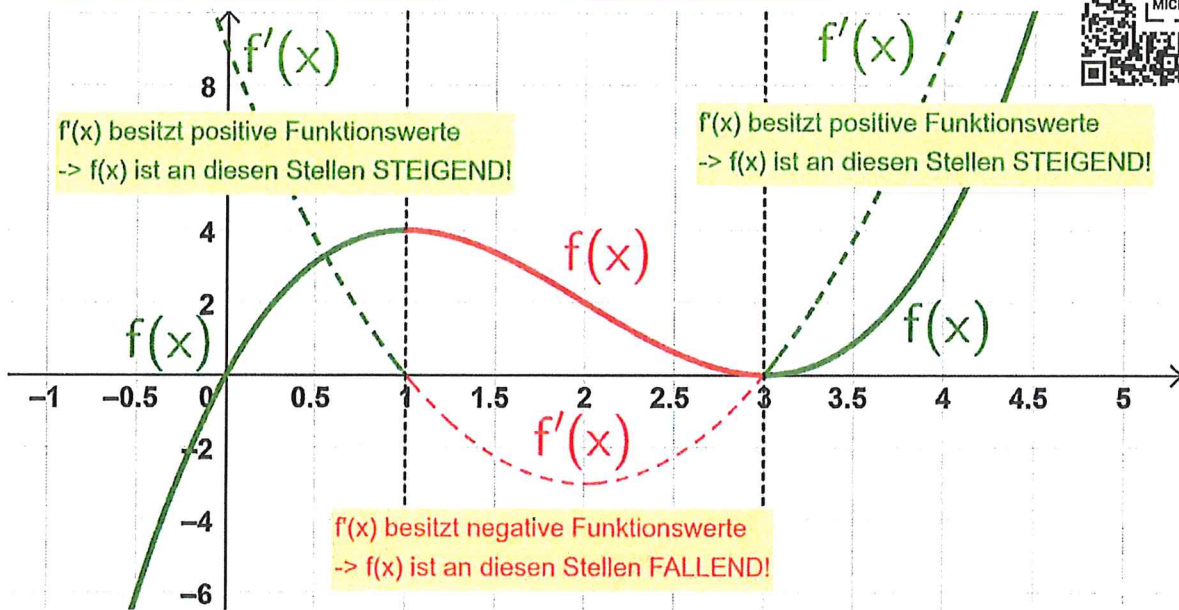


LÖSUNGEN: EXTREMUM

Zusammenhang Graph: Ursprüngliche Funktion und 1. Ableitung

Video 11/17



- $(-\infty; 1)$: $f'(x)$ ist zwar fallend, besitzt aber stets positive Funktionswerte. Es gilt in diesem Intervall: $f'(x) > 0$. Dies hat zur Folge, dass die ursprüngliche Funktion $f(x)$ in diesem Intervall steigend ist.

Viele SchülerInnen haben bei dieser Thematik **Vorstellungsprobleme**, warum $f(x)$ steigend ist, obwohl $f'(x)$ fallend ist. Denke immer an folgendes:

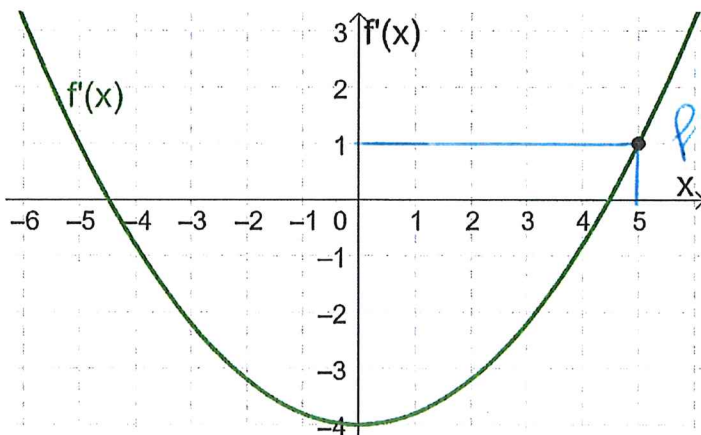
Der Funktionswert der ersten Ableitung $f'(x)$ an der Stelle x gibt die Steigung der ursprünglichen Funktion $f(x)$ an der Stelle x an.

Warum ist $f'(x)$ in diesem Intervall aber fallend?!

Welche Auswirkungen hat dies nun, wenn $f'(x)$ fallend ist. Dies hat zur Folge, dass die Steigung der ursprünglichen Funktion von Stelle zu Stelle abnimmt. $f(x)$ steigt in diesem Intervall stets flacher an, bis zur Stelle $x = 1$, an der die Steigung 0 ist (=Hochpunkt).

- $(1; 3)$: $f'(x)$ hat durchgehend negative Funktionswerte. Es gilt in diesem Intervall: $f'(x) < 0$. Die ursprüngliche Funktion $f(x)$ ist fallend.
- $(3; +\infty)$: $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ ist in diesem Intervall steigend.

Bsp. 1) Gegeben ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$. Der Punkt $P = (3|7)$ liegt auf dem Graphen der Funktion f . Bestimme die Gleichung der Tangente der Funktion f durch den Punkt P .



$$\begin{aligned}
 P'(3) &= 1 & P &= (3|7) \\
 t: y &= 1x + d \\
 7 &= 1 \cdot 3 + d \quad | -3 \\
 4 &= d \\
 t: y &= x + 4
 \end{aligned}$$

2. Die erste Ableitung $f'(x)$:

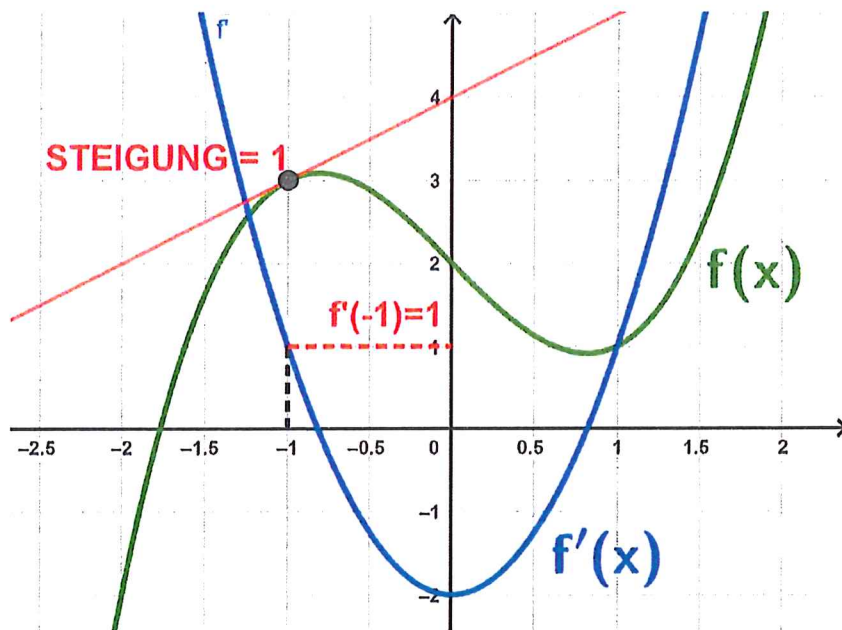
$f'(x)$... gibt die **Steigung** der ursprünglichen Funktion $f(x)$ an der Stelle x an!

Geometrisch bedeutet die erste Ableitung die **Steigung der Tangente** im jeweiligen Punkt!

Mit der ersten Ableitung erhalten wir die Steigung **in einem einzigen (!!!) Punkt (an der Stelle x)**, da sich die Steigung stetig ändern kann (Ausnahme: Lineare Funktionen: Steigung ist immer gleich).

Beispiel: $f(x) = x^3 - 2x + 2 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2$

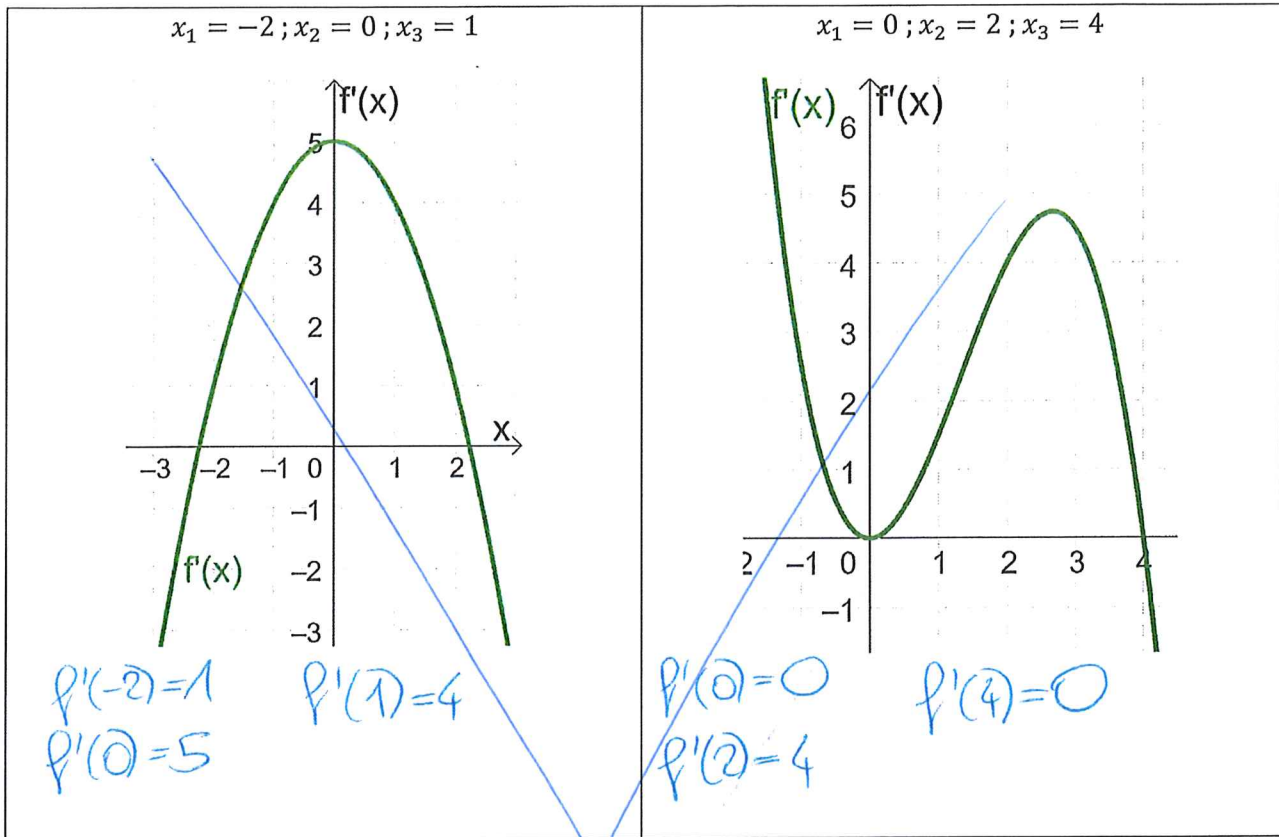
Ist z.B. $f'(-1) = 1$, so steigt die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = -1$ im Punkt $(-1|3)$ um den Wert 1. Ist $f'(0) = -2$, dann fällt die Funktion $f(x)$ im Punkt $(0|2)$ um den Wert -2.



Der Funktionswert der ersten Ableitung $f'(x)$ an der Stelle x gibt die Steigung der ursprünglichen Funktion $f(x)$ an der Stelle x an.

- Ist $f'(x) > 0$: Dann **steigt** die Funktion $f(x)$ an der Stelle x bzw. dem Punkt $(x, f(x))$.
Betrachte den blauen Graph von $f'(x)$: Überall, wo dieser Graph positive Funktionswerte besitzt, ist $f(x)$ steigend.
Im Intervall von $[-1,5; 1]$ ist $f'(x)$ zwar fallend (aber noch immer >0), die zugehörige Funktion $f(x)$ aber stets steigend (Steigung nimmt aber tendenziell ab).
- Ist $f'(x) = 0$: Dann ist die Funktion $f(x)$ an der Stelle x **konstant** bzw. hat **keine Steigung**.
- Ist $f'(x) < 0$: Dann **fällt** die Funktion $f(x)$ an der Stelle x bzw. dem Punkt $(x, f(x))$.

Bsp. 23) Gegeben ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$. Bestimme die Steigung der ursprünglichen Funktion $f(x)$ an den gesuchten Stellen.



Lokale Extremstellen

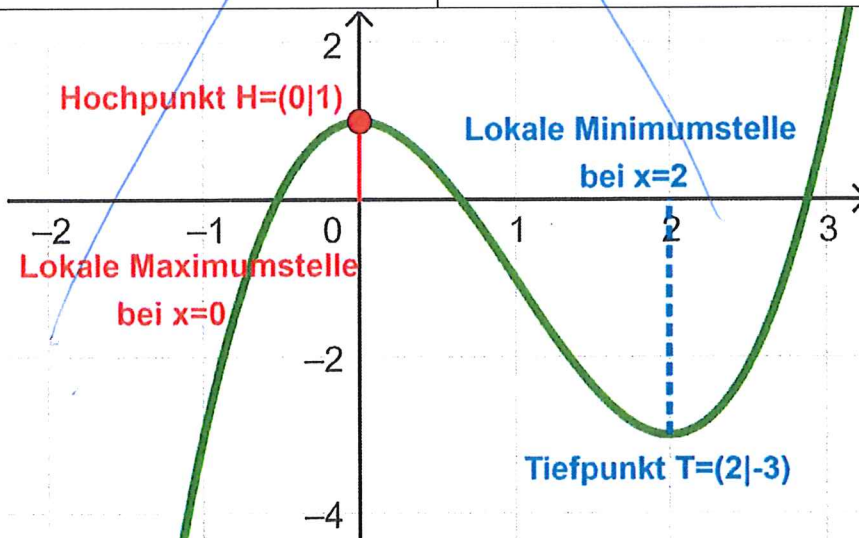
Bei lokalen Extremstellen findet stets ein **Monotoniewechsel** statt!!!

Lokale Minimumstelle

- **Monotoniewechsel:** fallend \rightarrow steigend
- **Bemerkung:** Die Minimumstelle ist nur diejenige **Stelle** (x-Wert), bei der dieses Minimum eintritt. Den zugehörigen Punkt nennt man **Extrempunkt** bzw. **Tiefpunkt**.

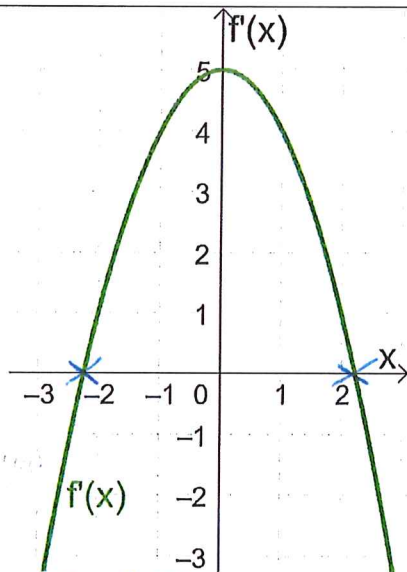
Lokale Maximumstelle

- **Monotoniewechsel:** steigend \rightarrow fallend
- **Bemerkung:** Die Maximumstelle ist nur diejenige **Stelle** (x-Wert), bei der dieses Maximum eintritt. Den zugehörigen Punkt nennt man **Extrempunkt** bzw. **Hochpunkt**.



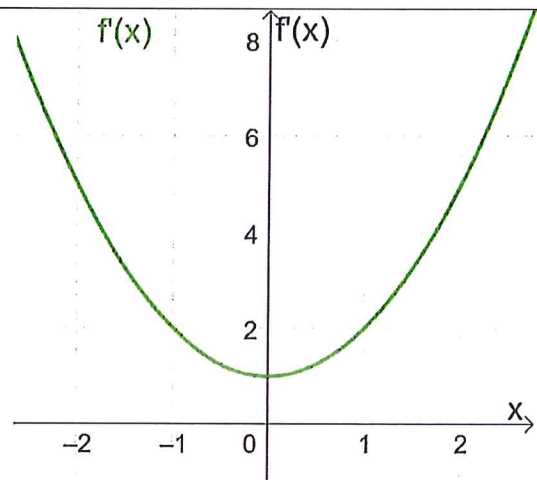
Bsp. 3) Gegeben ist der Graph einer Ableitungsfunktion $f'(x)$.

- Bestimme die möglichen Extremstellen der Funktion f und gib auch an, welcher Art sie sind.
- Bestimme das Monotonieverhalten der ursprünglichen Funktion $f(x)$.

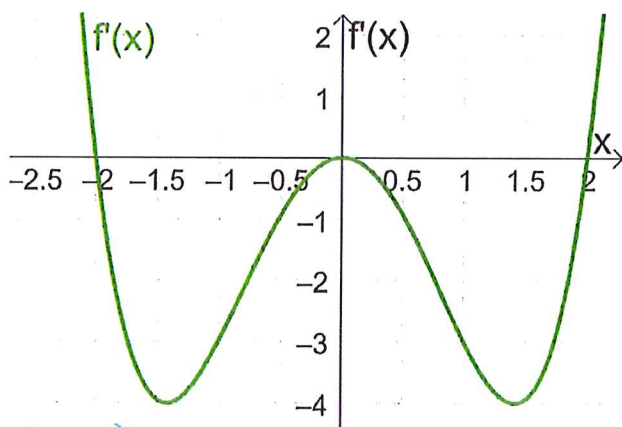


$\circ (-\infty; -2,3) : \text{fallend}$
 $\circ (-2,3; 2,3) : \text{steigend}$
 $\circ (2,3; +\infty) : \text{fallend}$

$x = -2,3 \downarrow \uparrow$
 Minimumstelle
 $x = 2,3 \uparrow \downarrow$
 Maximumstelle

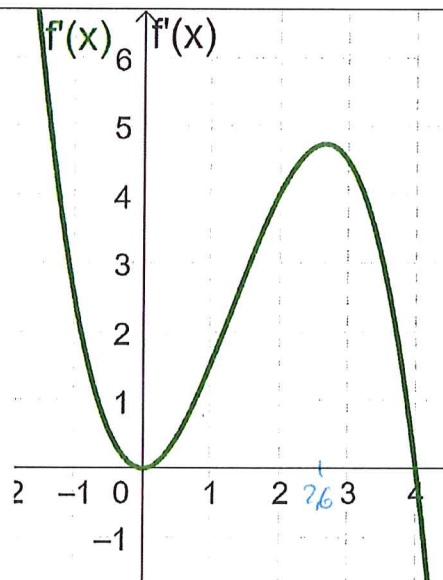


$\circ (-\infty; +\infty) : \text{str. mon. steigend!}$
 $\circ \text{Keine lokalen Extremstellen}$



$\circ (-\infty; -2) : \text{str. mon. steigend}$
 $\circ (-\infty; 2) : \text{str. mon. fallend}$
 bei $x = 0$: Sattelstelle
 $\circ (2; +\infty) : \text{str. mon. steigend}$

$x_1 = -2 \dots \text{Maximumstelle}$
 $x_2 = 2 \dots \text{Minimumstelle}$

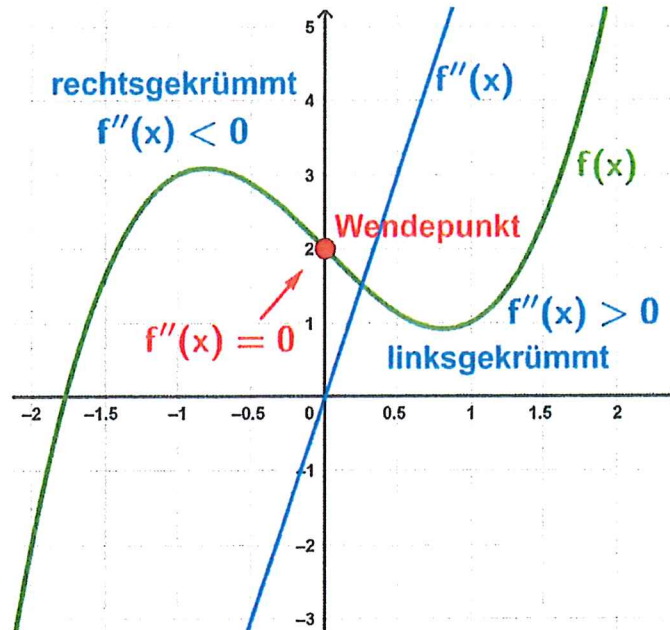


$\circ (-\infty; 4) : \text{str. mon. steigend}$
 $x = 0 \dots \text{Sattelstelle}$
 $\circ (4; +\infty) : \text{str. mon. fallend}$

$x = 4 \dots \text{Maximumstelle!}$

3. Die zweite Ableitung $f''(x)$:

$f''(x)$... gibt die Krümmung der ursprünglichen Funktion $f(x)$ an der Stelle x an.



- Ist $f''(x) > 0$: Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x linksgekrümmt.
- Ist $f''(x) = 0$: Die Funktion $f(x)$ weist an der Stelle x keine Krümmung auf.
- Ist $f''(x) < 0$: Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x rechtsgekrümmt.

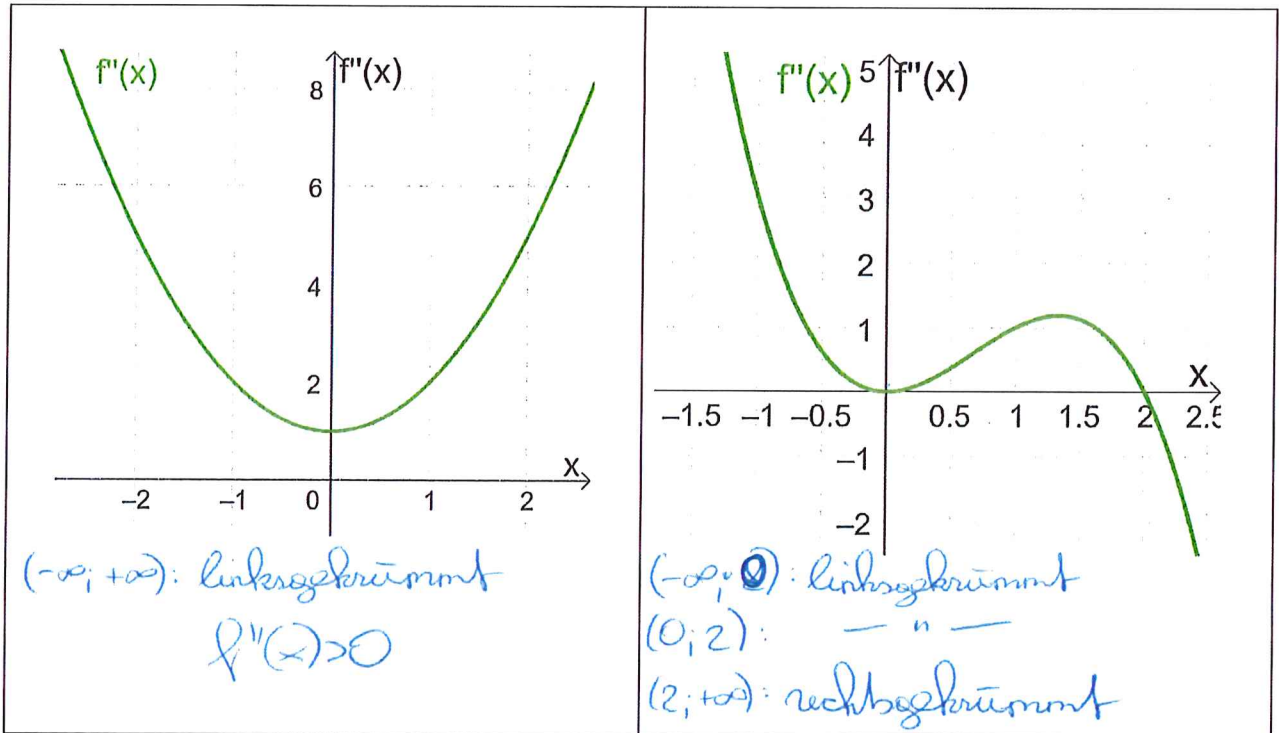
Beispiel: $f''(x) = 6x \rightarrow f''(2) = 12 \rightarrow$ Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle $x = 2$ linksgekrümmt.

Gegeben ist eine Funktion $f(x)$. Gib folgendes an:

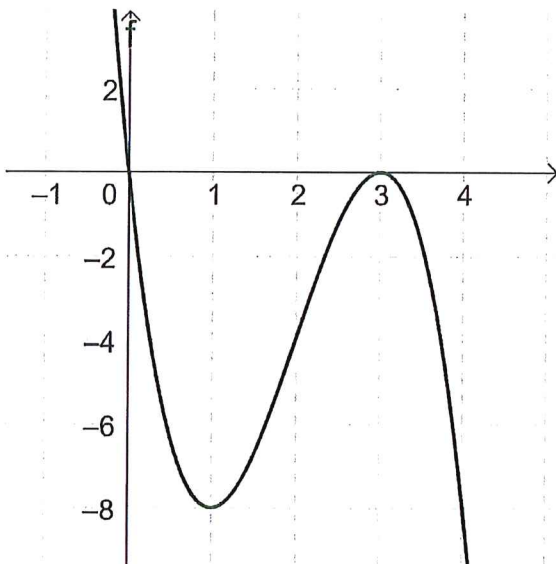
- (1) Die erste Ableitung $f'(x)$ – Was gibt $f'(x)$ an? \rightarrow STEIGUNG von $f(x)$ an der Stelle x
- (2) Die zweite Ableitung $f''(x)$ – Was gibt $f''(x)$ an? \rightarrow KRÜMMUNG — " —
- (3) Steigung an den Stellen $x_1 = 3$ und $x_2 = 7$
- (4) Krümmung an den Stellen $x_1 = -4$ und $x_2 = 8$
- (5) Funktionswert & Punkt an den Stellen $x_1 = -5$ und $x_2 = 10$

<p>a. $f(x) = x^2 - 5x$ $f'(x) = 2x - 5$ $f''(x) = 2$</p>	<p>b. $f(x) = 3x^4 + 6x^3 - 2$ $f'(x) = 12x^3 + 18x^2$ $f''(x) = 36x^2 + 36x$</p>	<p>c. $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 7x + 1$ $f'(x) = -6x^2 + 10x - 7$ $f''(x) = -12x + 10$</p>
<p>③ $f'(3) = 1$ $f'(7) = 9$</p>	<p>③ $f'(3) = 486$ $f'(7) = 4998$</p>	<p>③ $f'(3) = -31$ $f'(7) = -231$</p>
<p>④ $f''(-4) = 2$ $f''(8) = 2$</p>	<p>④ $f''(-4) = 432$ $f''(8) = 2592$</p>	<p>④ $f''(-4) = 58$ $f''(8) = -86$</p>
<p>⑤ $f(-5) = 50 \Rightarrow P_1 = (-5 50)$ $f(10) = 50 \Rightarrow P_2 = (10 50)$</p>	<p>⑤ $f(-5) = 1123$ $P_1 = (-5 1123)$ $f(10) = 35998$ $P_2 = (10 35998)$</p>	<p>⑤ $f(-5) = 411$ $P_1 = (-5 411)$ $f(10) = -1569$ $P_2 = (10 -1569)$</p>

Bsp. 5) Gegeben ist der Graph der zweiten Ableitung $f''(x)$. Gib das Krümmungsverhalten der ursprünglichen Funktion $f(x)$ an.



Bsp. 6) Gegeben ist der Graph einer Funktion $f(x)$. Kreuze alle zutreffende/n Aussagen an.



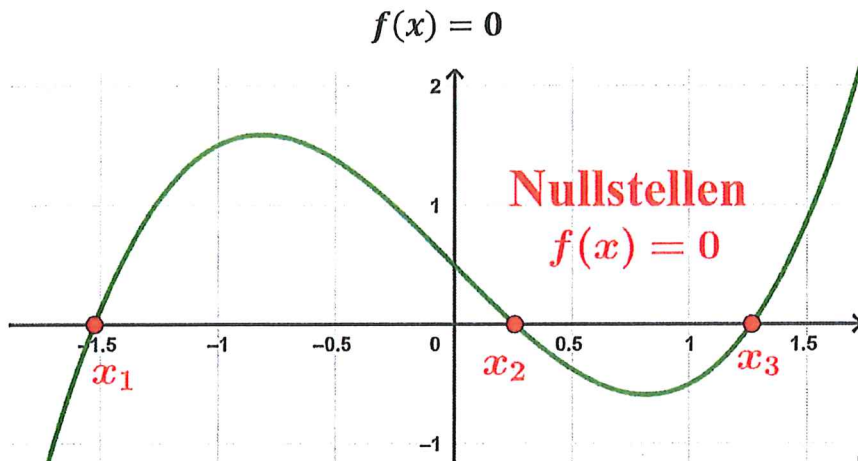
$f'(0) < 0$	<input checked="" type="checkbox"/>
$f'(3) = 0$ & $f''(3) < 0$	<input checked="" type="checkbox"/>
$f''(2) = 0$ & $f'''(2) \neq 0$	<input checked="" type="checkbox"/>
$f'(1) = 0$ & $f''(1) < 0$	<input type="checkbox"/>
$x = 3$ ist eine lokale Maximumstelle	<input checked="" type="checkbox"/>
$f(1) < 0$	<input checked="" type="checkbox"/>
$f''(3) > 0$	<input type="checkbox"/>
$f(3) = 0$ & $f'(3) = 0$	<input checked="" type="checkbox"/>
$f(2) > 0$	<input type="checkbox"/>
$f'(2,5) > 0$	<input checked="" type="checkbox"/>

7. Anwendungen von $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$:

1. Bestimmung der Nullstellen:

Nullstellen sind Stellen, an denen die Funktion die x-Achse schneidet (d.h. an denen der Funktionswert gleich 0 ist!)

Mathematisch können Nullstellen ermittelt werden, wenn man die Funktion $f(x)$, die die Funktionswerte liefern, 0 setzt.



2. Bestimmung der Extremstellen:

[Video 12/17](#)



Wiederholung: Lokale Extremstellen

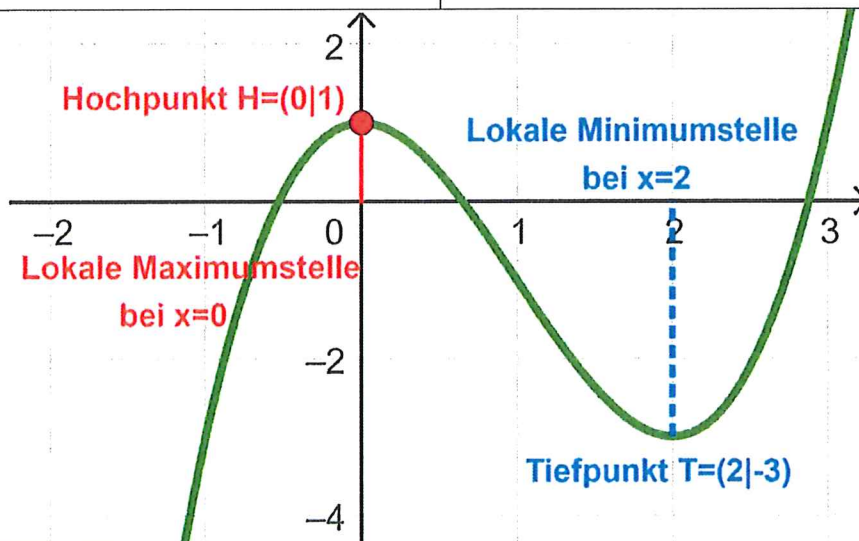
Bei lokalen Extremstellen findet stets ein **Monotoniewechsel** statt!!!

Lokale Minimumstelle

- **Monotoniewechsel:** fallend \rightarrow steigend
- Bemerkung: Die Minimumstelle ist nur diejenige **Stelle** (x-Wert), bei der dieses Minimum eintritt. Den zugehörigen Punkt nennt man **Extrempunkt** bzw. **Tiefpunkt**.

Lokale Maximumstelle

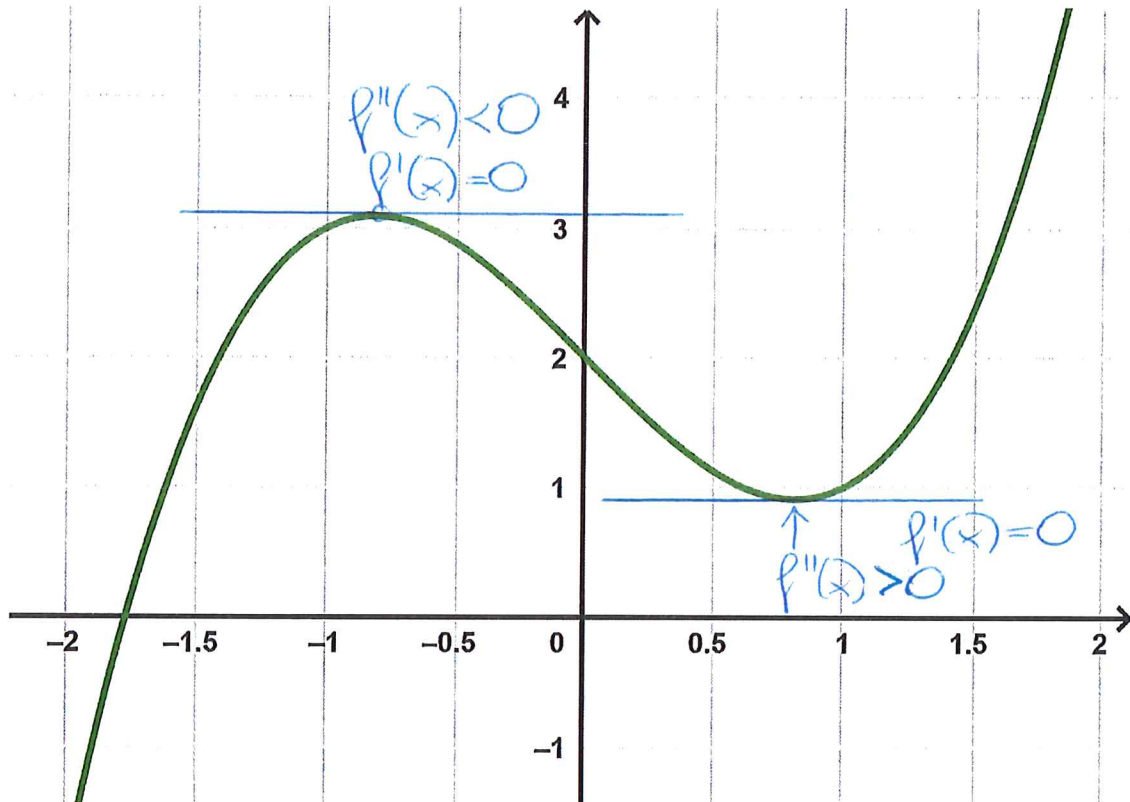
- **Monotoniewechsel:** steigend \rightarrow fallend
- Bemerkung: Die Maximumstelle ist nur diejenige **Stelle** (x-Wert), bei der dieses Maximum eintritt. Den zugehörigen Punkt nennt man **Extrempunkt** bzw. **Hochpunkt**.



Mit der **Differentialrechnung** möchten wir nun **rechnerisch** bestimmen, ob eine Funktion Extremstellen besitzt & um welche es sich dabei handelt.

Frage 1: Wie groß ist Steigung an Extremstellen?

Frage 2: Wie ist der Graph bei einem Hochpunkt bzw. Tiefpunkt gekrümmt?

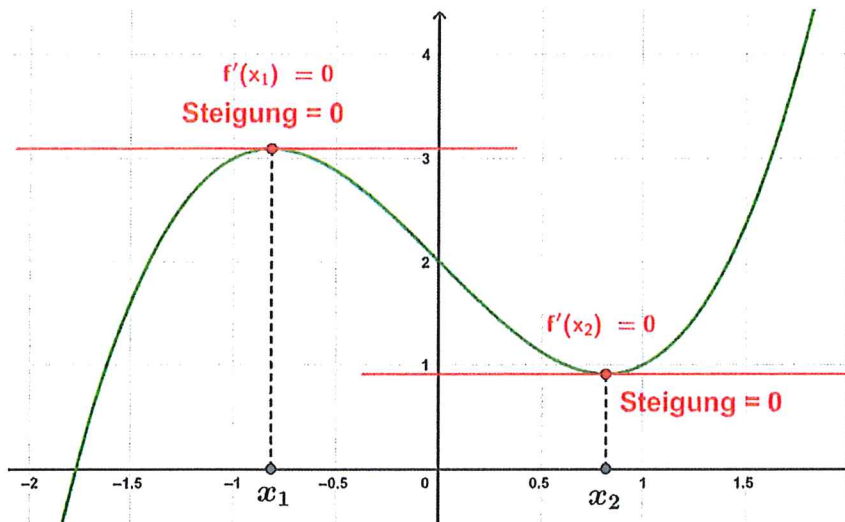


Schritt 1 (Notwendige Bedingung): An Extremstellen gibt es keine Steigung, da entweder der maximale, oder der minimale Wert erreicht ist:

$$f'(x) = 0$$

Mit dieser Gleichung erhältst du alle Stellen (x-Werte), an denen die Steigung 0 ist!

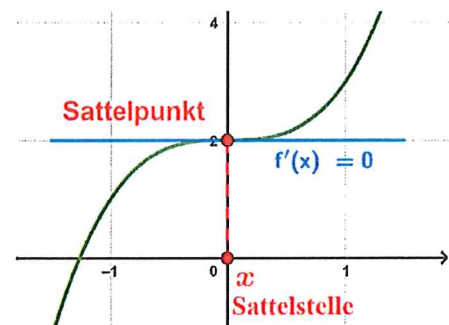
! Nicht mehr, aber auch nicht weniger !



Man kann noch nicht sagen, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt (oder sogar keines von beiden – siehe Ausnahme!)

Ausnahme:

An sogenannten **Sattelstellen** ist die Steigung der Polynomfunktion 0. Im Gegensatz zu einer Extremstelle ändert sich das Monotonieverhalten nicht (kein Extremum!).



Schritt 2 (Hinreichende Bedingung): Jetzt klären wir, ob es sich um eine Maximum-, Minimum- oder gar eine Sattelstelle handelt. Dafür musst du den Verlauf der Funktion betrachten. An all diesen Stellen ist die Steigung wie gesagt 0!

ABER: welchen Wert nimmt die Krümmung an – Ist die Funktion an dieser Stelle links- oder rechtsgekrümmt, oder herrscht gar keine Krümmung?

Setze dazu die in – Schritt 1 – erhaltenen x-Werte nun in die 2. Ableitung ein:

➔ Ist die Funktion rechtsgekrümmt ($f''(x) < 0$), kann es sich nur um eine Maximumstelle handeln!



Steigung = 0 : $f'(x) = 0$
Rechtsgekrümmt: $f''(x) < 0$

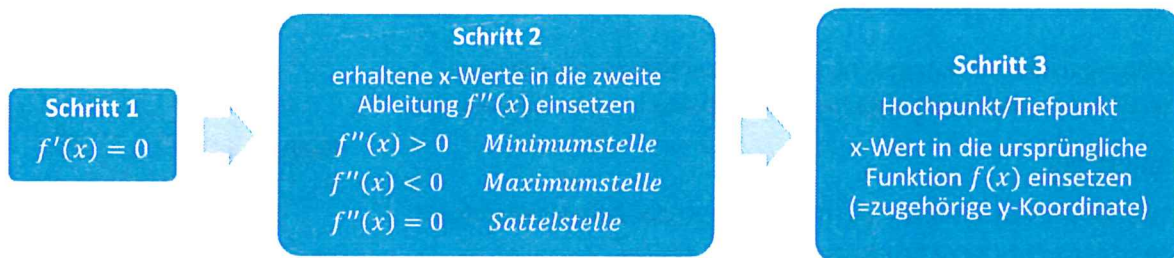
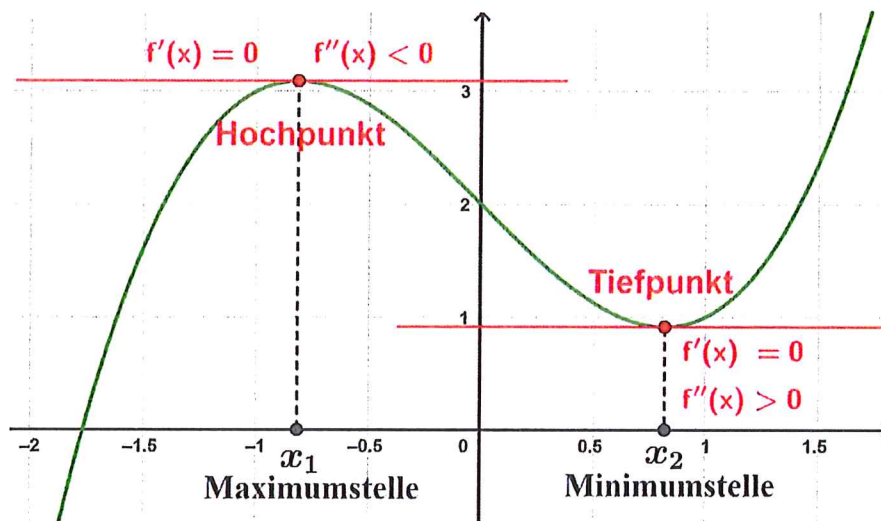
➔ Ist die Funktion linksgekrümmt ($f''(x) > 0$), kann es sich nur um eine Minimumstelle handeln!



Steigung = 0 : $f'(x) = 0$
Linksgekrümmt: $f''(x) > 0$

➔ Herrscht keine Krümmung vor ($f''(x) = 0$), -> Sattelstelle (Achtung: KEINE Extremstelle)

Schritt 3: Mit den Maximum- und Minimumstellen erhält man nur die x-Werte der Extrempunkte. Möchtest du die fehlende y-Koordinate zur Bestimmung des zugehörigen Punktes erhalten (Hoch- und Tiefpunkt), so musst du die x-Werte in die ursprüngliche Funktion $f(x)$ einsetzen!

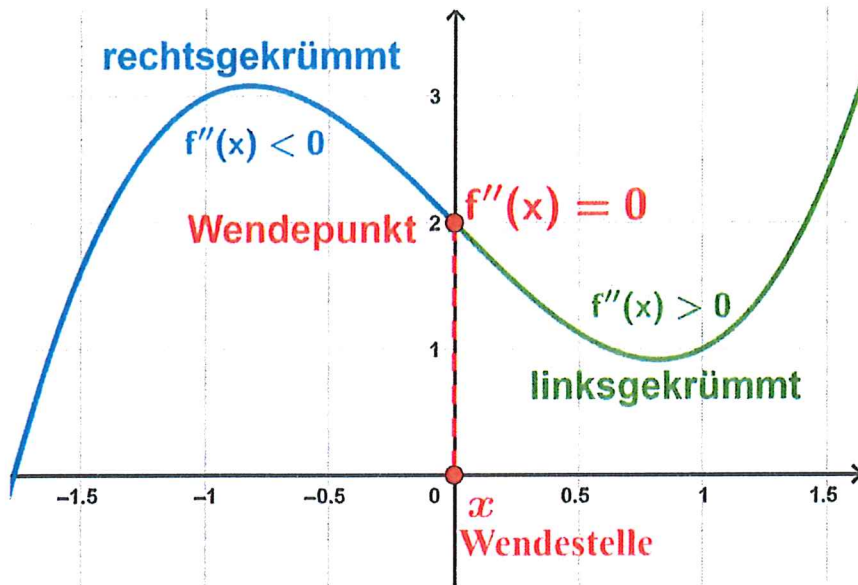


Bsp. 7) Gegeben ist eine Funktion f . Bestimme mit Hilfe der **Differentialrechnung** (Denk- und Rechenschritte müssen nachvollziehbar sein!) die Extremstellen. Gib nachweislich an, um welche Extremstellen es sich dabei handelt. Welche besonderen Punkte liegen an diesen Stellen? Gib die Koordinaten an.

<p>a. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ $f''(x) = 6x - 6$</p> <p>① $f'(x) = 0 : 3x^2 - 6x + 2 = 0$ $\Rightarrow x_1 \approx 0,42 ; x_2 \approx 1,58$</p> <p>② $f''(0,42) = -3,48 < 0$ MAX. $f''(1,58) = 3,48 > 0$ MIN.</p> <p>③ $f(0,42) = 0,38$ $H = (0,42 0,38)$ $f(1,58) \approx -0,38$ $T = (1,58 -0,38)$</p>	<p>b. $f(x) = -4x^2 + 10$ $f'(x) = -8x$ $f''(x) = -8$</p> <p>① $f'(x) = 0$ $-8x = 0 \quad :(-8)$ $x = 0$</p> <p>② $f''(0) = -8 < 0$ $\Rightarrow x = 0 \dots$ MAXIMUM</p> <p>③ $f(0) = 10$ $\Rightarrow H = (0 10)$</p>	<p>c. $f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 7$ $f'(x) = 8x^3 - 8x$ $f''(x) = 24x^2 - 8$</p> <p>① $f'(x) = 0 : 8x^3 - 8x = 0$ $\Rightarrow x_1 = -1 ; x_2 = 0 ; x_3 = 1$</p> <p>② $f''(-1) = 16 > 0$ MIN $f''(0) = -8 < 0$ MAX $f''(1) = 16 > 0$ MIN</p> <p>③ $f(-1) = -9 \Rightarrow T = (-1 -9)$ $f(0) = -7 \Rightarrow H = (0 -7)$ $f(1) = -9 \Rightarrow T = (1 -9)$</p>
--	--	--

3. Bestimmung der Wendestellen:

Video 13/17



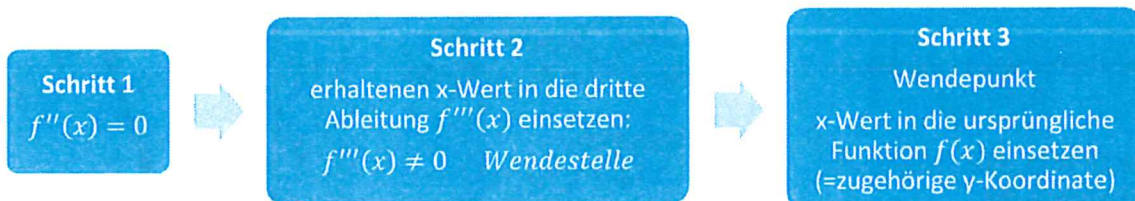
Schritt 1 (Notwendige Bedingung): An Wendestellen herrscht keine Krümmung, d.h.

$$f''(x) = 0$$

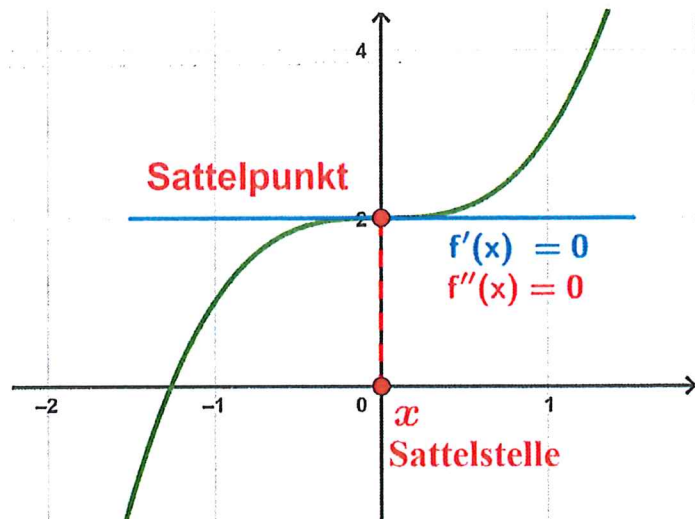
Bei Wendestellen ändert sich das Krümmungsverhalten (von linksgekrümmt auf rechtsgekrümmt, bzw. umgekehrt).

Schritt 2 (Hinreichende Bedingung): Um sicher zu gehen, dass es sich um eine Wendestelle handelt, muss folgende Bedingung gelten:

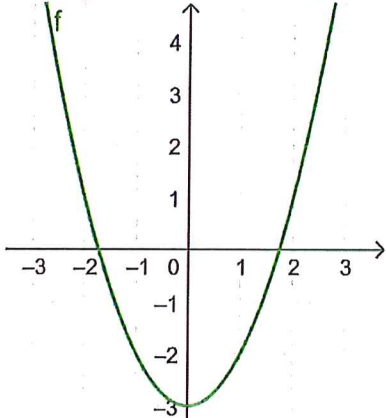
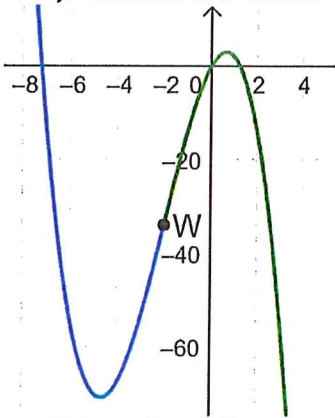
$$f'''(x) \neq 0$$



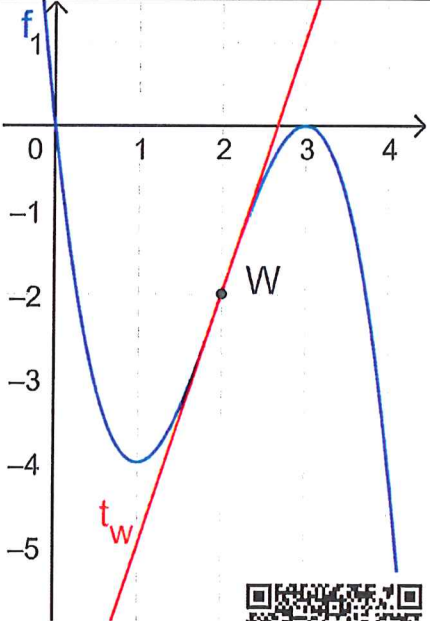
Bemerkung: Eine Sattelstelle ist ein Sonderfall einer Wendestelle, da zusätzlich die Steigung 0 ist! Eine Sattelstelle ist aber kein Extremum, da sich das Monotonieverhalten nicht ändert!



Kann eine Polynomfunktion 2. Grades einen Wendepunkt besitzen?!

Polynomfunktion 2. Grades	Polynomfunktion 3. Grades
 <p> $f(x) = x^2 - 3$ $f'(x) = 2x$ $f''(x) = 2 \rightarrow f''(x) = 0$ nicht lösbar! $f'''(x) = 0$ </p>	 <p> $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ $f''(x) = 6x - 12$ $f'''(x) = 6$ </p>
Eine Polynomfunktion 2. Grades besitzt keinen Wendepunkt (ist für alle Stellen gleich gekrümmt).	Eine Polynomfunktion 3. Grades besitzt stets einen Wendepunkt. Die hinreichende Bedingung $f'''(x) \neq 0$ wird aufgrund des 3. Grades erfüllt.

Bestimmung der Wendetangente

<p>1] Bestimmung des Wendepunktes $f''(x) = 0$ & $f'''(x) \neq 0$ $W = (x f(x))$</p> <p>2] Wendetangente: $t_w: y = kx + d$</p> <p>2.1] Bestimmung der Steigung k: $k = f'(x)$</p> <p>2.2] Bestimmung der Steigung d: Wendepunkt in die Funktionsgleichung der Wendetangente einsetzen & umformen.</p>	<p>Musterbeispiel:</p> <p> $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$ $f'(x) = -3x^2 + 12x + 9$ $f''(x) = -6x + 12$ $f'''(x) = -6$ </p> <p> $f''(x) = 0 \rightarrow x = 2$ $f'''(2) = -6 \neq 0 \checkmark$ $x = 2 \dots$ Wendestelle $f(2) = -2 \rightarrow W = (2 -2)$ </p> <p>Wendetangente: $t_w: y = kx + d$</p> <p> $k = f'(2) = 3$ $t_w: -2 = 3 \cdot 2 + d \quad -6$ $d = -8$ </p> <p>$t_w: y = 3x - 8$</p>	
---	--	---

Bsp. 8) Gegeben ist eine Funktion f.

[Video 14/17](#)



- Bestimme mit die Nullstellen.
- Bestimme mit Hilfe der **Differentialrechnung** (Denk- und Rechenschritte müssen nachvollziehbar sein!) die Extremstellen. Gib nachweislich an, um welche Extremstellen es sich dabei handelt. Welche besonderen Punkte liegen an diesen Stellen? Gib die Koordinaten an.
- Bestimme mit Hilfe der Differentialrechnung (Denk- und Rechenschritte!) die Wendestelle/n bzw. Wendepunkt/e. Gib (falls vorhanden) die Wendetangente/n an.

d. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	e. $f(x) = x^2 - 4$	f. $f(x) = x^4 - 2x^2$
g. $f(x) = x^3 + 1$	h. $f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 18x$	i. $f(x) = -x^4 + 8x^2 - 14$

Bsp. 9 Die Funktion $h(x) = -0,01x^2 + 0,70x$ beschreibt die Flugbahn eines Fußballs beim Abstoß eines Tormanns.

- x gibt die horizontale Entfernung (in Meter) des Fußballs vom Abschusspunkt an.
 - $h(x)$ gibt die Höhe des Fußballs (in Meter) nach x Metern an.
- a. Wähle einen passenden Definitionsbereich für dieses Beispiel. Video 15/17
 - b. Nach wie vielen Metern erreicht der Ball eine Höhe von 10m?
 - c. In welcher Höhe befindet sich der Fußball bei einer horizontalen Entfernung von 40m?
 - d. Bestimme mit Hilfe der **Differentialrechnung**, nach wie vielen Metern der Ball seine maximale Höhe erreicht. Zeige nachweislich, dass es sich um ein Maximum handelt.



Bsp. 10 Die Funktion $s(t)$ gibt die zurückgelegte Strecke eines Autos (Einheit: Meter) in Abhängigkeit der Zeit t in Sekunden an. Die Funktion $s(t)$ ist im Intervall $[0; 40]$ definiert. Für die zurückgelegte Strecke gilt

$$s(t) = -\frac{1}{64}t^3 + \frac{15}{16}t^2$$

- a. Berechne den Ausdruck $s(30) - s(15)$ und interpretiere dein Ergebnis im gegebenen Kontext.
- b. Bestimme die mittlere Geschwindigkeit v_m des Autos im Zeitintervall $[5; 20]$. Verwende passende Einheiten.
- c. Bestimme die Werte $s'(10)$ und $s''(25)$ und interpretiere diese mit korrekten Einheiten im Kontext.
- d. Bestimme mit Hilfe der Differentialrechnung, wann das Auto die **maximale Geschwindigkeit** erreicht.

Bsp. 11 Ordne den möglichen Eigenschaften einer Funktion f die entsprechende formale Aussage zu!

Aufgabenstellung:

f hat an der Stelle x eine Minimumstelle	D
f hat an der Stelle x eine Nullstelle	C
f besitzt an der Stelle x eine Sattelstelle	B
f hat an der Stelle x die Steigung 2	E

A	$f'(x) = 0$ & $f''(x) < 0$
B	$f'(x) = 0$ & $f''(x) = 0$
C	$f(x) = 0$
D	$f'(x) = 0$ & $f''(x) > 0$
E	$f'(x) = 2$
F	$f'(2) = 2$

Bsp. 12) Der zurückgelegte Weg eines Autos kann näherungsweise durch die Funktion $s(t)$ beschrieben werden:

$$s(t) = -\frac{t^3}{3} + 2t^2 + \frac{t}{3} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 3$$

- t ... Zeit in Minuten
 - $s(t)$... zurückgelegter Weg zur Zeit t in Kilometer
- a. Berechne, nach welcher Zeit t_0 die Beschleunigung im angegebenen Intervall 0 ist.
 - b. Zeige nachweislich, dass die Geschwindigkeit zu dieser Zeit t_0 maximal ist.

Bsp. 13) Bestimme die Wendestelle/n der gegebenen Funktion. Was fällt dir auf?!

$f(x) = x^4$ $f'(x) = 4x^3 \rightarrow f''(x) = 12x^2$ ① $f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 = 0$ $x = 0$ ② $f'''(x) = 24x \rightarrow f'''(0) = 0$ ↓ Keine Wendestelle?!	$f(x) = x^5$ $f'(x) = 5x^4 \quad f''(x) = 20x^3$ $f'''(x) = 60x^2$ ① $f''(x) = 0 \rightarrow x = 0$ ② $f'''(0) = 0$ ↓
--	---

Bemerkung:

Ist die 3. Ableitung an der Wendestelle Null – $f'''(x) = 0$ – so musst du die Funktion weiter differenzieren (=ableiten), bis eine Ableitung ungleich Null ist.

- Ist diese Ableitung ungerader Ordnung, also die 5., 7., 9. Ableitung, dann hast du dort einen Wendepunkt.
Bsp.: Die Funktion $f(x) = x^7$ besitzt an der Stelle $x = 0$ einen Wendepunkt.
- Ist diese Ableitung gerader Ordnung, also die 4., 6., 8. Ableitung, dann handelt es sich um einen Extrempunkt an dieser Stelle (Hoch- bzw. Tiefpunkt).
Bsp.: Die Funktion $f(x) = x^6$ besitzt an der Stelle $x = 0$ einen Tiefpunkt.

Bsp. 14) Bestimme mögliche Extrem- bzw. Wendestellen der gegebenen Funktionen.

$f(x) = -2x^5$ ① $f'(x) = -10x^4 \quad f''(x) = -40x^3$ $\rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ② $f'''(x) = -120x^2 \Rightarrow f'''(0) = 0$ ↓ $f^{(4)}(x) = -240x$ $f^{(5)}(x) = -240 \Rightarrow x = 0$ 5. Ableitung Wendestelle	$f(x) = 0,1x^6$ ① $f'(x) = 0,6x^5 \quad f''(x) = 3x^4$ $\rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ② $f'''(x) = 12x^3 \Rightarrow f'''(0) = 0$ ↓ $f^{(4)}(x) = 36x^2$ $f^{(5)}(x) = 72x$ $f^{(6)}(x) = 72$ 6. Ableitung $\Rightarrow x = 0$ Extrempunkt
--	--

$$\text{geg } f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$\textcircled{1} f(x) = 0$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x = 0$$

$$\hookrightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$f'''(x) = 6$$

$$\textcircled{2} f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$\hookrightarrow x_1 = 1 \rightarrow f''(1) = -6 < 0 \quad x_1 \dots \text{Maximumstelle}$$

$$f(1) = 4 \rightarrow \underline{H = (1|4)}$$

$$\hookrightarrow x_2 = 3 \rightarrow f''(3) = 6 > 0 \quad x_2 \dots \text{Minimumstelle}$$

$$f(3) = 0 \rightarrow \underline{T = (3|0)}$$

$$\textcircled{3} f''(x) = 0$$

$$6x - 12 = 0$$

$$6x = 12$$

$$x = 2$$

$$f'''(2) = 6 \neq 0 \checkmark$$

$$f(2) = 2$$

$$\underline{W = (2|2)}$$

Wendetangente:

$$T: y = kx + d$$

$$f'(2) = -3$$

$$T: y = -3x + d$$

$$T: 2 = -6 + d \quad | +6$$

$$8 = d$$

$$\underline{\underline{T_w: y = -3x + 8}}$$

①

b $f(x) = x^2 - 4$
 $f'(x) = 2x$
 $f''(x) = 2$

① $f(x) = 0$

$x_1 = -2$ $x_2 = 2$

② $f'(x) = 0$

$2x = 0$
 $x = 0$

$f''(0) = 2 \rightarrow x = 0$ Minimumstelle

$\rightarrow f(0) = -4 \rightarrow T = (0 | -4)$

③ Keine Wendestelle! $f''(x) = 0$ $2 \neq 0 \downarrow$

c $f(x) = x^4 - 2x^2$

① $x^4 - 2x^2 = 0 \rightarrow x_1 \approx -1,4$ $x_2 = 0$ $x_3 \approx 1,4$

② $f'(x) = 4x^3 - 4x$ $f''(x) = 12x^2 - 4$ $f'''(x) = 24x$

$f'(x) = 0$

• $x_1 = -1 \rightarrow f''(-1) = 8 > 0$ MINIMUM $\rightarrow f(-1) = -1$ $T_1 = (-1 | -1)$
 • $x_2 = 0 \rightarrow f''(0) = -4 < 0$ MAXIMUM $\rightarrow f(0) = 0$ $H = (0 | 0)$
 • $x_3 = 1 \rightarrow f''(1) = 8 > 0$ MINIMUM $\rightarrow f(1) = -1$ $T_2 = (1 | -1)$

③ $f''(x) = 0$

$x_1 = -0,58$

$f'''(-0,58) = -13,8 \neq 0 \checkmark$
 $f(-0,58) = -0,56 \Rightarrow W_1 = (-0,58 | -0,56)$

$f'(-0,58) = 1,54$

$t_{w_1}: y = 1,54x + 0,33$

$x_2 = +0,58$

$f'''(0,58) = 13,8 \neq 0 \checkmark$
 $f(0,58) = -0,56 \Rightarrow W_2 = (0,58 | -0,56)$

$f'(0,58) = -1,54 \Rightarrow$

$t_w: y = -1,54x + 0,33$

$$8d) f(x) = x^3 + 1 \quad f'(x) = 3x^2 \quad f''(x) = 6x \quad f'''(x) = 6 \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} f(x) = 0 \rightarrow x_1 = -1$$

$$\textcircled{2} f'(x) = 0 \rightarrow x = 0 \quad f''(0) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ Sattelpunkt}$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow S = (0|1)$$

$$\textcircled{3} f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad f'''(0) = 6 \neq 0 \checkmark$$

$$S = W = (0|1)$$

$$\bullet f'(0) = 0 \quad \text{Tw: } y = 0 \cdot x + d \Rightarrow \text{Tw: } y = 1$$
$$1 = d$$

$$8e) f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 18x$$
$$f'(x) = -6x^2 + 24x - 18 \quad f''(x) = -12x + 24 \quad f'''(x) = -12$$

$$\textcircled{1} f(x) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$

$$\textcircled{2} f'(x) = 0 \rightarrow$$

$$\bullet x_1 = 1 \Rightarrow f''(1) = 12 > 0 \quad \text{MINIMUM}$$

$$f(1) = -8 \quad T = (1|-8)$$

$$\bullet x_2 = 3 \Rightarrow f''(3) = -12 < 0 \quad \text{MAXIMUM}$$

$$f(3) = 0 \quad H = (3|0)$$

$$\textcircled{3} f''(x) = 0$$

$$\hookrightarrow x = 2$$

$$f'''(2) = -12 \neq 0 \checkmark$$

$$f(2) = -4 \quad W = (2|-4)$$

$$\text{t: } f'(2) = 6$$

$$y = 6x + d$$

$$-4 = 12 + d$$

$$d = -16$$

$$\Rightarrow \text{Tw: } y = 6x - 16$$

$$8 f, f(x) = -x^4 + 8x^2 - 14$$

④

$$f'(x) = -4x^3 + 16x \quad f''(x) = -12x^2 + 16 \quad f'''(x) = -24x$$

$$\textcircled{1} f(x) = 0$$

$$x_1 = -2,3 \quad x_2 = -1,6 \quad x_3 = 1,6 \quad x_4 = 2,3$$

$$\textcircled{2} f'(x) = 0$$

$$x_1 = -2 \Rightarrow f''(-2) = -32 < 0 \Rightarrow f(-2) = 2 \Rightarrow H_1 = (-2|2)$$

MAXIMUM

$$x_2 = 0 \Rightarrow f''(0) = 16 > 0 \Rightarrow f(0) = -14 \Rightarrow T = (0|-14)$$

MINIMUM

$$x_3 = 2 \Rightarrow f''(2) = -32 < 0 \Rightarrow f(2) = 2 \Rightarrow H_2 = (2|2)$$

MAXIMUM

$$\textcircled{3} f''(x) = 0$$

$$\circ x_1 \approx -1,2 \quad f'''(-1,2) \approx 28,8 \neq 0 \quad W_1 = (-1,2|-5,1)$$

$$\circ x_2 \approx 1,2 \quad f'''(1,2) \approx -28,8 \neq 0 \quad W_2 = (1,2|-5,1)$$

$$T_1: f'(-1,2) \approx -12,3$$

$$\Rightarrow T_1: y = -12,3x - 19,3$$

$$T_2: f'(1,2) \approx 12,3$$

$$T_2: y = 12,3x - 19,3$$

$$a) h(x) = -0,01x^2 + 0,7x$$

$$h'(x) = v(x) = -0,02x + 0,7$$

$$h''(x) = -0,02 \quad (= a(x))$$

$$a) h(x) = 0$$

$$\hookrightarrow x_1 = 0$$

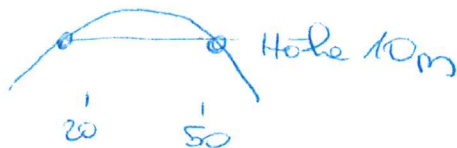
$$\hookrightarrow x_2 = 70 \rightarrow D = [0, 70]$$

$$b) h(x) = 10$$

Geo-
gaben $\hookrightarrow -0,01x^2 + 0,7x = 10$

$$\Rightarrow x_1 = 20 \text{ m} \quad x_2 = 50 \text{ m}$$

Nach 20m & 50m.



$$c) h(40) = \underline{\underline{12 \text{ m}}}$$

$$d) h'(x) = 0 \rightarrow x = 35$$

$$h''(35) = -0,02 < 0 \quad \text{MAXIMUM!}$$

\rightarrow Nach 35m erreicht der Ball seine maximale Höhe!



$$h(35) = 12,25 \text{ m}$$

$$10) s(t) = -\frac{1}{64}t^3 + \frac{15}{16}t^2$$

$$s'(t) = v(t) = -\frac{3}{64}t^2 + \frac{30}{16}t$$

$$s''(t) = a(t) = -\frac{6}{64}t + \frac{30}{16}$$

$$a) s(30) - s(15) = 421,9 - 158,2 \approx \underline{\underline{263,7 \text{ m}}}$$

Zwischen der 15. & 30. Sekunde werden ca. 263,7 m zurückgelegt!

$$b) \frac{s(20) - s(5)}{20 - 5} \approx \underline{\underline{15,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

$$c) s'(10) = 14,1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{Momentane Geschw. nach 10 Sekunden}$$

$$s''(25) = -0,47 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{Momentane Beschleunigung nach 25s.}$$

$$d) v(t) = -\frac{3}{64}t^2 + \frac{30}{16}t$$

$$v'(t) = -\frac{6}{64}t + \frac{30}{16}$$

$$v''(t) = -\frac{6}{64}$$

$$\rightarrow v'(t) = 0 \Rightarrow t = 20 \text{ s}$$

$$v'(20) = -\frac{6}{64} < 0 \quad \uparrow \text{MAXIMUM!}$$

$$v(20) = 18,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Nach 20s erreicht das Auto eine maximale Geschwindigkeit von $18,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.