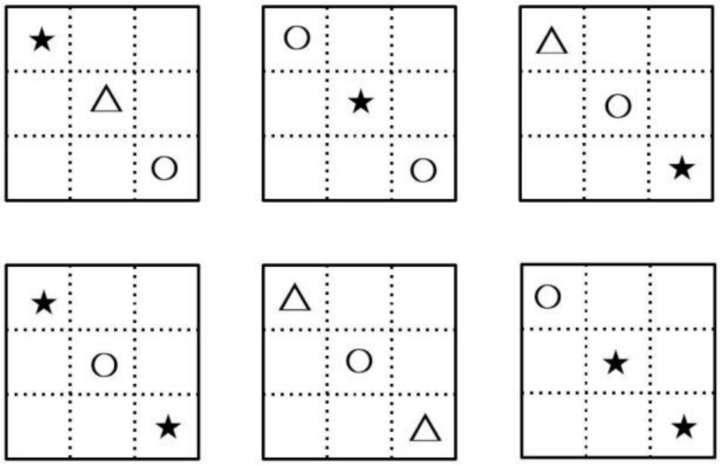
x	1	2	3
$P(X = x)$	0,3	0,6	0,1

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

Die Wahrscheinlichkeit, höchstens zwei weiße Kugeln zu ziehen, ist 0,9.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine weiße Kugel zu ziehen, ist 0,3.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, mehr als eine weiße Kugel zu ziehen, ist 0,6.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, genau zwei schwarze Kugeln und eine weiße Kugel zu ziehen, ist 0,1.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine schwarze Kugel zu ziehen, ist 0,9.	☐

Zufallsvariable* - 1_496, WS3.1, Offenes Antwortformat

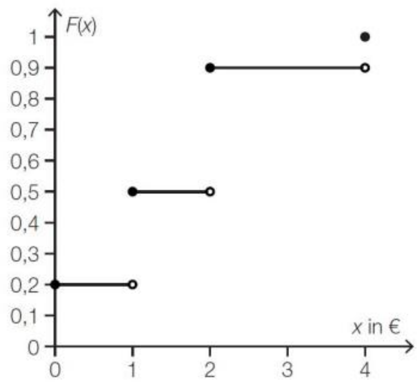
Nachstehend sind die sechs Seitenflächen eines fairen Spielwürfels abgebildet. Auf jeder Seitenfläche sind drei Symbole dargestellt. (Ein Würfel ist „fair“, wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle sechs Seitenflächen gleich groß ist.)



Bei einem Zufallsversuch wird der Würfel einmal geworfen. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Sterne auf der nach oben zeigenden Seitenfläche.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an, d. h. die möglichen Werte von X samt zugehöriger Wahrscheinlichkeiten!

Glücksrad (a) - 2_007, WS3.1, Halboffenes Antwortformat Offenes Antwortformat

Bei einem Glücksspiel werden nach dem Drehen eines Glücksrads € 0, € 1, € 2 oder € 4 ausbezahlt. Jedes Mal, bevor das Rad gedreht wird, ist eine Spielgebühr von e € zu bezahlen.
Die Zufallsvariable X gibt die Höhe des ausbezahlten Betrags an.
Nachstehend ist der Graph der Verteilungsfunktion F in Abhängigkeit vom ausbezahlten Betrag x (in €) mit $F(x) = P(X \leq x)$ angegeben.



a) 1) Tragen Sie die entsprechenden Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in die nachstehende Tabelle ein.

ausbezahlter Betrag x in €	0	1	2	4
$P(X = x)$				

2) Begründen Sie, warum jede Verteilungsfunktion monoton steigend ist und warum das Maximum jeder Verteilungsfunktion 1 sein muss.

2. Erwartungswert, Standardabweichung und Varianz

Video

Wiederholung: Statistik

Datenreihe: $x_1, x_2, \dots, x_n$ (n-Elemente)

Arithmetischer Mittelwert (n Elemente): $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$

Arithmetischer Mittelwert (n Elemente) bei k-verschiedenen Elementen mit den absoluten Häufigkeiten $H_1, H_2, \dots, H_k$:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot H_1 + x_2 \cdot H_2 + \cdots + x_K \cdot H_k}{n} = x_1 \cdot \frac{H_1}{n} + x_2 \cdot \frac{H_2}{n} + \cdots + x_k \cdot \frac{H_k}{n} = \boldsymbol{x_1 \cdot h_1 + x_2 \cdot h_2 + \cdots + x_k \cdot h_k}$$

Der arithmetische Mittelwert kann durch Umformen mit Hilfe der **relativen Häufigkeiten** dargestellt werden.

Bemerkung: **Das Gesetz der großen Zahlen** besagt, dass bei einer ausreichend großen Versuchsserie ($n \to \infty$) die relativen Häufigkeiten gegen die Wahrscheinlichkeit streben. Somit strebt auch der arithmetische Mittelwert der Versuchsserie gegen den Erwartungswert der Zufallsvariablen.

$$\bar{x} = \boldsymbol{x_1 \cdot h_1 + x_2 \cdot h_2 + \cdots + x_k \cdot h_k}$$

Für die **relativen Häufigkeiten** setzen wir nun die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k_i)$ ein. $x_1, \dots, x_n$ geben die Werte der Zufallsvariablen $k_1, \dots, k_n$ an.

Es gilt: Erwartungswert $E(X) = \mu = k_1 \cdot P(X = k_1) + k_2 \cdot P(X = k_2) + \cdots + k_n \cdot P(X = k_n)$

μ … griechischer Buchstaben „MÜ"

Analog gilt dies für die Varianz und Standardabweichung.
Bei einer sehr, sehr großen Versuchsreihe strebt die empirische Standardabweichung gegen die Standardabweichung der Zufallsvariable X (analog für empirische Varianz und Varianz).

- Varianz $V(X)$ der Zufallsvariable:

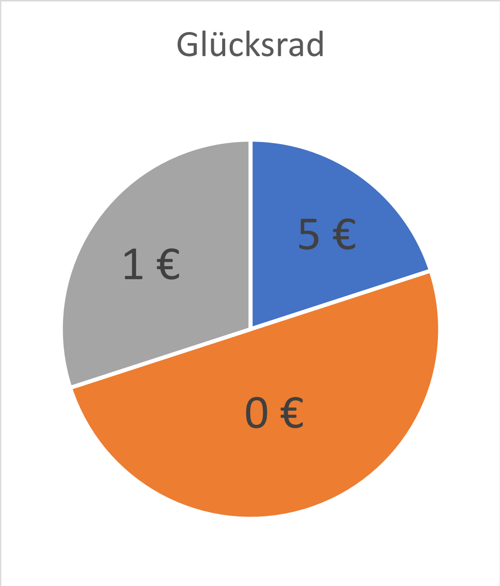
  $$V(X) = \sigma^2 = (k_1 - \mu)^2 \cdot P(X = k_1) + (k_2 - \mu)^2 \cdot P(X = k_2) + \cdots + (k_n - \mu)^2 \cdot P(X = k_n)$$

- Die Zahl „SIGMA" $\sigma = \sqrt{V(X)}$ heißt Standardabweichung der Zufallsvariable X

Bemerkung:
- Die **Standardabweichung** gibt die **durchschnittliche Entfernung** vom **Erwartungswert E(X)** an.
- Die **Varianz** gibt die **quadrierte durchschnittliche Entfernung** vom **Erwartungswert E(X)** an.

Begriffe in der beschreibenden Statistik	Begriffe in der Wahrscheinlichkeitsrechnung
Relative Häufigkeit	Wahrscheinlichkeit
Variable – Merkmal	Zufallsvariable
Arithmetischer Mittelwert	Erwartungswert
Empirische Varianz	Varianz
Empirische Standardabweichung	Standardabweichung

Musterbeispiel: Bei einem Glücksrad beträgt der Einsatz pro Spiel 2 €. Martin versucht sein Glück:



Zu 50 % geht Martin leer aus (0 €), zu 30 % gewinnt er zumindest 1 € von seinem Einsatz zurück & zu 20 % bekommt er den Hauptgewinn: 5€.

Fragestellung 1: Berechne den Erwartungswert dieses Glücksrades. Die Zufallsvariable X nimmt dabei den Wert der Auszahlungsbetrages an (0, 1, 5).

Ist es ratsam, bei diesem Glücksspiel sein Glück zu versuchen?

- $P(X = 0) = 0{,}5$
- $P(X = 1) = 0{,}3$
- $P(X = 5) = 0{,}2$

$\mu = 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}2 = 1{,}3$

Der Erwartungswert beträgt 1,3.

Antwort: Im Durchschnitt gewinnt der Spieler 1,3 €. Nachdem der Einsatz 2 € beträgt, verliert er jedoch im Schnitt 70 Cent. Es ist nicht ratsam, dieses Glücksspiel zu spielen.

Bemerkung: Spiele, bei denen der Erwartungswert gleich dem Einsatz ist, werden als faire Spiele bezeichnet.

Fragestellung 2: Berechne die Varianz und die Standardverteilung.

$$V(X) = (0 - 1{,}3)^2 \cdot 0{,}5 + (1 - 1{,}3)^2 \cdot 0{,}3 + (5 - 1{,}3)^2 \cdot 0{,}2$$

$$V(X) = 0{,}845 + 0{,}027 + 2{,}738 = 3{,}61$$

$$\sigma = \sqrt{3{,}61} = 1{,}9$$

Bsp. 7) Ein zehnseitiger Würfel mit den Augenzahlen 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4 wird einmal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt die Augenzahl an.

a. Ermittle die Wahrscheinlichkeitsverteilung.
b. Berechne den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung der Zufallsvariable X.

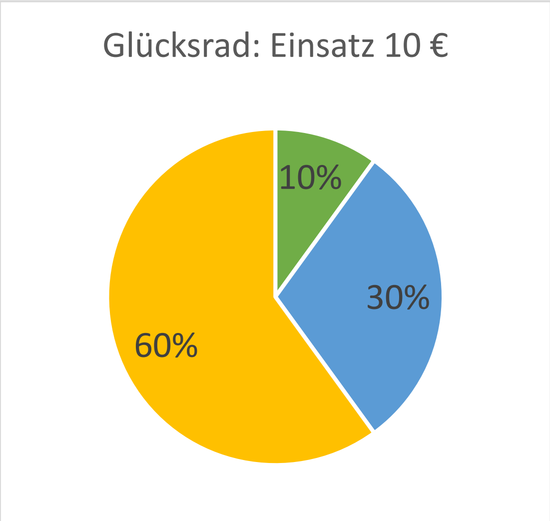
Bsp. 8) Im Casino erhältst du beim Spiel Roulette für das richtige Setzen einer Farbe (Schwarz/Rot) den doppelten Betrag zurück. Robin setzt 20 € auf die Farbe Schwarz. Die Zufallsvariable X gibt den Auszahlungsbetrag an.

a. Vervollständige die Tabelle:

Zufallsvariable	**Wahrscheinlichkeit**
Robin verliert: $X = 0$	
Robin gewinnt: $X = 40$	

b. Berechne den Erwartungswert der Zufallsvariable X. Interpretiere im gegebenen Sachzusammenhang.

Bsp. 9a) Bei einem Glücksrad kann man auf folgende Farben setzen: Der Einsatz beträgt 10€. Die Zufallsvariable X gibt den Gewinn beim Drehen des Glücksrades an.

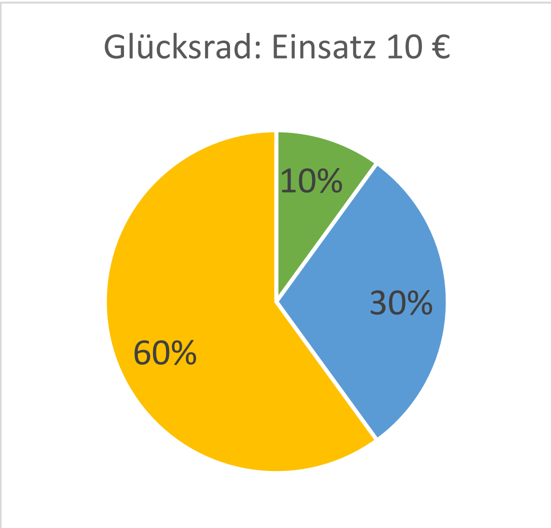


Zu 60 % geht man beim Glücksrad leer aus. Zu 30 % erhält man 15 €. Zu 10 % erhält der Spieler 30 €.

a. Berechne den **Erwartungswert** dieses Glücksrades. Die Zufallsvariable X nimmt dabei den Wert des Gewinns an (0, 15, 30).
Ist es ratsam, bei diesem Glücksspiel zu spielen?

b. Berechne die Varianz und Standardabweichung der Zufallsvariable X.

Bsp. 9b) Bei einem weiteren Glücksrad sind die **Gewinnmöglichkeiten** deutlich anders:



Zu 60 % geht man bei diesem Glücksrad leer aus. Zu 30 % erhält man 1 €. Zu 10 % erhält der Spieler 120 €.

a. Berechne den **Erwartungswert** dieses Glücksrades. Die Zufallsvariable X nimmt dabei den Wert des Gewinns an (0, 1, 120).
Vergleiche den Erwartungswert mit dem ersten Glücksrad aus Aufgabe 24a. Ist es sinnvoll, hier sein Glück zu versuchen? Welches Risiko besteht?

b. Berechne die Varianz und Standardabweichung der Zufallsvariable X. Interpretiere diese Werte mit dem vorherigen Glücksrad.

Bsp. 10) Bei einer Verlosung werden 15 000 Lose zu je 5 € verkauft. Der Slogan dieser Verlosung ist *„man gewinnt mit jedem Los einen Geldbetrag – deine Chance auf 10 000€“*. Ein Mathematiker ist skeptisch und hat sich die Details der Verlosung genauer angeschaut. Folgende Informationen hat er von den Initiatoren bekommen:

Im **Lostopf** gewinnt man mit…

- 8000 Losen 1 €,
- 6000 Losen 2 €,
- 500 Losen 5 €,
- 499 Losen 10 €,
- und einem einzigen Los: 10 000 €.

Berechne den **Erwartungswert** der Zufallsvariable X (X gibt den Auszahlungsbetrag an).

Interpretiere den Erwartungswert im gegebenen Sachzusammenhang. Gib ein **Kommentar** zum Slogan ab.

Bsp. 11) Bei einem Glücksrad gewinnt man mit einer Wahrscheinlichkeit von…

- 50 %: 0 €
- 30 %: 5 €
- 20 %: 15 €

Fragestellung: Wie groß darf der Einsatz maximal sein, dass das Glücksrad für einen Spieler / eine Spielerin vorteilhaft ist?

Bsp. 12) Bei einem weiteren Glücksrad gewinnt man mit einer Wahrscheinlichkeit von…

- 20 %: 1 €
- 30 %: 2 €
- 50 %: x €

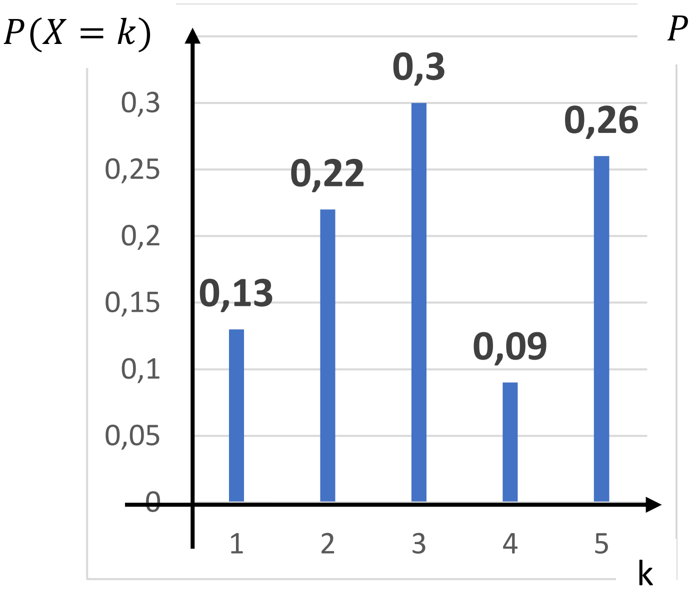
Fragestellung: Der Einsatz beträgt 3€. Wie groß muss die Variable x sein, dass das Glücksrad für den Spieler / die Spielerin vorteilhaft ist?

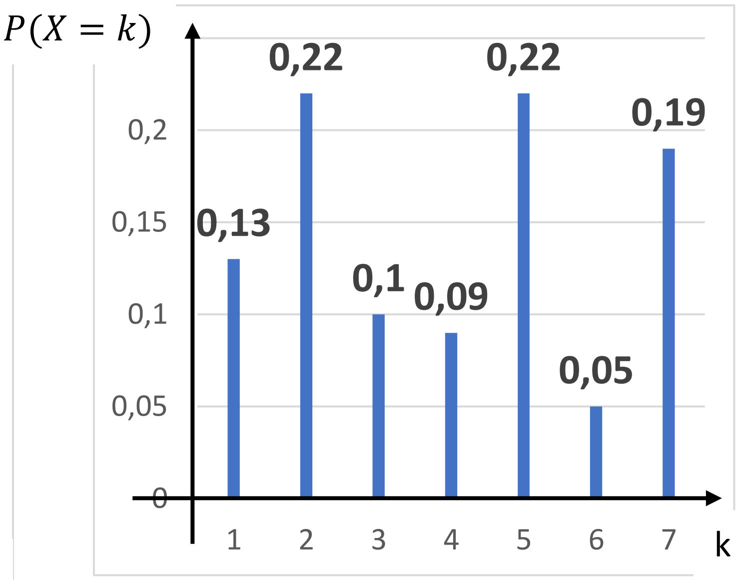
Bsp. 13) Die Seitenflächen eines Würfels sind mit 2, 6, 9, 14, 18 und x beschriftet. Die sechste Seitenfläche ist leider bedeckt und somit unbekannt.

Die Zufallsvariable X gibt die Augenzahl des Würfels an.

a. Es ist bekannt, dass der Erwartungswert des Würfels 15 ist. Welche Zahl muss somit auf der verdeckten Seitenfläche stehen?
b. Berechne anschließend die Varianz und die Standardabweichung der Zufallsvariable X.

Bsp. 14) Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariable X. Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsvariable X.





Aussagen zu einer Zufallsvariablen* - 1_544, WS3.1, 2 aus 5

Die Zufallsvariable X kann nur die Werte 10, 20 und 30 annehmen. Die nachstehende Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an, wobei a und b positive reelle Zahlen sind.

k	10	20	30
$P(X = k)$	a	b	a

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

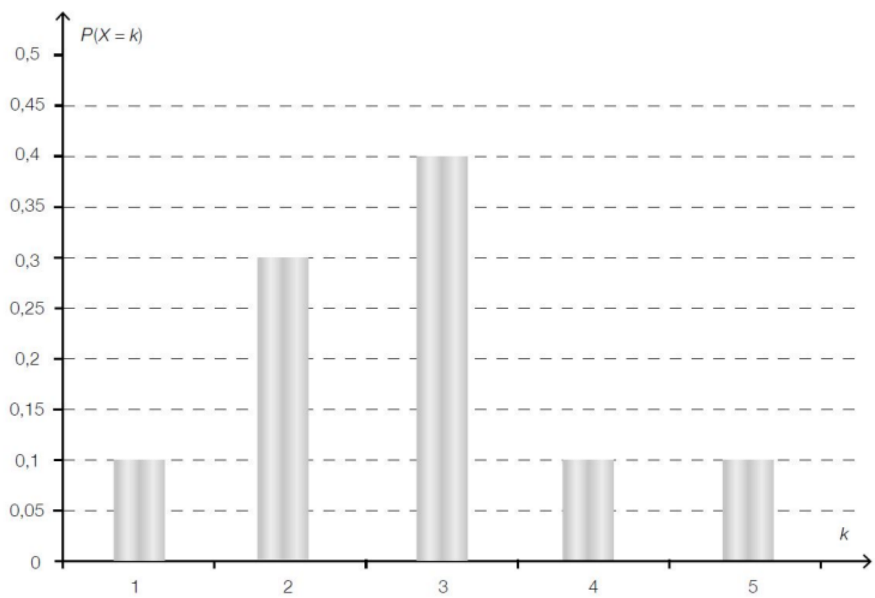
Der Erwartungswert von X ist 20.	☐
Die Standardabweichung von X ist 20.	☐
$a + b = 1$	☐
$P(10 \leq X \leq 30) = 1$	☐
$P(X \leq 10) = P(X \geq 10)$	☐

Erwartungswert des Gewinns* - 1_399, WS3.1, Offenes Antwortformat

Bei einem Gewinnspiel gibt es 100 Lose. Der Lospreis beträgt € 5. Für den Haupttreffer werden € 100 ausgezahlt, für zwei weitere Treffer werden je € 50 ausgezahlt und für fünf weitere Treffer werden je € 20 ausgezahlt. Für alle weiteren Lose wird nichts ausgezahlt.
Unter *Gewinn* versteht man *Auszahlung minus Lospreis*.
Berechnen Sie den Erwartungswert des Gewinns aus der Sicht einer Person, die ein Los kauft!

Erwartungswert* - 1_375, WS3.1, Offenes Antwortformat

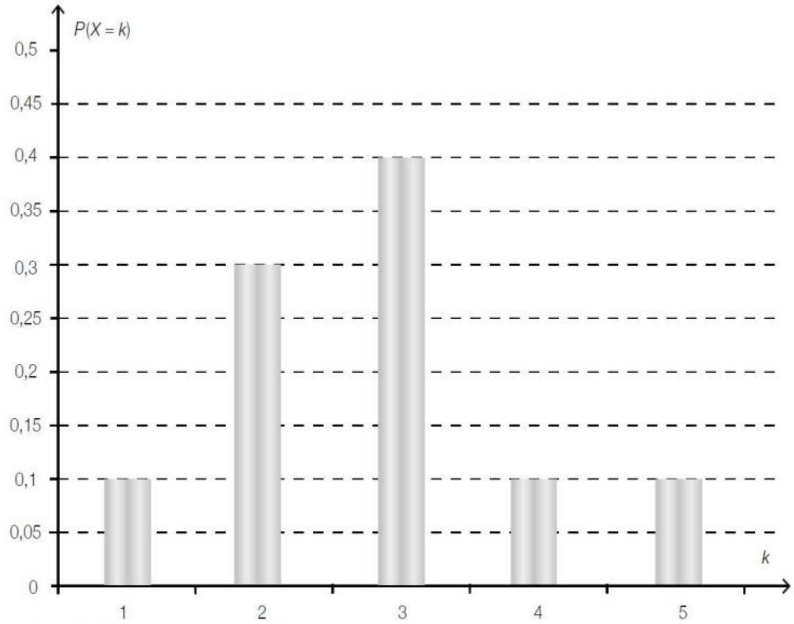
Die nachstehende Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen X, bei der jedem Wert k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) die Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$ zugeordnet wird.



Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$ der Zufallsvariablen X!

Erwartungswert* - 1_447, WS3.1, Offenes Antwortformat

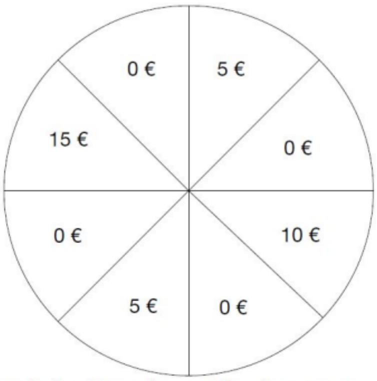
Die nachstehende Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen X, die die Werte k = 1, 2, 3, 4, 5 annehmen kann.



Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$!

Gewinn beim Glücksrad* - 1_423, WS3.1, Offenes Antwortformat

Das unten abgebildete Glücksrad ist in acht gleich große Sektoren unterteilt, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Für einmaliges Drehen des Glücksrades muss ein Einsatz von 5 € gezahlt werden. Die Gewinne, die ausbezahlt werden, wenn das Glücksrad im entsprechenden Sektor stehen bleibt, sind auf dem Glücksrad abgebildet.



Das Glücksrad wird einmal gedreht. Berechnen Sie den entsprechenden Erwartungswert des Reingewinns G (in Euro) aus der Sicht des Betreibers des Glücksrades! Der Reingewinn ist die Differenz aus Einsatz und Auszahlungsbetrag.

Gewinnspiel* - 1_900, WS3.1, Offenes Antwortformat

Auf dem Etikett einer Getränkeflasche ist ein Code für ein Gewinnspiel aufgedruckt.

- Die Wahrscheinlichkeit, mit diesem Code einen Gewinn von € 10 zu erzielen, beträgt 1 %.
- Die Wahrscheinlichkeit, mit diesem Code einen Gewinn von € 2 zu erzielen, beträgt 4 %.

Es gibt keine weiteren Gewinne.

Die Zufallsvariable X gibt den Gewinn (in €) für einen Code an.

Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$.

Spielkarten* - 1_731, WS3.1, Halboffenes Antwortformat

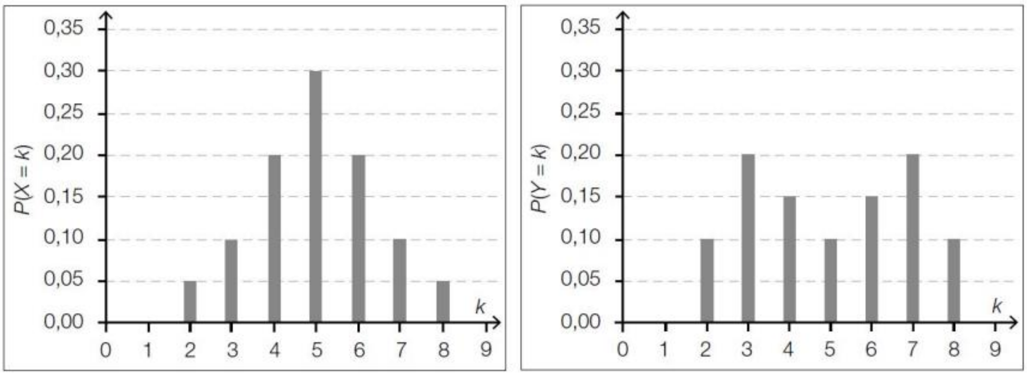
Fünf Spielkarten (drei Könige und zwei Damen) werden gemischt und verdeckt auf einen Tisch gelegt. Laura dreht während eines Spieldurchgangs nacheinander die Karten einzeln um und lässt sie aufgedeckt liegen, bis die erste Dame aufgedeckt ist.

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der am Ende eines Spieldurchgangs aufgedeckten Spielkarten an.
Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen X.

$E(X) =$ ______________________________________

Vergleich zweier Wahrscheinlichkeitsverteilungen* - 1_635, WS3.1, 2 aus 5

In den nachstehenden Diagrammen sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen zweier Zufallsvariablen X und Y dargestellt. Die Erwartungswerte der Zufallsvariablen werden mit $E(X)$ und $E(Y)$, die Standardabweichungen mit $\sigma(X)$ und $\sigma(Y)$ bezeichnet.



Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$E(X) = E(Y)$	☐
$\sigma(X) > \sigma(Y)$	☐
$P(X \leq 3) < P(Y \leq 3)$	☐
$P(3 \leq X \leq 7) = P(3 \leq Y \leq 7)$	☐
$P(X \leq 5) = 0{,}3$	☐

Sicherheitskontrolle* (a) - 2_096, WS2.3 WS3.1, Halboffenes Antwortformat Offenes Antwortformat

Beim Einlass in ein bestimmtes Stadion findet bei einer Veranstaltung eine maximal dreistufige Sicherheitskontrolle bei Personen statt, um mitgeführte Gegenstände zu kontrollieren und unzulässige Gegenstände zu erfassen. Liefert die erste Stufe dieser Sicherheitskontrolle kein eindeutiges Ergebnis, dann wird die zweite Stufe der Sicherheitskontrolle durchgeführt. Liegt dann noch immer kein eindeutiges Ergebnis vor, kommt die dritte Stufe der Sicherheitskontrolle zum Einsatz.

Die erste und die zweite Stufe der Sicherheitskontrolle dauern jeweils 15 s, die dritte Stufe dauert 300 s. Ein eindeutiges Ergebnis liefert dabei die erste Stufe mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 %, die zweite Stufe mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 %.

a) Die Zufallsvariable X beschreibt die Dauer d (in s) der Sicherheitskontrolle bei einer Person. Wartezeiten, die eventuell auftreten können, werden nicht berücksichtigt.

1) Ergänzen Sie in der nachstehenden Tabelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X.

d			
$P(X = d)$			

2) Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$.