

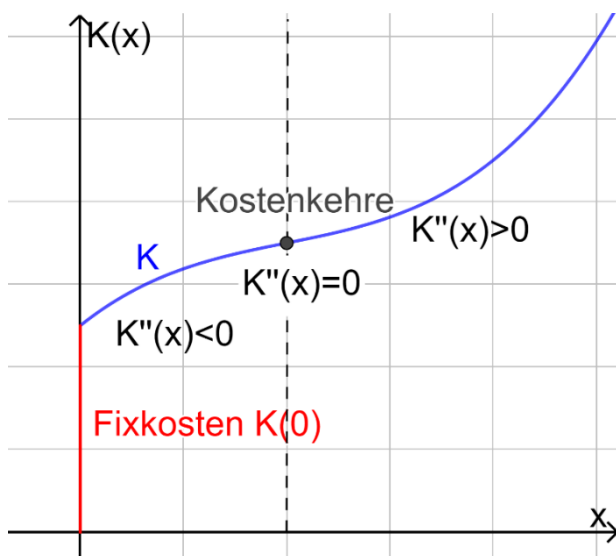
4.1-4.4 Kosten- und Preistheorie

Maturaskript BHS – Teil B (64 Seiten)

Cluster: HAK (W2)

Grundkompetenzen:

- **B_W_4.1** bei Aufgabenstellungen in wirtschaftlichen Kontexten Kosten-, Nachfrage-, Erlös- und Gewinnfunktionen mithilfe von Polynomfunktionen modellieren
- **B_W_4.2** typische Verläufe der Graphen der Preisfunktion der Nachfrage, der Erlösfunktion, der Kostenfunktion und der Gewinnfunktion skizzieren, darstellen und interpretieren; Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkt berechnen, interpretieren und damit argumentieren
- **B_W_4.3** Betriebsoptimum und langfristige Preisuntergrenze sowie Betriebsminimum und kurzfristige Preisuntergrenze mithilfe der (variablen) Stückkostenfunktion bestimmen, in diesem Kontext modellieren, interpretieren und argumentieren
- **B_W_4.4** wirtschaftliche Grenzfunktionen als Ableitungsfunktionen modellieren, berechnen und interpretieren; Stammfunktionen von Grenzfunktionen ermitteln und den Zusammenhang der beiden Funktionen erklären

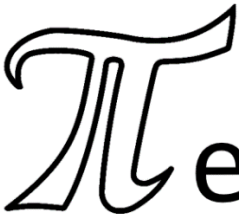


Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Prof.  egischer

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben** (Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool) gelöst werden, um das Erlernete zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info: *bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, ...) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): <https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/>
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

- 1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: <https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM>
- 2) Gib im Feld „**Volltextsuche**“ die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. A_263) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**“ und „**GeoGebra**“ erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**“ erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln	Weitere Regeln für Lehrpersonen
<ul style="list-style-type: none">▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen.▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen.▪ Sie dürfen mein Materialen NICHT gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden.▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden.▪ Bei einem Missbrauch erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.	<p>WICHTIGSTE REGEL: LehrerInnen dürfen die Materialien in Ihrem eigenen Unterricht verwenden:</p> <ul style="list-style-type: none">▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen.▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben.▪ Es ist nicht erlaubt, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben.▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

BHS Teil B: Kosten- und Preistheorie

Bei der Kosten- und Preistheorie gibt es drei grundlegende Basisfunktionen, die in diesem Skript Schritt für Schritt erarbeitet werden:

- **Kostenfunktion** $K(x)$... ordnet jeder Stückzahl die damit verbundenen Kosten zu!
- **Erlösfunktion** $E(x)$... ordnet jeder Stückzahl den damit verbundenen Erlös zu!
- **Gewinnfunktion** $G(x) = E(x) - K(x)$... ordnet jeder Stückzahl den damit verbundenen Gewinn zu!

[Video 1/10](#)



1. Kostenfunktion

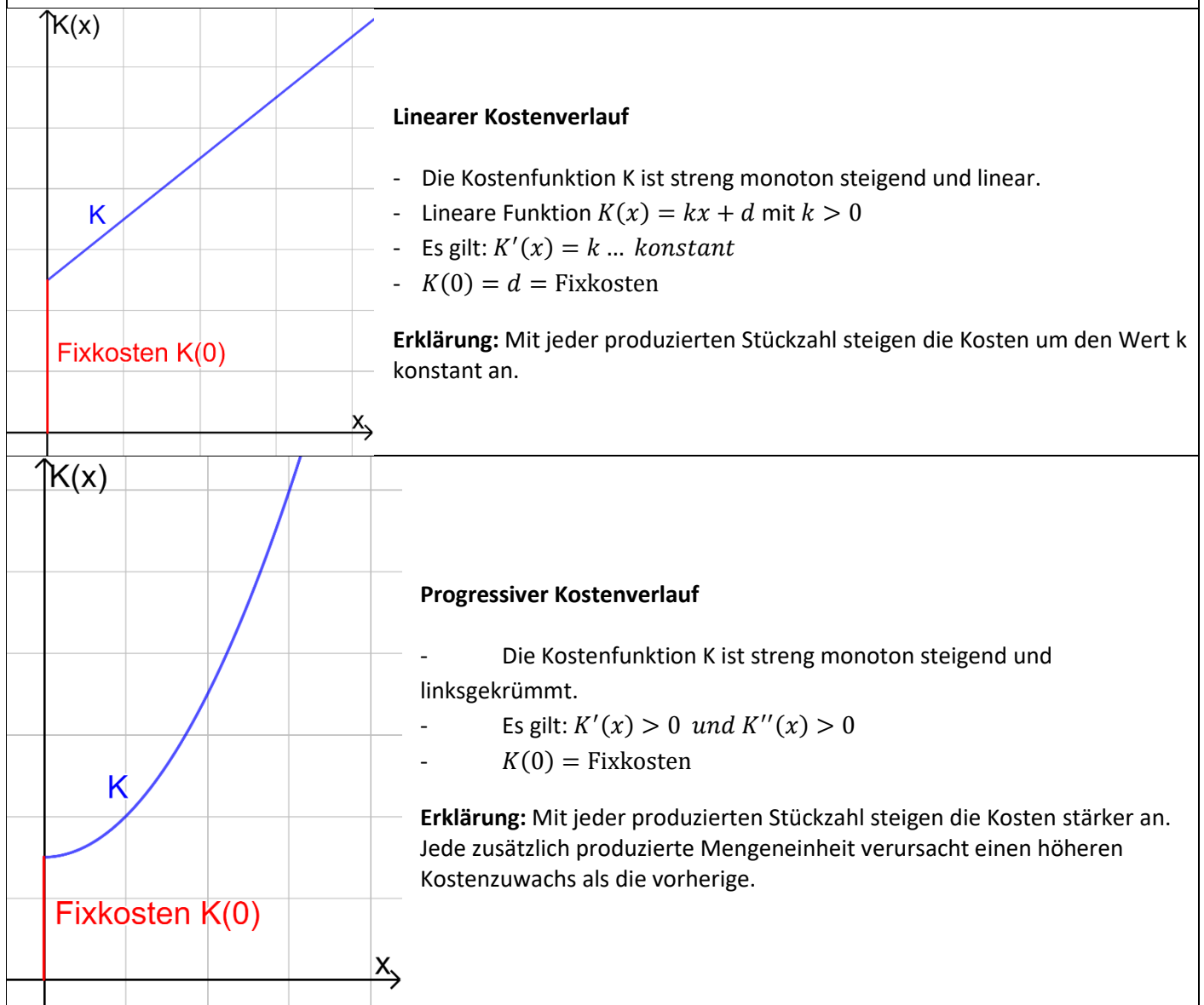
1.1 Kostenfunktion $K(x)$

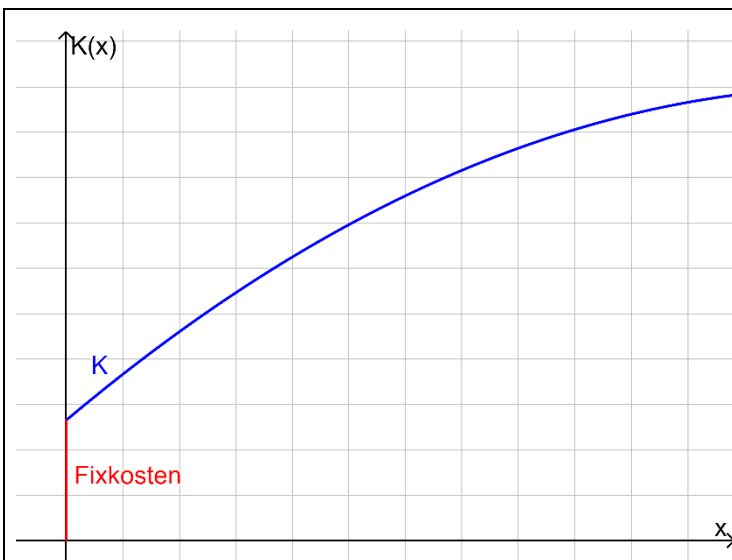
Kostenfunktion $K(x)$... ordnet jeder Stückzahl die damit verbundenen Kosten zu

Die **Kosten** werden in **GE** (=Geldeinheiten) und die **Stückzahlen** in **ME** (=Mengeinheiten) angegeben.

Bemerkung: Die Kostenfunktion ist in der Regel eine streng monoton steigende Funktion – Warum: Je mehr produziert wird, desto höher werden die Kosten.

In weiterer Folge zeige ich dir typische Verläufe einer Kostenfunktion:



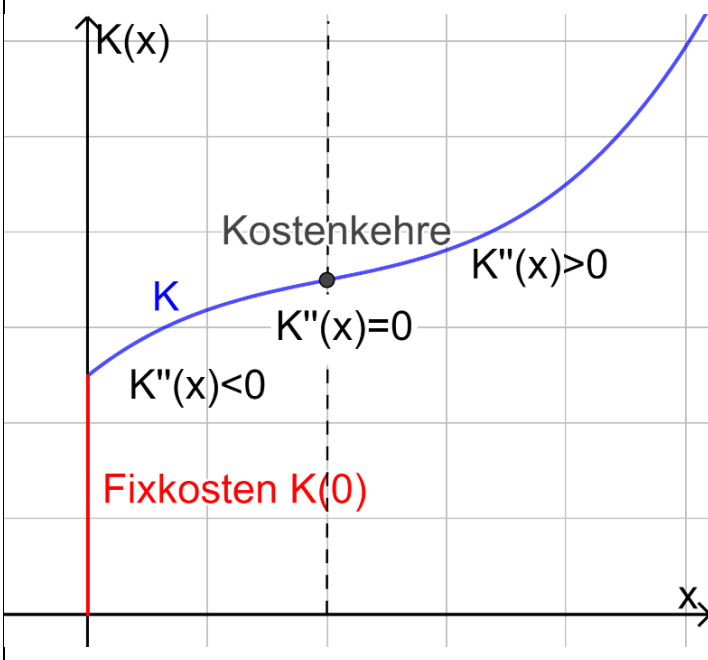


Degressiver Kostenverlauf

- Die Kostenfunktion K ist streng monoton steigend und rechtsgekrümmt.
- Es gilt: $K'(x) > 0$ und $K''(x) < 0$
- $K(0) = \text{Fixkosten}$

Erklärung: Mit jeder produzierten Stückzahl werden die zusätzlich anfallenden Kosten geringer. Jede zusätzlich produzierte Mengeneinheit verursacht einen geringeren Kostenzuwachs als die vorherige.

In den meisten Fällen (vor allem im **Alltag**) ist die Kostenfunktion eine Polynomfunktion dritten Grades. Wenn folgende Eigenschaften gelten, spricht man von einer **ertragsgesetzlichen Kostenfunktion**:



Typischer Verlauf einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion

- „S-förmig“
- Streng monoton steigend

Erklärung: Bei einer Produktion von 0 Stück fallen Fixkosten an (Kosten für Maschinen, Geräte, Arbeiter, etc.).

Werden Stücke produziert, so steigen die Kosten an. Zu Beginn gibt es einen bestimmten Anstieg, dann sinken die Kosten, da es zu Vorteilen aufgrund der Massen-/Mengenproduktion kommt (bis zur Kostenkehre). Ab der Kostenkehre kommt es zu einer Überlastung (z.B. Firma, hohe Überstunden, zusätzliche Geräte, ...). Die Gesamtkosten steigen stark an.

Beispiel einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion (Polynomfunktion 3. Grades):

$$K(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 5$$

Aus dieser Gleichung können die **Fixkosten $K(0)$** abgelesen werden. Diese betragen $K(0) = 5 \text{ GE}$.

Bügeleisen * (B_217)

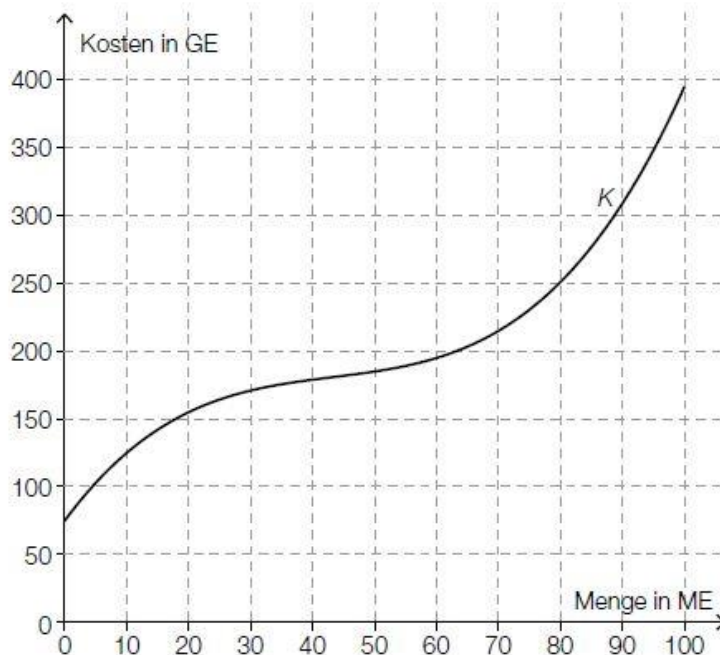
Ein Unternehmen stellt Bügeleisen her. Die Produktionskosten lassen sich näherungsweise durch die folgende Funktion K beschreiben:

$$K(x) = 0,001 \cdot x^3 - 0,13 \cdot x^2 + 6,2 \cdot x + 75 \text{ mit } x \geq 0$$

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)

$K(x)$... Kosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

a) Im nachstehenden Koordinatensystem ist der Graph der Kostenfunktion K dargestellt.



Ein Kostenverlauf heißt in einem Bereich degressiv, wenn der Graph der zugehörigen Kostenfunktion in diesem Bereich negativ gekrümmt (rechtsgekrümmt) ist.

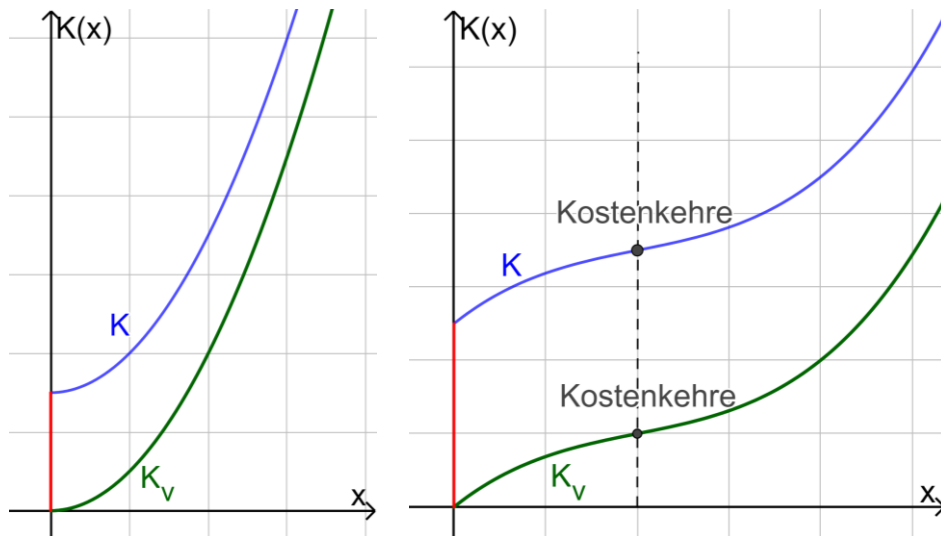
– Lesen Sie aus der obigen Grafik den gesamten Bereich ab, in dem der Kostenverlauf degressiv ist.

1.2 Variable Kostenfunktion $K_v(x)$

Die **variable Kostenfunktion** entspricht der **Kostenfunktion ohne Fixkosten**

$$K(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 5 \rightarrow K_v(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$$

Identischer Verlauf zu $K(x)$, jedoch beginnt der Graph im Ursprung!



Bsp. 1) Gegeben ist eine Kostenfunktion. Bestimme (i) die Fixkosten, (ii) die variable Kostenfunktion, (iii) die Kosten bei 5 bzw. 20 produzierten Mengen und (iv) die variablen Kosten bei 10 bzw. 40 produzierten Stücken.

- $K(x) = 2x + 10$
- $K(x) = 3x^2 + 100$
- $K(x) = 0,5x^3 - 3,9x^2 + 12x + 18$
- $K(x) = 1,2x^3 - 3,3x^2 + 79x + 800$

Bsp. 2) Ein Firma kann am Tag maximal 100 Geräte produzieren. Die täglichen Fixkosten belaufen sich auf 330 GE. Pro erzeugtes Gerät kommen weitere 20 GE Produktionskosten hinzu.

Stelle die Kostenfunktion K auf und gib einen passenden Definitionsbereich an.

1.3 Stückkostenfunktion $\bar{K}(x)$

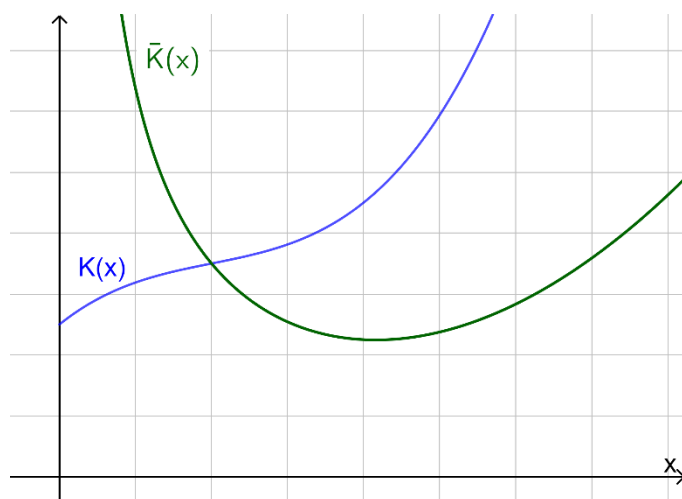
Die Stückkostenfunktion $\bar{K}(x)$ gibt die durchschnittlichen Kosten bei x Stück an, die pro Stück anfallen!

Beispiel: Bei 10 produzierten Stücken fallen Kosten von 60 GE an -> somit wären die durchschnittlichen Kosten pro Stück 6 GE/ME, d.h. $\bar{K}(10) = 6 \text{ GE/ME}$

Formel (mit Beispiel):

$$\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x} \rightarrow \bar{K}(10) = \frac{K(10)}{10} = \frac{60}{10} = 6 \text{ GE/ME}$$

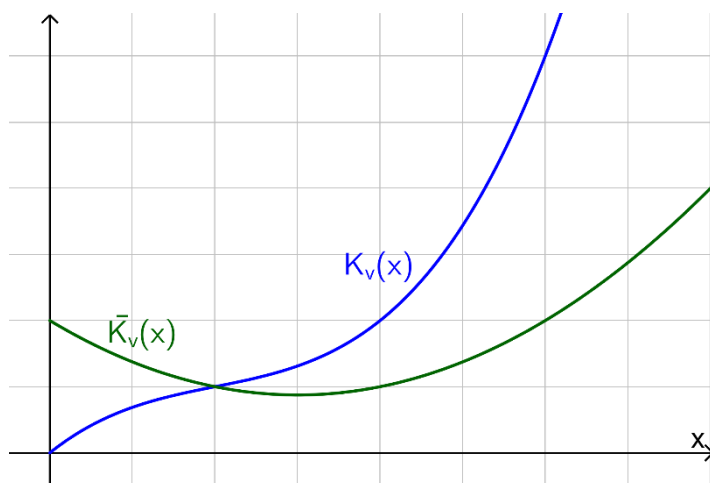
Typischer Verlauf (Ertragsgesetzliche Kostenfunktion):



$$K(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 5$$

$$\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = x^2 - 3x + 4 + \frac{5}{x}$$

1.4 Variable Stückkostenfunktion $\bar{K}_v(x)$



Analog zur Stückkostenfunktion, nur ohne Berücksichtigung der Fixkosten wird die variable Stückkostenfunktion berechnet:

$$\bar{K}_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$$

$$K_v(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$$

$$\bar{K}_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = x^2 - 3x + 4$$

Bsp. 3) Gegeben ist eine Kostenfunktion. Bestimme (i) die Stückkostenfunktion, (ii) die variable Stückkostenfunktion, (iii) die Stückkosten bei 4 bzw. 22 produzierten Stück und (iv) die variablen Stückkosten bei 10 bzw. 30 produzierten Stücken.

- $K(x) = 4x + 25$
- $K(x) = 4x^2 + 200$
- $K(x) = 0,5x^3 - 3,8x^2 + 13x + 50$
- $K(x) = 1,3x^3 - 3,2x^2 + 79x + 1320$

1.5 Grenzkostenfunktion $K'(x)$

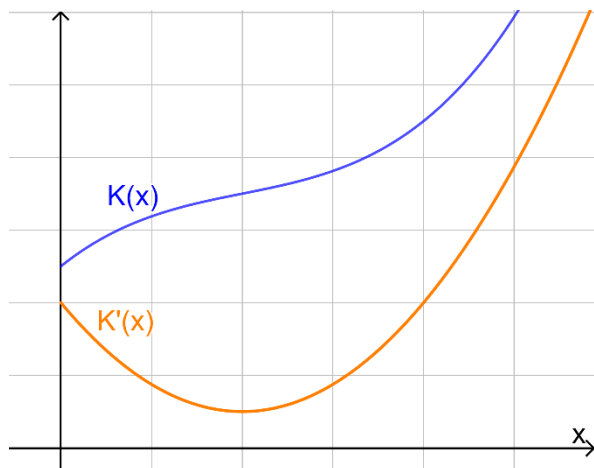
$K'(x)$ gibt die ungefähre Erhöhung der Kosten an, wenn bei x Stück eine weitere Mengeneinheit produziert wird!

Beispiel:

$$K'(5) = 10 \text{ GE/ME}$$

Wird bei 5 Stück eine weitere Mengeneinheit produziert, steigen die Gesamtkosten um ca. 10 GE.

Typischer Verlauf – Ermittlung über die Kostenfunktion:



$$K(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 5$$

$$K'(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

Bsp. 4) Gegeben ist eine Kostenfunktion K mit $K(x) = 0,003x^3 - 0,118x^2 + 5,4x + 100$

- x ... Anzahl der produzierten Stück in ME
 - $K(x)$... Kosten bei x produzierten Stück in GE
- a. Stelle die variable Kostenfunktion auf.
 - b. Berechne, wie viele (i) Gesamtkosten bzw. (ii) variable Kosten bei einer Produktion von 20 ME anfallen.
 - c. Berechne die mittlere Änderungsrate von K , wenn die Produktion von 20 ME auf 25 ME erhöht wird.
 - d. Berechne die Grenzkosten bei 30 ME. Interpretiere diesen Wert im gegebenen Kontext.

Integral der Grenzkostenfunktion $K'(x)$:

[Video 2/10](#)

- i. Unbestimmtes Integral:

Das unbestimmte Integral der Grenzkostenfunktion $K'(x)$ liefert die Kostenfunktion $K(x)$.

Beispiel: $K'(x) = 3x^2 + 3x + 2$, Fixkosten = 10 GE

Gesucht: Kostenfunktion $K(x)$

$$K(x) = \int K'(x) dx = \int (3x^2 + 3x + 2) dx = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 10$$

Wichtig: Die Fixkosten kommen als Integrationskonstante hinzu, da sie die Kosten erhöhen!

(+ Fixkosten)



Bsp. 5) Gegeben sind jeweils eine Grenzkostenfunktion $K'(x)$ und die zugehörigen Fixkosten. Ermittle die Kostenfunktion $K(x)$.

- a. $K'(x) = 0,3x^2 - 0,5x + 6$ Fixkosten: 20 GE
- b. $K'(x) = 4x$ Fixkosten: 100 GE
- c. $K'(x) = 2x^2 - 4x + 15$ Fixkosten: 800 GE
- d. $K'(x) = 5$ Fixkosten: 10 GE

Tischlereibetrieb (B_269)

Ein Tischlereibetrieb produziert Tischgruppen (Tisch und Sessel), die österreichweit vertrieben werden sollen.

- b) Für ein anderes Produkt wurde eine fehlerhafte Kostenfunktion erstellt:

$$K(x) = \frac{x^3}{300} - x^2 + 96 \cdot x + 9000$$

- Erklären Sie mithilfe des Graphen der Ableitungsfunktion K' , warum diese Funktion keine Grenzkostenfunktion einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion ist.

Käseproduktion * (B_468)

Der Produktionsleiter einer kleinen Käserei hat für eine bestimmte Käsesorte die täglichen Produktionskosten genauer untersucht.

- a) Für die der Kostenfunktion K zugehörigen Grenzkostenfunktion K' gilt:

$$K'(x) = 0,03 \cdot x^2 - 0,5 \cdot x + 5$$

x ... Produktionsmenge in kg

$K'(x)$... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in €/kg

Bei einer Produktionsmenge von 5 kg entstehen Gesamtkosten von € 120.

- 1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K .
- 2) Berechnen Sie die Kostenkehre.
- 3) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$$\frac{K(10) - K(5)}{10 - 5} = 3$$

Rasenmäroboter * (B_542)

Immer öfter erledigen Rasenmäroboter die Mäharbeiten in Gärten.

- c) Die Kosten für die Herstellung von Rasenmärobotern werden modellhaft durch die streng monoton steigende Kostenfunktion K beschrieben.

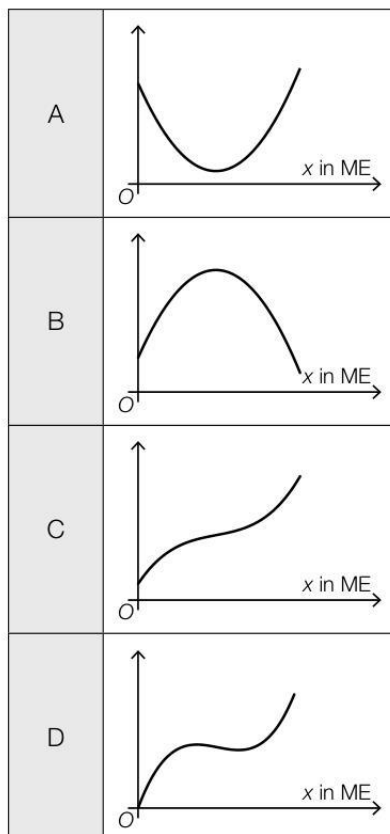
$$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \quad \text{mit } a > 0, d > 0$$

x ... Produktionsmenge in ME

$K(x)$... Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

- 1) Ordnen Sie den beiden angegebenen Funktionen jeweils den passenden Funktionsgraphen aus A bis D zu.

Kostenfunktion K	
Grenzkostenfunktion K'	



Grenzkosten * (B_316)

Ein Betrieb erhebt die Grenzkosten für unterschiedliche Produkte.

- a) Für eine quadratische Grenzkostenfunktion K' mit $K'(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ergeben sich folgende Zusammenhänge:

Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)	20	50	60
Grenzkosten in Geldeinheiten/Mengeneinheit (GE/ME)	1 060	7 120	10 340

- Interpretieren Sie den Grenzkostenwert 1 060 im gegebenen Sachzusammenhang.
- Stellen Sie die Funktionsgleichung dieser Grenzkostenfunktion auf.

Pumpenproduktion (B_169)

Bei der Produktion von Schmutzwasserpumpen wird ein bestimmtes Modell hergestellt. Für die Kostenfunktion K bei der Herstellung dieses Modells gilt:

$$K(x) = 0,0012 \cdot x^3 - 0,5 \cdot x^2 + 80 \cdot x + 10\,000$$

x ... Stückzahl produzierter Schmutzwasserpumpen

$K(x)$... Kosten bei der Produktion von x Schmutzwasserpumpen in Euro (€)

- b)
- Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Kosten, wenn die Produktion von 100 auf 101 Stück erhöht wird.
 - Berechnen Sie die Grenzkosten für 100 Stück mithilfe der Grenzkostenfunktion.
 - Begründen Sie, warum die Ergebnisse dieser Berechnungen unterschiedlich sind.

Grenzkosten und Stückkosten (B_130)

Als Grenzkostenfunktion K' bezeichnet man die 1. Ableitung der Gesamtkostenfunktion K . Bei der Herstellung eines bestimmten Produkts während zweier aufeinanderfolgender Herstellungsperioden können die Grenzkosten durch eine lineare Grenzkostenfunktion K_1' (Abb. 1) und eine quadratische Grenzkostenfunktion K_2' (Abb. 2) beschrieben werden.

x ... Produktionsmenge in Stück (Stk.)

$K_1'(x), K_2'(x)$... Grenzkosten in Euro pro Stück (€/Stk.) bei x erzeugten Stk.

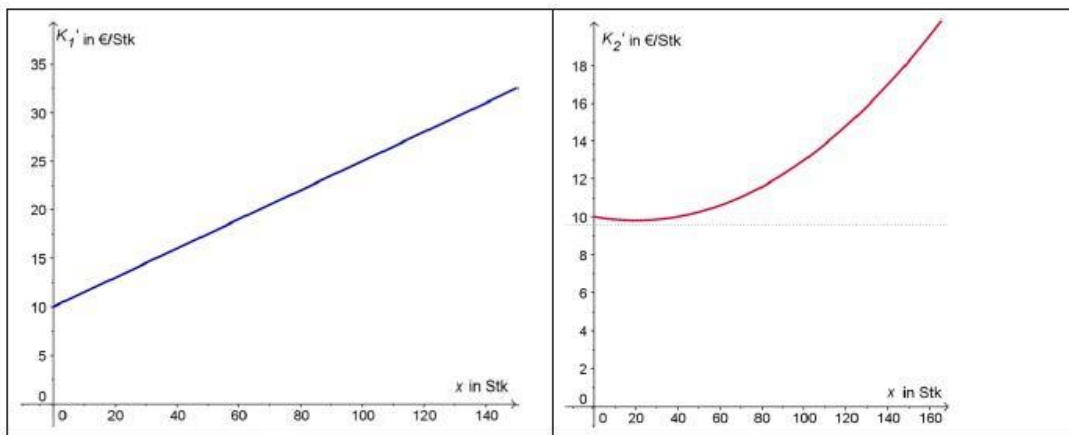


Abb. 1

Abb. 2

- a)
- Ermitteln Sie die Gleichung der Grenzkostenfunktion K_1' aus dem Graphen der Abb. 1.
 - Berechnen Sie mithilfe der Grenzkostenfunktion K_1' die Gesamtkostenfunktion K_1 , wenn die Fixkosten € 260 betragen.

Computerspiele (2) (B_151)

Ein Unternehmen produziert Computerspiele.

- b) Für die Produktion des Spiels *Super Maxi* wird der Verlauf der Grenzkosten durch die Funktion K' mit $K'(x) = 0,0003x^2 - 0,2x + 40$ beschrieben.
- Stellen Sie die Gleichung der Kostenfunktion K auf, wenn die Fixkosten 2000 GE betragen.
 - Erklären Sie die Bedeutung der Kostenkehre in Bezug auf die Zunahme der Kosten pro zusätzlich produzierter ME.

Jungunternehmerin * (B_207)

Eine Jungunternehmerin übernimmt einen Betrieb. Daher informiert sie sich über die Preis- und Kostensituation der Produkte.

- c) Die Grenzkostenfunktion eines weiteren Produktes ist gegeben: $K'(x) = 6 \cdot x^2 - 38 \cdot x + 64$. Die Kosten für die Produktion von 2 ME betragen 72 GE.
- Stellen Sie die Funktionsgleichung der Gesamtkostenfunktion K auf.

Zeitschriften (1) * (B_461)

- a) Die Kosten für die Produktion der Sport-Zeitschrift *Bike and Run* können durch eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K modelliert werden:

$$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 79$$

x ... Produktionsmenge in ME

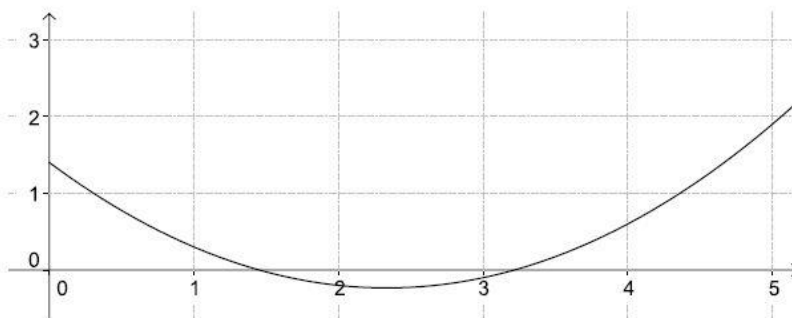
$K(x)$... Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

Bei einer Produktion von 10 ME betragen die Kosten 100 GE und die Grenzkosten 1,5 GE/ME.

- 1) Erstellen Sie die beiden Gleichungen, die diesem Sachverhalt entsprechen.

Weiters gilt: $K''(10) = -0,1$

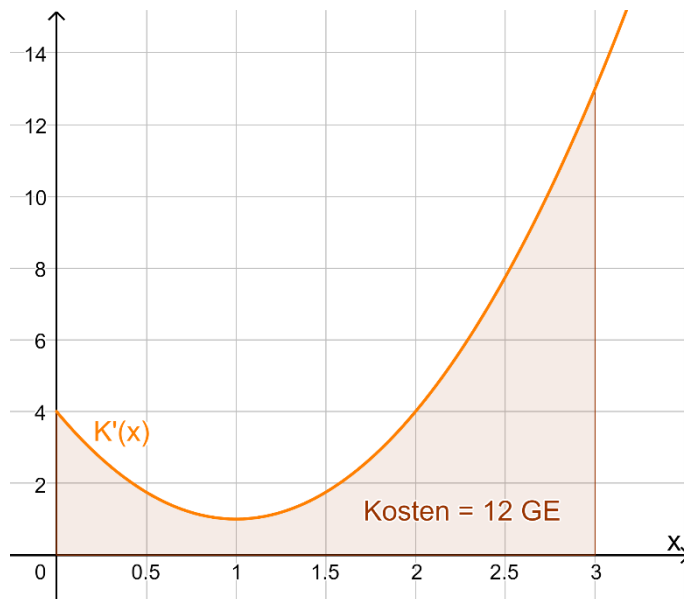
- 2) Interpretieren Sie das Vorzeichen von $K''(10)$ in Bezug auf den Verlauf des Funktionsgraphen von K .
- 3) Ermitteln Sie die Koeffizienten a , b und c der Kostenfunktion K .
- d) – Begründen Sie, warum der Funktionsgraph in der nachstehenden Abbildung keine Grenzkostenfunktion einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion beschreiben kann.



ii. Bestimmtes Integral:

Das bestimmte Integral (bzw. die Fläche unter der Grenzkostenfunktion) entspricht den **variablen Kosten** bei dieser Stückzahl (Integral der Grenzkostenfunktion = Kostenfunktion)

Achtung: Gegebenfalls müssen Fixkosten dazu-addiert werden (bzw. nicht berücksichtigt werden)



Beispiel:

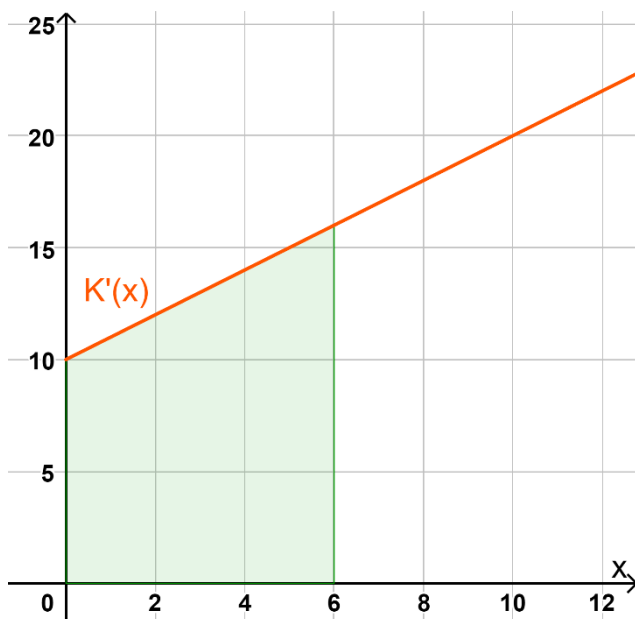
$$K'(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

Berechne die variablen Kosten, die bei 3 produzierten ME anfallen.

$$\int_0^3 K'(x) dx = \int_0^3 3x^2 - 6x + 4 dx$$

$$\left[3 \cdot \frac{x^3}{3} - 6 \frac{x^2}{2} + 4x \right]_0^3 = [x^3 - 3x^2 + 4x]_0^3$$

$$3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - (0^3 - 3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0) = 12 \text{ GE}$$



Bsp. 6) Gegeben ist eine Grenzkostenfunktion $K'(x)$. Die zugehörige Kostenfunktion $K(x)$ gibt die Produktionskosten in GE an, die bei x produzierten ME anfallen. Die Fixkosten betragen 100 GE.

- Ermittle die Funktionsgleichungen von $K'(x)$ und $K(x)$.
- Berechne den grün markierten Flächeninhalt auf zwei verschiedene Möglichkeiten (Bestimmtes Integral & Flächeninhalt des Vierecks).
- Interpretiere den Wert des Flächeninhalts im gegebenen Sachzusammenhang.

Süßwarenproduktion * (B_545)

Ein Unternehmen produziert Süßwaren.

- b) Die Gesamtkosten bei der Produktion von Waffelschnitten können durch die lineare Kostenfunktion K beschrieben werden.

$$K(x) = a \cdot x + b$$

x ... Produktionsmenge in ME

$K(x)$... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

In Abbildung 1 sind die Graphen der Grenzkostenfunktion K' und der Durchschnittskostenfunktion \bar{K} dargestellt.

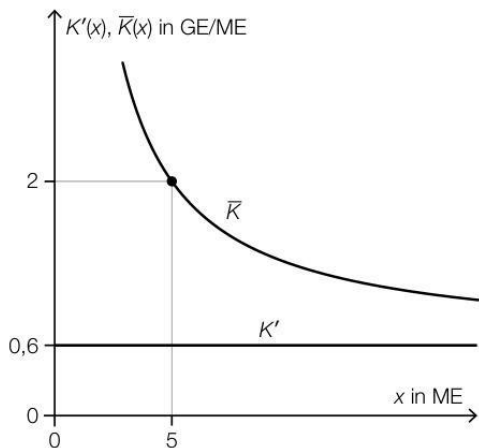


Abbildung 1

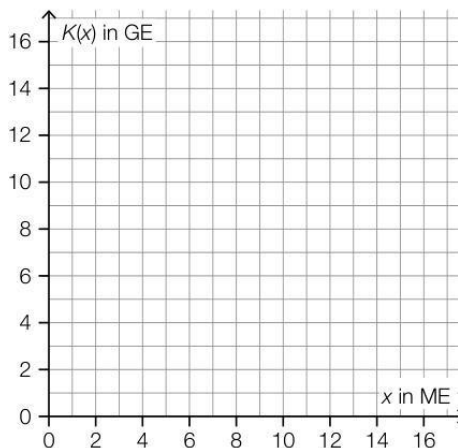


Abbildung 2

- 1) Geben Sie die Steigung a der Kostenfunktion K an.

$a =$ _____ GE/ME

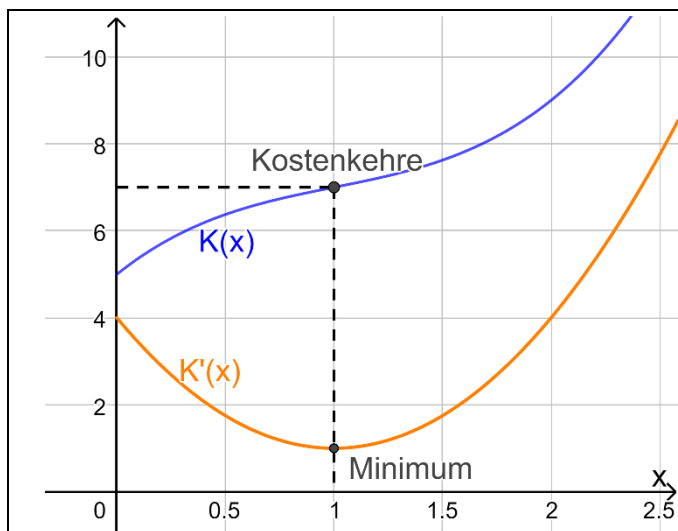
- 2) Zeichnen Sie in Abbildung 2 den Graphen der Kostenfunktion K ein.

1.6 Anwendungen der Kostenfunktion

[Video 3/10](#)



1. Bestimmung der Kostenkehre über die Kostenfunktion bzw. Grenzkostenfunktion:

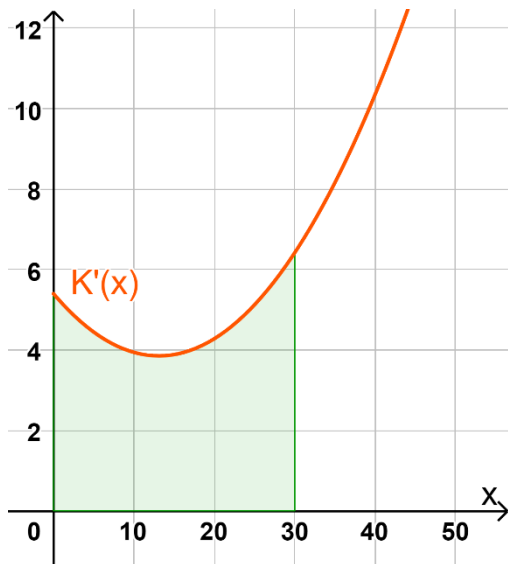


Die **Kostenkehre** ist der **Wendepunkt** der **Kostenfunktion** $K(x)$. Dabei geht die degressive Kostenfunktion in eine progressive Kostenfunktion über.

$$K''(x) = 0$$

Die Kostenkehre entspricht auch dem **Minimum** der **Grenzkostenfunktion** $K'(x)$ – denke an die NEW-Regel: Eine Wendestelle wird in der ersten Ableitung zu einer Extremstelle.

Bestimmung des Minimums: $K''(x) = 0$ & $K'''(x) > 0$



Bsp. 7) Gegeben ist eine Grenzkostenfunktion $K'(x)$. Die zugehörige Kostenfunktion $K(x)$ gibt die Produktionskosten an, die bei x produzierten ME anfallen.

- Ermittle graphisch die Stelle der Kostenkehre.
- In der Graphik ist eine Fläche grün markiert. Gib eine mathematische Formel an, mit der du den Inhalt der Fläche berechnen kannst.
- Interpretiere den Wert des Flächeninhalts im gegebenen Sachzusammenhang.

[Video 4/10](#)



Kosten * (B_319)

Kostenfunktionen geben den Zusammenhang zwischen der produzierten Menge und den dazugehörigen Gesamtproduktionskosten an.

- Gegeben ist die Kostenfunktion K mit $K(x) = 0,1x^3 - 0,6x^2 + 5x + 10$ für eine produzierte Menge von $0 \leq x \leq 6$ ME.
 - Berechnen Sie die Kostenkehre.
 - Geben Sie diejenigen Bereiche an, in denen der Kostenverlauf degressiv bzw. progressiv ist.

Rohrproduktion * (B_089)

b) Die Grenzkostenfunktion K' für die Herstellung von Kunststoffrohren ist gegeben durch:

$$K'(x) = \frac{15}{32} \cdot x^2 - \frac{35}{4} \cdot x + 60$$

x ... produzierte Menge in ME

$K'(x)$... Grenzkosten bei der produzierten Menge x in GE/ME

- Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K mit $K(16) = 600$.
- Berechnen Sie die Kostenkehre.

Elektronikhersteller (B_140)

Ein Elektronikhersteller erzeugt Spielkonsolen und Gamecontroller.

- a) Die folgende Tabelle gibt die Grenzkosten $K'(x)$ in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x von Spielkonsolen an:

x	100	150	200	250	300	350	400
$K'(x)$	125	105	102	114	141	184	242

x ... Produktionsmenge in Stück (STK)

$K'(x)$... Grenzkosten in Euro pro Stück (€/STK)

- Erstellen Sie mithilfe einer Regression eine passende quadratische Grenzkostenfunktion.
- Erklären Sie, wie man hier die Kostenkehre berechnet.
- Erklären Sie die Bedeutung der Kostenkehre.
- Berechnen Sie die Gleichung der Gesamtkostenfunktion bei Fixkosten von € 11.200.

Käseproduktion * (B_468)

Der Produktionsleiter einer kleinen Käserei hat für eine bestimmte Käsesorte die täglichen Produktionskosten genauer untersucht.

- a) Für die der Kostenfunktion K zugehörigen Grenzkostenfunktion K' gilt:

$$K'(x) = 0,03 \cdot x^2 - 0,5 \cdot x + 5$$

x ... Produktionsmenge in kg

$K'(x)$... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in €/kg

Bei einer Produktionsmenge von 5 kg entstehen Gesamtkosten von € 120.

- 1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K .
- 2) Berechnen Sie die Kostenkehre.
- 3) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$$\frac{K(10) - K(5)}{10 - 5} = 3$$

Käseproduktion * (B_468)

Der Produktionsleiter einer kleinen Käserei hat für eine bestimmte Käsesorte die täglichen Produktionskosten genauer untersucht.

- a) Für die der Kostenfunktion K zugehörigen Grenzkostenfunktion K' gilt:

$$K'(x) = 0,03 \cdot x^2 - 0,5 \cdot x + 5$$

x ... Produktionsmenge in kg

$K'(x)$... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in €/kg

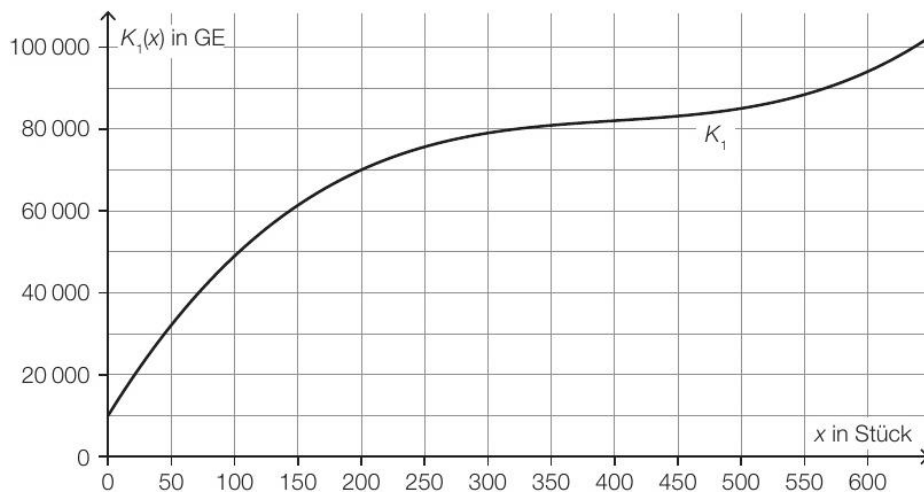
Bei einer Produktionsmenge von 5 kg entstehen Gesamtkosten von € 120.

- 1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K .
- 2) Berechnen Sie die Kostenkehre.
- 3) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$$\frac{K(10) - K(5)}{10 - 5} = 3$$

Möbel * (B_513)

- b) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Kostenfunktion K_1 eines Betriebs bei der Produktion von Kleiderschränken dargestellt.



x ... Produktionsmenge in Stück

$K_1(x)$... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

- 1) Lesen Sie das größtmögliche Produktionsintervall ab, in dem der Verlauf der Kostenfunktion K_1 degressiv ist.
- 2) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Stückkosten bei einer Produktion von 200 Stück.

Die Fixkosten können um 10 % reduziert werden.

- 3) Begründen Sie, warum sich die Grenzkostenfunktion dadurch nicht ändert.

Aufstellen von Kostenfunktionen

Bsp. 8) Die Fixkosten zur Produktion eines bestimmten Artikels betragen 2800 GE. Die Kostenkehre liegt bei 6 ME. Die Gesamtkosten bei einer Produktionsmenge von 6 ME betragen 3050 GE. Bei einer Produktionsmenge von 10 ME betragen die Gesamtkosten 3200 GE.

Der Kostenverlauf soll mit Hilfe einer Kostenfunktion K mit $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ beschrieben werden.

- a. Erstelle ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter der Kostenfunktionen.
- b. Berechne die Parameter und stelle die Kostenfunktion K auf.

Bsp. 9) Ein Unternehmen produziert ein bestimmtes Produkt. Die Kosten bei einer Produktionsmenge von 10 ME betragen 154 GE. Die Kostenkehre liegt bei einer Produktionsmenge von 1,5 ME. Bei der Kostenkehre betragen die anfallenden Kosten 13,75 GE. Bei einer Produktionsmenge von 20 ME betragen die Grenzkosten 207,4 GE/ME.

Der Kostenverlauf soll mit Hilfe einer Kostenfunktion K mit $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ beschrieben werden.

- a. Erstelle ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter der Kostenfunktionen.
- b. Berechne die Parameter und stelle die Kostenfunktion K auf.

Ertragsgesetzliche Kostenfunktion (B_136)

Die Gesamtkosten K für die Herstellung eines bestimmten Produkts in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x verlaufen nach einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion.

x ... Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)

$K(x)$... Gesamtkosten bei x ME in Geldeinheiten (GE)

Die Kostenfunktion muss in diesem Fall die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. Es existiert ein positiver Funktionswert an der Stelle $x = 0$.
 2. Die Kurve hat keinen Extremwert.
 3. Die Kurve muss streng monoton steigen.
 4. Sie muss im 1. Quadranten von einem degressiven Verlauf in einen progressiven wechseln.
- c) Eine Polynomfunktion 3. Grades beschreibt eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion. Die Fixkosten betragen 25 GE. Die Kostenkehre liegt bei 5 ME. Die Gesamtkosten an der Kostenkehre betragen 53,8 GE. Die Tangente an den Graphen der Gesamtkostenfunktion hat an der Stelle $x = 2$ ME einen Anstieg $k = 6$.
- Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem man die Parameter der Kostenfunktion berechnen kann.

Sportartikel * (B_348)

- b) Die Fixkosten für die Erzeugung eines bestimmten Sportartikels betragen 2 900 GE. Die Kostenkehre liegt bei 5 ME. Die Gesamtkosten bei einer Produktionsmenge von 5 ME betragen 3 100 GE. Bei einer Produktionsmenge von 9 ME betragen die Gesamtkosten 3 252,80 GE.
- Der Kostenverlauf soll mithilfe einer Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden.

- Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten dieser Kostenfunktion.
- Berechnen Sie die Koeffizienten dieser Kostenfunktion.

Kosten * (B_319)

Kostenfunktionen geben den Zusammenhang zwischen der produzierten Menge und den dazugehörigen Gesamtproduktionskosten an.

- a) Von einer kubischen Kostenfunktion K mit $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ kennt man folgende Eigenschaften:
- (1) Die Fixkosten betragen 4 GE.
 - (2) Bei einer Produktionsmenge von 10 ME betragen die Gesamtkosten 2 124 GE.
 - (3) Das Betriebsoptimum liegt bei 2 ME.
 - (4) Die langfristige Preisuntergrenze beträgt 14 GE/ME.
- Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Ermittlung dieser Kostenfunktion auf.

2. Bestimmung des Betriebsoptimums und –minimums, bzw. der Preisuntergrenzen

Video 5/10

- **Betriebsoptimum:** Das Betriebsoptimum ist jene Stückzahl x_{OPT} , bei der die Stückkosten minimal sind (Einheit: in ME)
- **Langfristige Preisuntergrenze:** Stückkosten beim Betriebsoptimum - $\bar{K}(x_{OPT})$ (Einheit: in GE/ME)



Interpretation:

- Im Betriebsoptimum erreicht das Verhältnis zwischen Gesamtkosten und Produktionsmenge das günstigste Verhältnis. Die Kosten pro erzeugter ME sind hier am geringsten.
- Verkauft man eine Stückzahl zum Preis der langfristigen Preisuntergrenze, so werden die Fixkosten und variablen Kosten gedeckt. Dabei wird noch kein Gewinn erzielt. Wird ein höherer Preis erwirtschaftet, so macht die Firma bzw. das Unternehmen Gewinn.

Warum könnte es Sinn machen, ein Produkt zum Preis der langfristigen Preisuntergrenze zu etablieren?

- Man möchte mit einem Produkt einen Wettbewerber unter Druck setzen, die mit diesem niedrigen Preis nicht mithalten wollen/können. Dabei nimmt man bewusst in Kauf, dass kein Gewinn erwirtschaftet wird.

Dieser Betrag soll nicht unterschritten werden, da ansonsten Verluste entstehen.

Video 6/10

- **Betriebsminimum:** Das Betriebsminimum ist jene Stückzahl x_{MIN} , bei der die variablen Stückkosten minimal sind (Einheit: in ME)
- **Kurzfristige Preisuntergrenze:** Variable Stückkosten beim Betriebsminimum - $\bar{K}_v(x_{MIN})$ (Einheit: in GE/ME)



Interpretation:

- Im Betriebsminimum erreicht das Verhältnis zwischen variablen Kosten und Produktionsmenge das günstigste Verhältnis. Die variablen Kosten pro erzeugter ME sind hier am geringsten.
- Verkauft man eine Stückzahl zum Preis der kurzfristigen Preisuntergrenze, so werden nur die variablen Kosten gedeckt. Die Fixkosten werden nicht gedeckt & in Summe macht das Unternehmen Verlust.

Warum könnte es Sinn machen, ein Produkt zum Preis der kurzfristigen Preisuntergrenze zu verkaufen?

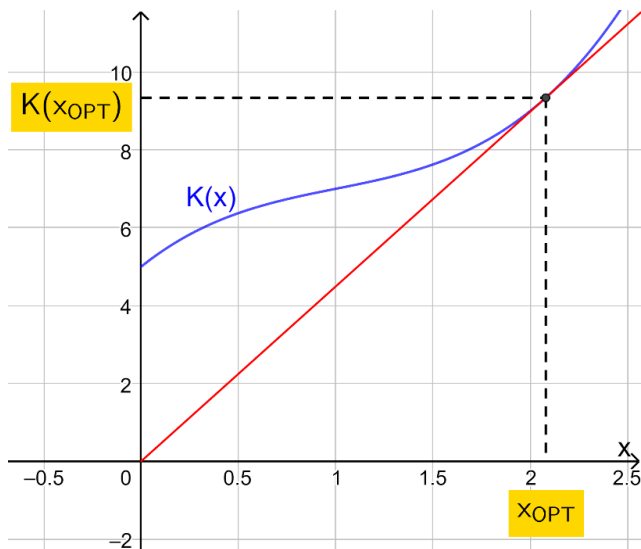
- Man möchte ein neues Produkt im Markt etablieren (z.B. Sonderangebot – weckt die Aufmerksamkeit)
- Man möchte Wettbewerber verdrängen, die mit einem solch niedrigen Preis nicht mithalten können (bedenke: es entsteht stets der Verlust der Fixkosten).

2.1 Bestimmung Betriebsoptimum und langfristige Preisuntergrenze:

i. Graphische Bestimmung über den Funktionsgraph der Kostenfunktion $K(x)$:

Lege eine Gerade ausgehend vom Ursprung so an den Graphen der Kostenfunktion, dass die Gerade den Graphen in genau einem Punkt berührt:

- Die Stelle des Berührungspunktes ist das Betriebsoptimum x_{OPT} .
- Mit Hilfe des Funktionswertes $K(x_{opt})$ kann die langfristige Preisuntergrenze berechnet werden. Der Funktionswert wird an der y-Achse abgelesen.



$$\text{Langfristige Preisuntergrenze} = \frac{K(x_{opt})}{x_{opt}} = \bar{K}(x_{opt})$$

Aus dem Graphen kann man ablesen, dass das Betriebsoptimum bei ca. 2,1 produzierten ME liegt.

$$x_{OPT} \approx 2,1 \text{ ME}$$

Der Funktionswert $K(x_{OPT})$ ist ca. 9,3. Mit diesen Werten kann die langfristige Preisuntergrenze näherungsweise ermittelt werden:

$$\frac{K(x_{OPT})}{x_{OPT}} \approx \frac{9,3}{2,1} \approx 4,4 \text{ GE/ME}$$

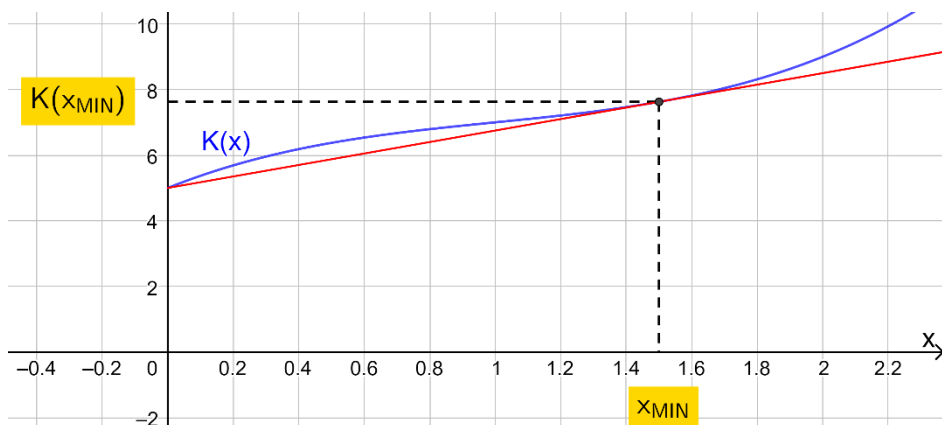
ii. Bestimmung über die Stückkostenfunktion $\bar{K}(x)$ – graphisch & rechnerisch:

Wiederholung Definition Betriebsoptimum: Stückzahl x_{OPT} , bei der die Stückkosten **minimal** sind -> d.h. **MINIMUM** (=Extremum)

Graphische Ermittlung	Rechnerische Ermittlung
<p>Ermittlung des Tiefpunktes</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ x-Koordinate = Betriebsoptimum x_{OPT} ▪ y-Koordinate $\bar{K}(x_{opt}) =$ Langfristige Preisuntergrenze <p>The graph shows a green U-shaped curve representing the average cost function $\bar{K}(x)$ on a coordinate system. The x-axis is labeled x and ranges from -1 to 4.5. The y-axis ranges from -2 to 14. A dashed line indicates that the x-coordinate of the minimum is x_{OPT} (highlighted in yellow) and the y-coordinate is $\bar{K}(x_{OPT})$ (highlighted in yellow).</p> <p>Betriebsoptimum: $x_{OPT} \approx 2,1 \text{ ME}$ Langfristige Preisuntergrenze: $\bar{K}(x_{OPT}) \approx 4,3 \text{ GE/ME}$</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ $\bar{K}(x)$ ableiten $\rightarrow \bar{K}'(x) = 0$ \rightarrow <i>Betriebsoptimum</i> = x_{OPT} ▪ Kontrolle, ob es sich um ein Minimum handelt: $\bar{K}''(x_{OPT}) > 0$ ▪ Ermittlung der langfristigen Preisuntergrenze <p>Das Betriebsoptimum x_{opt} muss man in die Stückkostenfunktion $\bar{K}(x_{opt})$ einsetzen:</p> $\text{Langfristige Preisuntergrenze} = \bar{K}(x_{opt})$

2.2 Bestimmung Betriebsminimum und kurzfristige Preisuntergrenze:

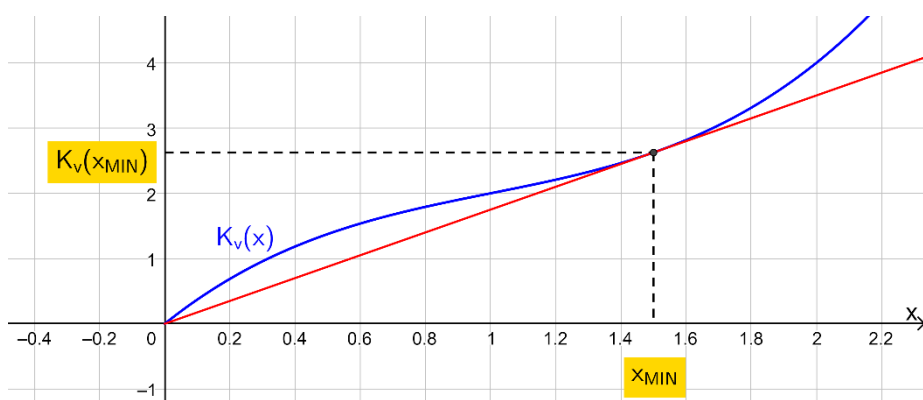
i. Bestimmung über den Funktionsgraph der Kostenfunktion $K(x)$:



Lege eine Gerade ausgehend von den **Fixkosten** = Punkt $(0, K(0))$ so an den Graphen der Kostenfunktion, dass die Gerade den Graphen in genau einem Punkt berührt:

Die **Stelle des Berührungspunktes** ist das **Betriebsminimum** x_{MIN} .

ii. Bestimmung über den Funktionsgraph der variablen Kostenfunktion $K_v(x)$:



Lege eine Gerade ausgehend vom Ursprung so an den Graphen der variablen Kostenfunktion, dass die Gerade den Graphen in genau einem Punkt berührt. Die Stelle des Berührungspunktes ist das Betriebsminimum x_{MIN} .

Mit Hilfe des Funktionswertes $K_v(x_{MIN})$ kann die kurzfristige Preisuntergrenze berechnet werden. Der Funktionswert wird an der y-Achse abgelesen.

$$\text{Kurzfristige Preisuntergrenze} = \frac{K_v(x_{min})}{x_{min}} = \overline{K}_v(x_{min})$$

iii. Bestimmung über die variable Stückkostenfunktion $\overline{K}_v(x)$ – graphisch & rechnerisch:

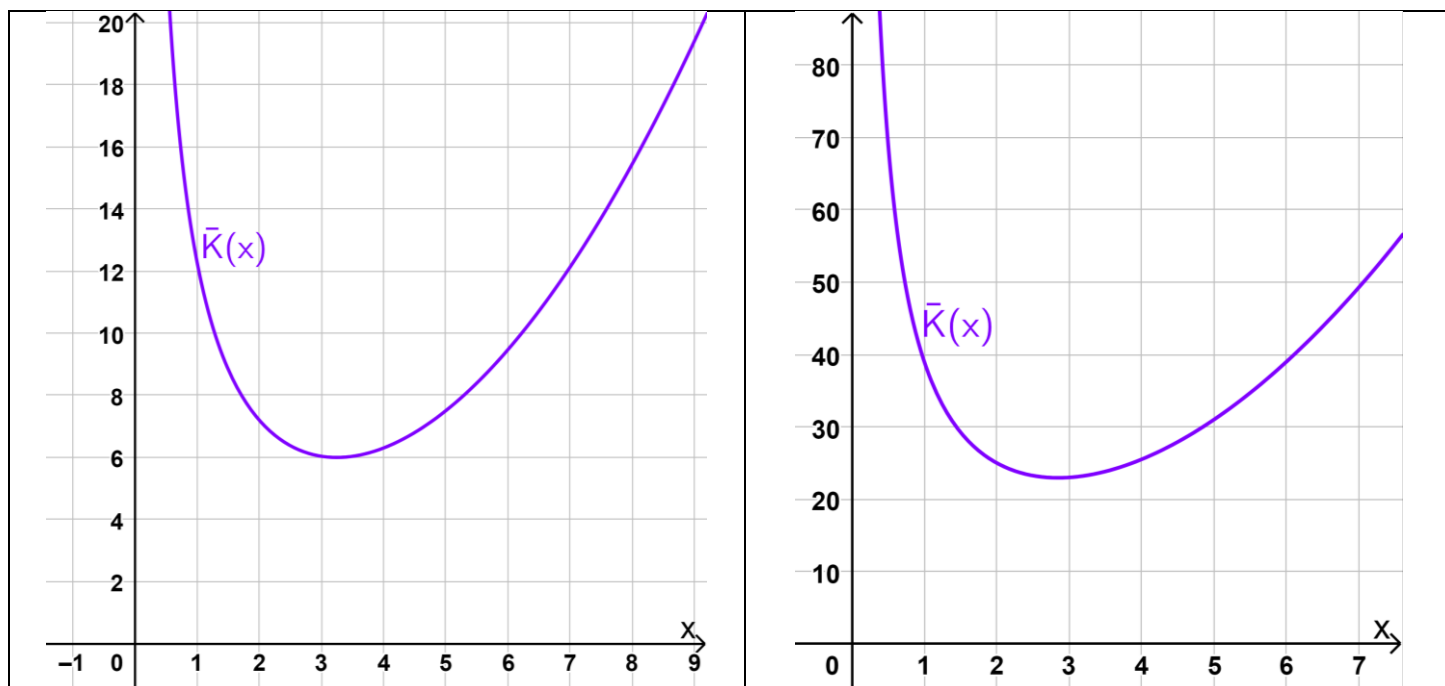
Wiederholung Definition Betriebsminimum: Stückzahl x_{min} , bei der die variablen Stückkosten **minimal** sind -> d.h. MINIMUM (=Extremum).

Graphische Ermittlung	Rechnerische Ermittlung
<p>Ermittlung des Tiefpunktes</p> <ul style="list-style-type: none"> x-Koordinate = Betriebsminimum x_{MIN} y-Koordinate $\overline{K}_v(x_{MIN})$ = Kurzfristige Preisuntergrenze <p>Betriebsminimum: $x_{MIN} = 1,5 \text{ ME}$ Langfristige Preisuntergrenze: $\overline{K}_v(x_{MIN}) \approx 1,8 \text{ GE/ME}$</p>	<ul style="list-style-type: none"> $\overline{K}_v(x)$ ableiten $\rightarrow \overline{K}_v'(x) = 0$ \rightarrow Betriebsminimum = x_{MIN} Kontrolle, ob es sich um ein Minimum handelt: $\overline{K}_v''(x_{MIN}) > 0$ Ermittlung der kurzfristigen Preisuntergrenze <p>Das Betriebsminimum x_{MIN} muss man in die variable Stückkostenfunktion $\overline{K}_v(x_{MIN})$ einsetzen:</p> <p>Kurzfristige Preisuntergrenze = $\overline{K}_v(x_{MIN})$</p>

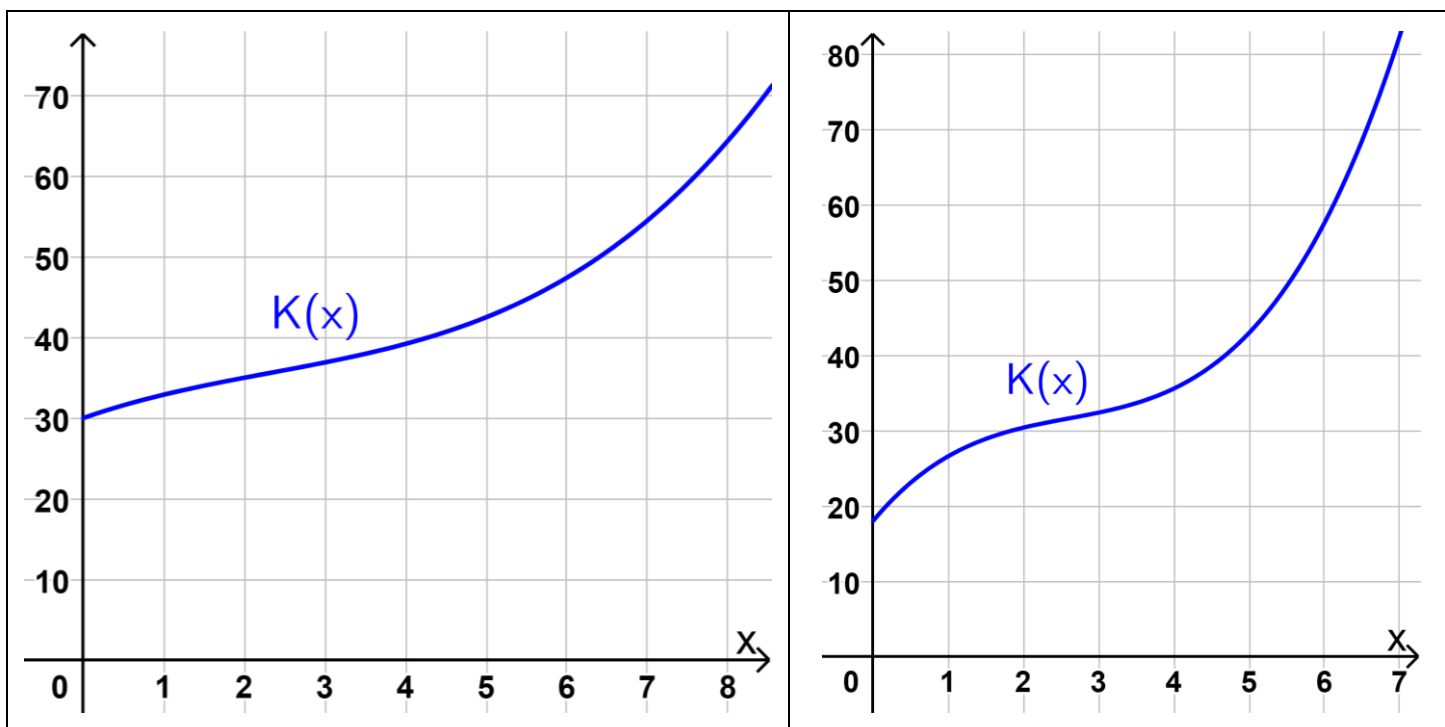
Bsp. 10) Bestimme rechnerisch die Kostenkehre, das Betriebsoptimum, das Betriebsminimum, sowie die langfristige und kurzfristige Preisuntergrenze zur zugehörigen Kostenfunktion $K(x)$.

- a. $K(x) = 0,02x^3 - 3,1x^2 + 170x + 700$
- b. $K(x) = 0,3x^3 - 1,2x^2 + 20x + 120$
- c. $K(x) = 0,0004x^3 - 0,027x^2 + 98x + 47\,000$

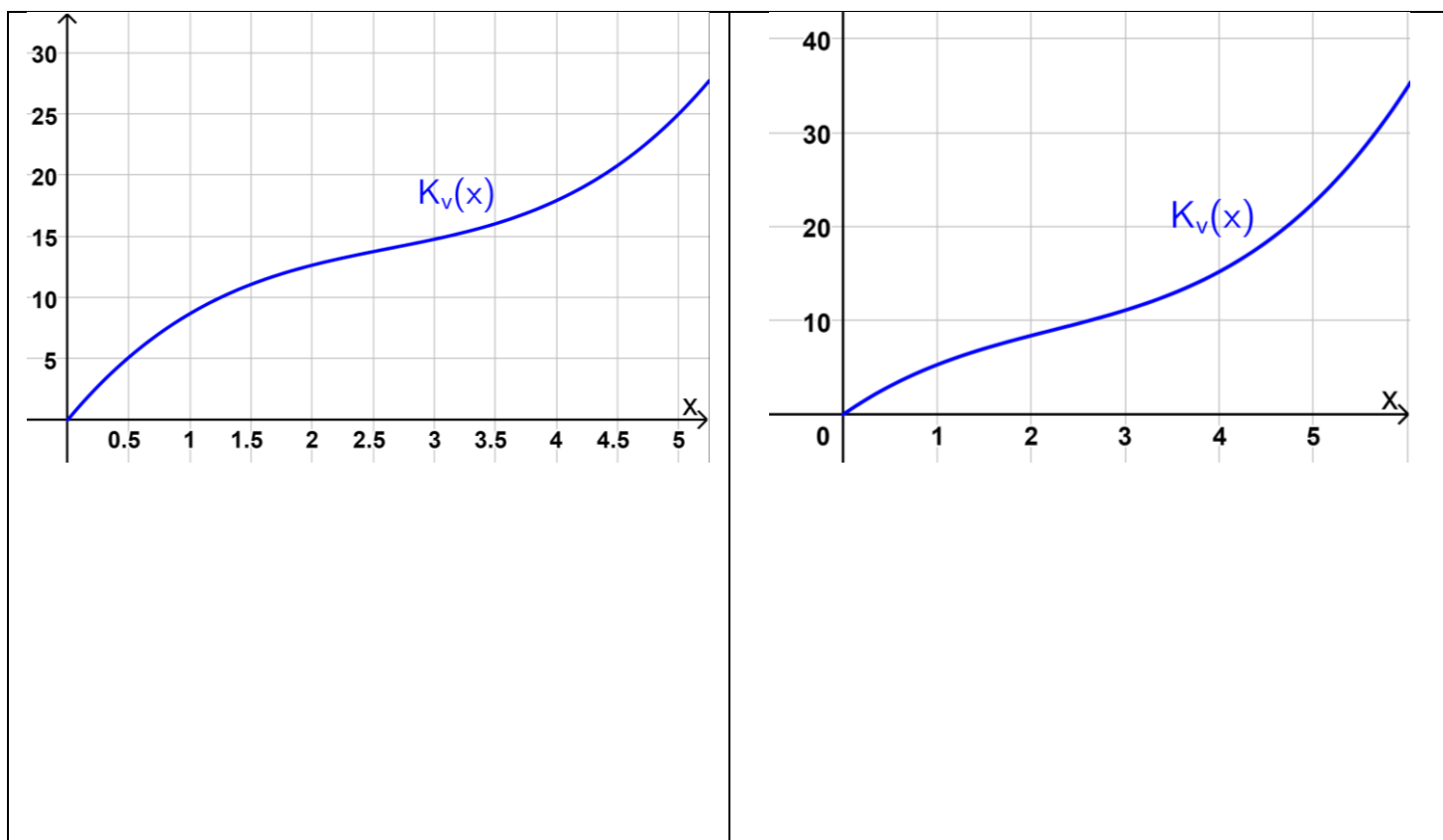
Bsp. 11) Gegeben ist der Graph einer Stückkostenfunktion $\bar{K}(x)$. Bestimme graphisch das Betriebsoptimum und die langfristige Preisuntergrenze. Interpretiere die Werte im Kontext.



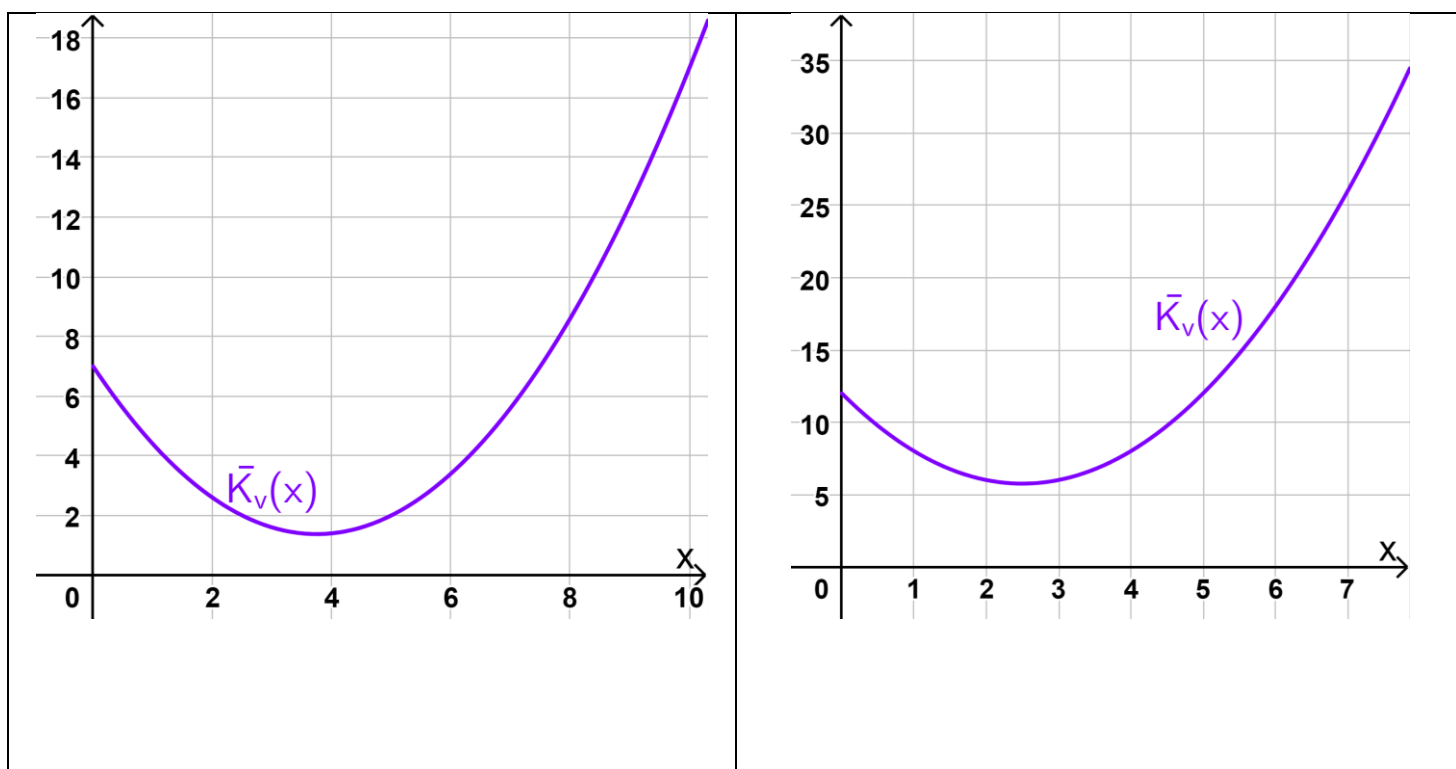
Bsp. 12) Gegeben ist der Graph einer Kostenfunktion $K(x)$. Bestimme graphisch das Betriebsoptimum, das Betriebsminimum, die langfristige und kurzfristige Preisuntergrenze.



Bsp. 13) Gegeben ist der Graph einer variablen Kostenfunktion $K_v(x)$. Bestimme graphisch das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze. Interpretiere die Werte im gegebenen Kontext.



Bsp. 14) Gegeben ist der Graph einer variablen Stückkostenfunktion $\bar{K}_v(x)$. Bestimme graphisch das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze.



Bsp. 15) Eine allgemeine, ertragsgesetzliche Kostenfunktion K ist gegeben mit $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Gib eine Gleichung an, mit der du das Betriebsoptimum bestimmen kannst.

Bügeleisen * (B_217)

Ein Unternehmen stellt Bügeleisen her. Die Produktionskosten lassen sich näherungsweise durch die folgende Funktion K beschreiben:

$$K(x) = 0,001 \cdot x^3 - 0,13 \cdot x^2 + 6,2 \cdot x + 75 \quad \text{mit } x \geq 0$$

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)

$K(x)$... Kosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

- b) – Ermitteln Sie diejenige Produktionsmenge, bei der die Stückkosten (Durchschnittskosten) minimal sind.
– Zeigen Sie, dass bei dieser Produktionsmenge die Stückkosten (Durchschnittskosten) gleich den Grenzkosten sind.

Digitalkameras (B_126)

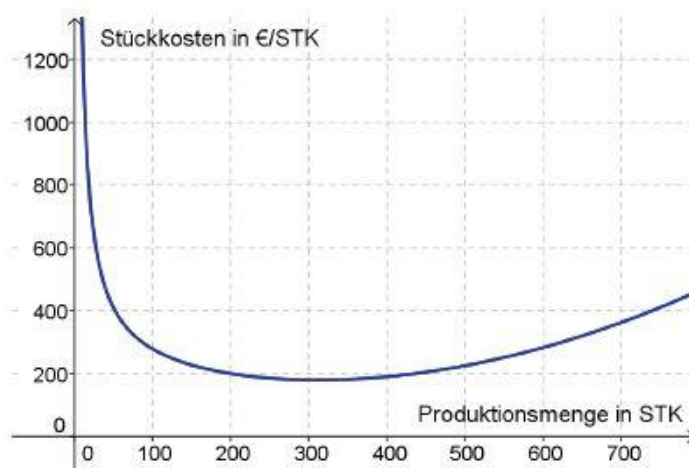
Eine spezielle Ausgabe von Digitalkameras wird verkauft.

- a) – Erklären Sie, wie die langfristige Preisuntergrenze aus den Produktionskosten K , die bei der Erzeugung der Kameras anfallen, ermittelt werden kann.
– Argumentieren Sie, welche Bedeutung die langfristige Preisuntergrenze für den Betrieb hat.

Elektronikhersteller (B_140)

Ein Elektronikhersteller erzeugt Spielkonsolen und Gamecontroller.

- b) Die nachstehende Grafik zeigt die Stückkosten in Abhängigkeit von der erzeugten Menge an Spielkonsolen.

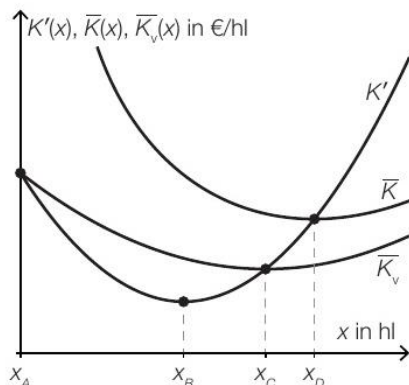


- Lesen Sie die langfristige Preisuntergrenze ab.
– Erklären Sie, welcher Erlös zu erwarten ist, wenn man die dem Betriebsoptimum entsprechende Menge an Spielkonsolen produziert und alle zum Preis der langfristigen Preisuntergrenze verkauft.
– Lesen Sie aus der Grafik die Stückkosten bei der Herstellung von 450 Konsolen ab.
– Ermitteln Sie den Marktpreis, mit dem eine Konsole verkauft werden muss, wenn 450 Konsolen hergestellt und mit einem Gewinn von € 20.000 verkauft werden sollen.

Fruchtsaftproduktion * (B_483)

Ein Unternehmen produziert den Fruchtsaft *Mangomix*.

- b) In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Grenzkostenfunktion K' , der Durchschnittskostenfunktion \bar{K} und der variablen Durchschnittskostenfunktion \bar{K}_v für den Fruchtsaft *Mangomix* dargestellt.
 Vier Produktionsmengen, x_A bis x_D , sind auf der horizontalen Achse markiert.



- 1) Ordnen Sie den beiden Begriffen jeweils die zutreffende Produktionsmenge aus A bis D zu. [2 zu 4]

Kostenkehre	
Betriebsminimum	

A	Produktionsmenge x_A
B	Produktionsmenge x_B
C	Produktionsmenge x_C
D	Produktionsmenge x_D

Grenzkosten und Grenzerlös * (B_421)

- b) Um für eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ das Betriebsoptimum zu ermitteln, wurde folgende Rechnung angesetzt:

$$\frac{K(x)}{x} = a \cdot x^2 + b \cdot x + c + \frac{d}{x}$$

$$\left(\frac{K(x)}{x}\right)' = 2 \cdot a \cdot x + b + \frac{d}{x}$$

Dabei ist die Berechnung der Ableitungsfunktion fehlerhaft.

– Stellen Sie die Berechnung der Ableitungsfunktion richtig.

Grenzkosten und Stückkosten (B_130)

Als Grenzkostenfunktion K' bezeichnet man die 1. Ableitung der Gesamtkostenfunktion K . Bei der Herstellung eines bestimmten Produkts während zweier aufeinanderfolgender Herstellungsperioden können die Grenzkosten durch eine lineare Grenzkostenfunktion K_1' (Abb. 1) und eine quadratische Grenzkostenfunktion K_2' (Abb. 2) beschrieben werden.

x ... Produktionsmenge in Stück (Stk.)

$K_1'(x), K_2'(x)$... Grenzkosten in Euro pro Stück (€/Stk.) bei x erzeugten Stk.

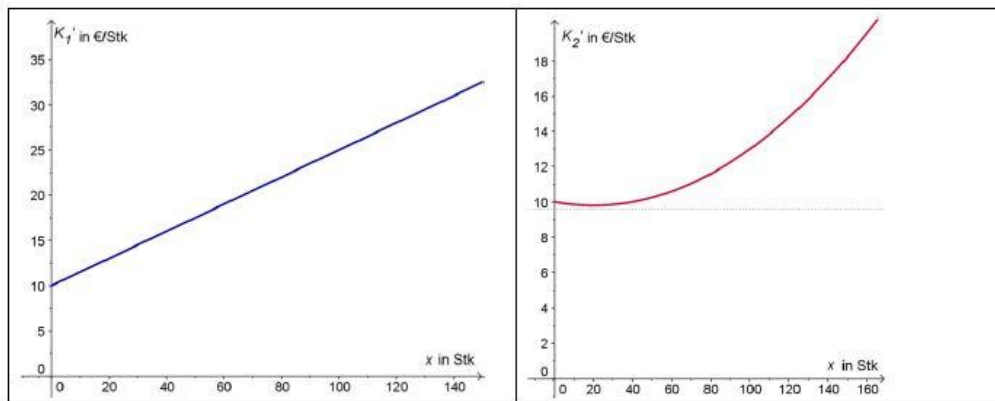


Abb. 1

Abb. 2

- c) Die Kostenfunktion für die Herstellung eines anderen Produkts lautet:

$$K(x) = 0,0006x^3 + 0,02x^2 + 10x + 250$$

x ... Produktionsmenge in Stück (Stk.)

$K(x)$... Gesamtkosten in Euro (€) bei Erzeugung von x Stk.

- Ermitteln Sie die Gleichungen der Grenzkostenfunktion K' und der Stückkostenfunktion $\bar{K} = \frac{K}{x}$.
- Zeichnen Sie im Definitionsbereich $[0;250]$ die Graphen der beiden Funktionen K' und \bar{K} in ein Koordinatensystem.
- Interpretieren Sie den Schnittpunkt der beiden Kurven im Zusammenhang mit dem Betriebsoptimum und den minimalen Stückkosten.

Möbel * (B_513)

- c) Die Kostenfunktion K_2 eines Betriebs bei der Produktion von Kommoden ist gegeben durch:

$$K_2(x) = 0,001 \cdot x^3 - 0,9 \cdot x^2 + a \cdot x + 3000$$

x ... Produktionsmenge in Stück

$K_2(x)$... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

Bei einer Produktion von 100 Kommoden hat der Betrieb Gesamtkosten von 35000 GE.

- 1) Berechnen Sie den Koeffizienten a der Kostenfunktion K_2 .
- 2) Berechnen Sie das Betriebsoptimum.

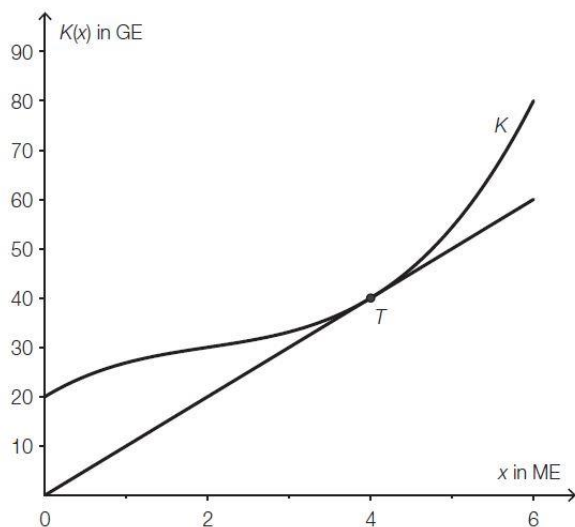
Der Break-even-Point wird bei einem Verkauf von 60 Kommoden erreicht.

- 3) Berechnen Sie den Preis pro Kommode bei dieser verkauften Menge.

Kosten * (B_319)

Kostenfunktionen geben den Zusammenhang zwischen der produzierten Menge und den dazugehörigen Gesamtproduktionskosten an.

- b) Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer anderen Kostenfunktion und die Tangente an diesen Graphen durch den Koordinatenursprung.



- Interpretieren Sie die Bedeutung der x -Koordinate des Berührungspunktes T und der Steigung dieser Tangente im Sachzusammenhang.

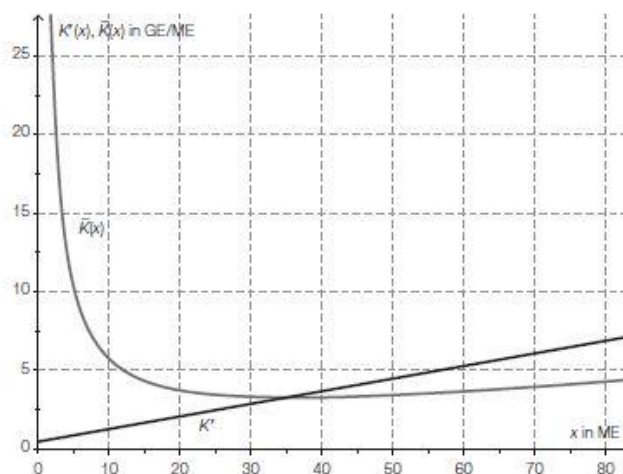
Kostenanalyse (B_141)

Ein Betrieb stellt im Wesentlichen 2 verschiedene Produkte her. Um gewinnbringend zu produzieren, wurden jeweils die bei der Produktion anfallenden Kosten in Abhängigkeit von der produzierten Menge untersucht. Dabei werden folgende Bezeichnungen verwendet:

- x ... erzeugte Menge in Mengeneinheiten (ME)
- $K(x)$... Gesamtkosten bei x erzeugten ME in Geldeinheiten (GE)

- b) Die nebenstehende Grafik stellt die Stückkosten \bar{K} und die Grenzkosten K' im Herstellungsprozess des 2. Produkts in Abhängigkeit von der Produktionsmenge dar.

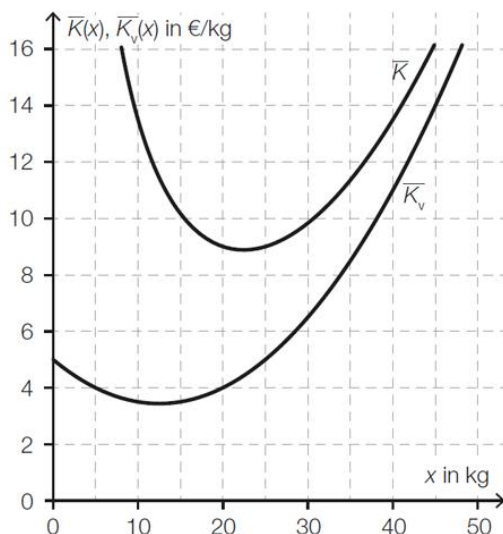
- Interpretieren Sie die Bedeutung der x -Koordinate des Schnittpunkts dieser Funktionsgraphen im Sachzusammenhang.
- Lesen Sie die langfristige Preisuntergrenze aus der Grafik ab.
- Dokumentieren Sie in Worten, wie man das Betriebsoptimum und die langfristige Preisuntergrenze mithilfe der Differentialrechnung berechnen kann.



Käseproduktion * (B_468)

Der Produktionsleiter einer kleinen Käserei hat für eine bestimmte Käsesorte die täglichen Produktionskosten genauer untersucht.

- b) In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Stückkostenfunktion \bar{K} und der variablen Stückkostenfunktion \bar{K}_v dargestellt.

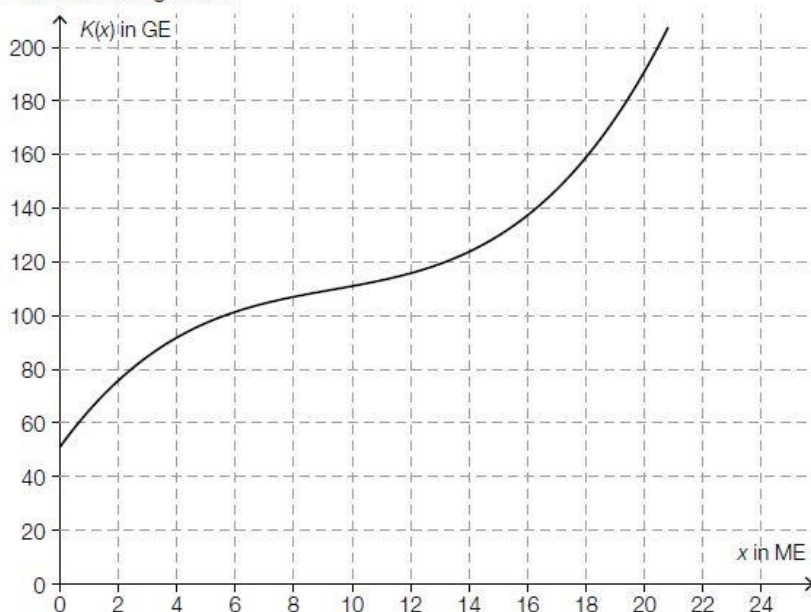


- 1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung das Betriebsoptimum ab. Geben Sie die zugehörige Einheit an.
- 2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die kurzfristige Preisuntergrenze ab. Geben Sie die zugehörige Einheit an.

Lackproduktion * (B_433)

Ein Unternehmen stellt verschiedene Lacke her. Es wird die monatliche Produktion betrachtet.

- b) Im nachstehenden Diagramm ist der Graph der Kostenfunktion K für die Herstellung des Lacks *VariColor* dargestellt.



Das Betriebsoptimum kann mithilfe des Graphen der Kostenfunktion K ermittelt werden, indem man diejenige Tangente an den Graphen von K einzeichnet, die durch den Koordinatenursprung verläuft. Die x -Koordinate des Berührungspunkts ist das Betriebsoptimum.

- Ermitteln Sie grafisch mithilfe des obigen Diagramms das Betriebsoptimum.
- Ermitteln Sie die langfristige Preisuntergrenze.

Maschinenring (B_182)

Vier landwirtschaftliche Betriebe, die Weizen anbauen, haben sich zu einem Maschinenring zusammengeschlossen.

- c) Die Landwirte des Maschinenrings diskutieren über die Begriffe *Betriebsoptimum* und *Betriebsminimum*.

– Ordnen Sie den beiden Begriffen jeweils die korrekte Aussage aus A bis D zu. [2 zu 4]

Betriebsoptimum		A	Hier spielen die Fixkosten keine Rolle.
Betriebsminimum		B	Hier erzielt man den höchsten Erlös.
		C	Hier sind die Durchschnittskosten am kleinsten.
		D	Hier steigt der Gewinn am stärksten.

Miststreuer (B_286)

Ein Unternehmen stellt Miststreuer her. Die Produktion sowie der Verkauf werden innerhalb eines Jahres betrachtet.

- b) Die jährlichen Fixkosten für die Herstellung eines Produktionsteils des Miststreuers belaufen sich auf 8000 Geldeinheiten (GE).

Die variablen Gesamtkosten können durch folgende Funktion beschrieben werden:

$$K_v(x) = 0,11 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 80 \cdot x \text{ mit } x \geq 0$$

x ... produzierte Mengeneinheiten (ME)

$K_v(x)$... variable Kosten in GE bei x produzierten ME

- Dokumentieren Sie, wie die langfristige Preisuntergrenze berechnet werden kann.
- Berechnen Sie dasjenige Intervall, in dem die Kostenfunktion degressiv verläuft.
- Interpretieren Sie die Stelle des Übergangs vom degressiven in den progressiven Verlauf der Kostenfunktion hinsichtlich der Veränderung der Kosten.

Produktion * (B_220)

- b) – Beschreiben Sie die notwendigen Schritte zur Berechnung der kurzfristigen Preisuntergrenze, wenn die Gesamtkostenfunktion bekannt ist.

Sportartikel * (B_348)

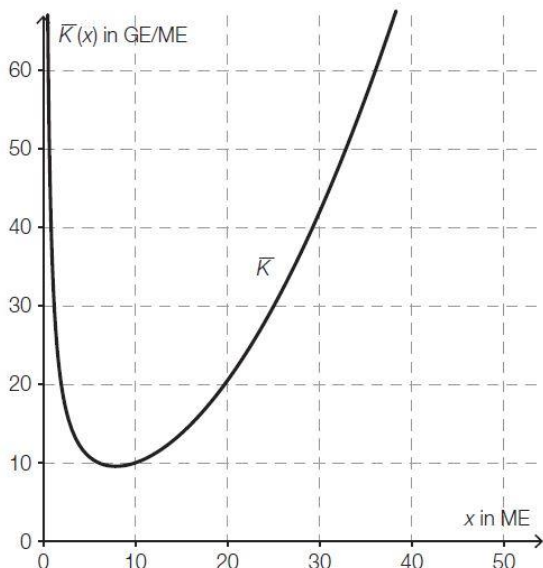
c) Für die Grenzkostenfunktion K' eines anderen Sportartikels gilt:

$$K'(x) = 0,15 \cdot x^2 - 0,6 \cdot x + 5$$

Die Fixkosten betragen 30 GE.

– Ermitteln Sie die zugehörige Kostenfunktion K .

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Stückkostenfunktion \bar{K} dargestellt.



– Lesen Sie das Betriebsoptimum ab.

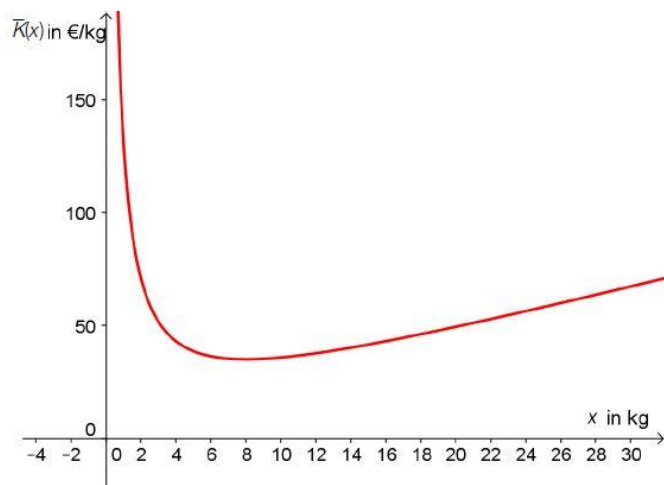
Preis und Absatz (B_128)

In einem Monopolbetrieb wird der Zusammenhang des Absatzes einer Ware mit einem bestimmten Preis pro Kilogramm untersucht.

x ... Absatz in Kilogramm (kg)

$p(x)$... Preis für x verkaufte Kilogramm in Euro pro Kilogramm (€/kg)

c) Die Stückkostenfunktion \bar{K} für diese Ware hat den unten dargestellten Funktionsgraphen.



- Lesen Sie daraus das Betriebsoptimum und die minimalen Stückkosten ab.
- Erklären Sie, wie man diese aus der Gleichung der Gesamtkostenfunktion berechnet.
- Argumentieren Sie, welche Bedeutung die minimalen Stückkosten für die Festlegung des Verkaufspreises haben.

Scharniere * (B_503)

Ein Unternehmen stellt Scharniere her.

- b) Die Durchschnittskosten für die Herstellung des Scharniers *Modul* lassen sich durch die Durchschnittskostenfunktion \bar{K} mit $\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$ beschreiben:

$$\bar{K}(x) = 0,25 \cdot x + 3 + \frac{1}{x}$$

x ... Produktionsmenge in ME

$\bar{K}(x)$... Durchschnittskosten bei der Produktionsmenge x in GE/ME

Es werden folgende Rechenschritte ausgeführt:

$$\bar{K}'(x) = 0,25 - \frac{1}{x^2}$$

$$0,25 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{0,25}}$$

$$x_1 = 2, \quad (x_2 = -2)$$

- 1) Interpretieren Sie die Lösung $x_1 = 2$ im gegebenen Sachzusammenhang.
- 2) Zeigen Sie mithilfe der Regel zum Ableiten von Potenzfunktionen, dass man als Ableitung von $\frac{1}{x}$ den Ausdruck $-\frac{1}{x^2}$ erhält.

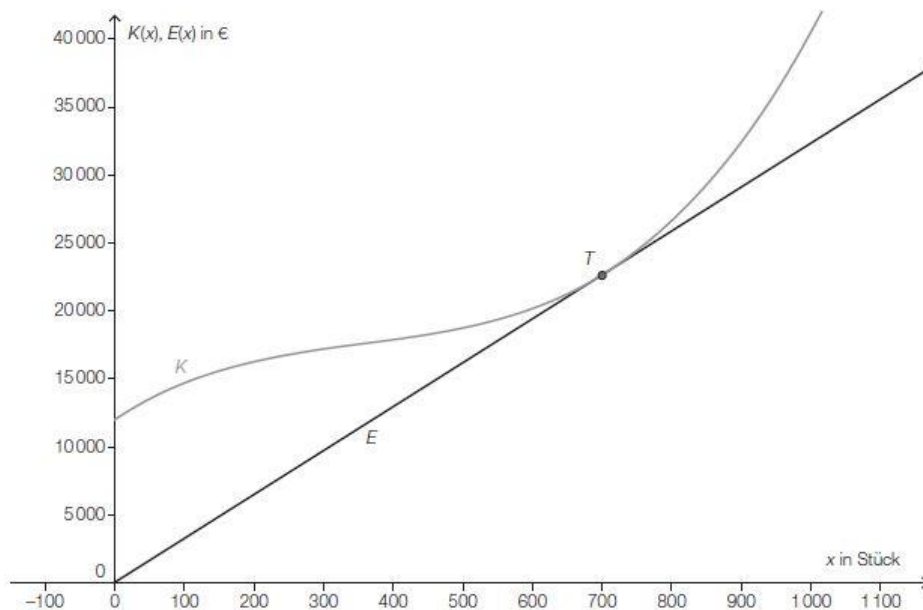
Sektkellerei (B_132)

Eine Sektkellerei erzeugt und vertreibt Sekt unterschiedlicher Marken.

x ... Anzahl der produzierten oder verkauften Flaschen pro Tag

$K(x)$... Gesamtkosten bei x Flaschen pro Tag in Euro (€)

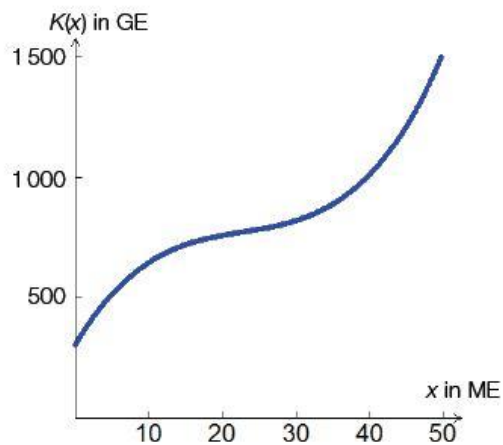
- c) Interpretieren Sie in der nachstehenden Grafik die Tangente an die Kostenfunktion K als lineare Erlösfunktion E .



- Lesen Sie den Anstieg der Tangente und die Koordinaten des Berührungspunktes T ab.
- Interpretieren Sie die Aussage der Koordinaten von T und des abgelesenen Tangentenanstiegs im Sachzusammenhang.
- Argumentieren Sie, welche Informationen diese Grafik über den möglichen Gewinn enthält.

Spielzeugautos (1) (B_200)

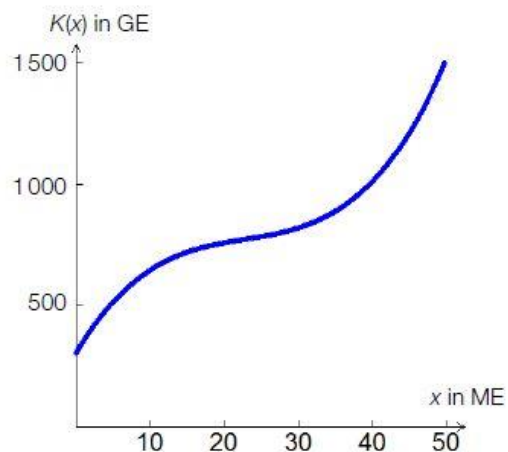
In der nachstehenden Grafik ist eine Kostenfunktion für die Produktion eines Spielzeugautos dargestellt.



- a) – Zeichnen Sie in der Grafik das Betriebsoptimum ein.
– Begründen Sie Ihre Vorgangsweise.

Spielzeugautos (2) (B_150)

In der nachstehenden Grafik ist eine Kostenfunktion für die Produktion eines Spielzeugautos dargestellt.



- a) – Zeichnen Sie in der Grafik eine Tangente an die Kostenfunktion durch den Koordinatenursprung ein.

Interpretieren Sie diese Tangente als lineare Erlösfunktion.

- Beschreiben Sie die Bedeutung der Steigung dieser Tangente und der x -Koordinate des Berührungspunkts im Sachzusammenhang.

Sportartikel * (B_348)

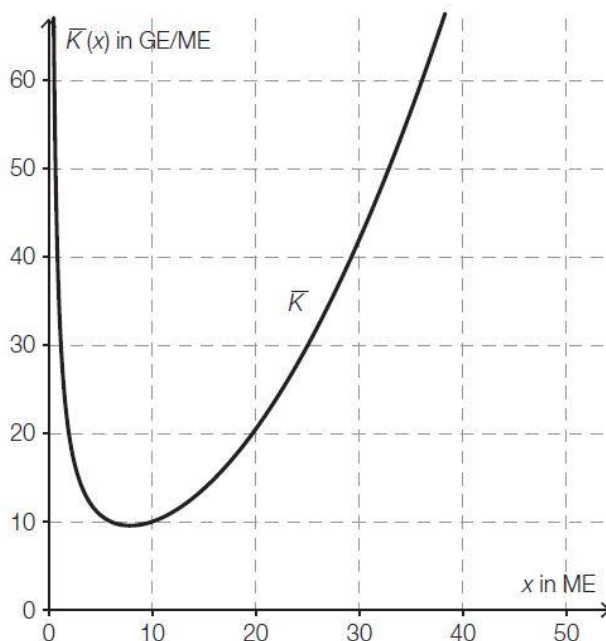
c) Für die Grenzkostenfunktion K' eines anderen Sportartikels gilt:

$$K'(x) = 0,15 \cdot x^2 - 0,6 \cdot x + 5$$

Die Fixkosten betragen 30 GE.

– Ermitteln Sie die zugehörige Kostenfunktion K .

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Stückkostenfunktion \bar{K} dargestellt.



– Lesen Sie das Betriebsoptimum ab.

Süßwarenproduktion * (B_545)

Ein Unternehmen produziert Süßwaren.

c) Für die Produktion von Schokolinsen sind die Kostenfunktion K und die Erlösfunktion E bekannt:

$$K(x) = 0,0003 \cdot x^3 - 0,017 \cdot x^2 + 0,4 \cdot x + 40$$

$$E(x) = 1,5 \cdot x$$

x ... produzierte bzw. abgesetzte Menge in ME

$K(x)$... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

$E(x)$... Erlös bei der Absatzmenge x in GE

- 1) Stellen Sie eine Gleichung der Gewinnfunktion G auf.
- 2) Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$$\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0,0003 \cdot x^2 - 0,017 \cdot x + 0,4 + \frac{40}{x}$$

$$0,0006 \cdot x - 0,017 - \frac{40}{x^2} = 0 \Rightarrow x \approx 52,5$$

- 3) Interpretieren Sie die Zahl 52,5 im gegebenen Sachzusammenhang.

Tischlereibetrieb (B_269)

Ein Tischlereibetrieb produziert Tischgruppen (Tisch und Sessel), die österreichweit vertrieben werden sollen.

- a) Die Kosten für die Produktion eines bestimmten Tischgruppenmodells lassen sich durch die Kostenfunktion K beschreiben:

$$K(x) = \frac{x^3}{300} - x^2 + 200 \cdot x + 9000$$

Folgende Preis-Absatz-Funktion p beschreibt den Zusammenhang zwischen Absatz und Preis für dieses Tischgruppenmodell:

$$p(x) = -\frac{10}{3} \cdot x + 875$$

x ... Tischgruppenmodelle in Mengeneinheiten (ME)

$K(x)$... Kosten bei x ME in Geldeinheiten (GE)

$p(x)$... Preis bei x ME in GE/ME

- Erstellen Sie eine Gleichung der Gewinnfunktion.
- Ermitteln Sie, bei welcher Menge der maximale Gewinn erreicht wird.
- Ermitteln Sie die Durchschnittskosten für die gewinnmaximierende Menge.
- Dokumentieren Sie in Worten, wie man die langfristige Preisuntergrenze berechnen kann.

Traktoren-Steuerung (B_183)

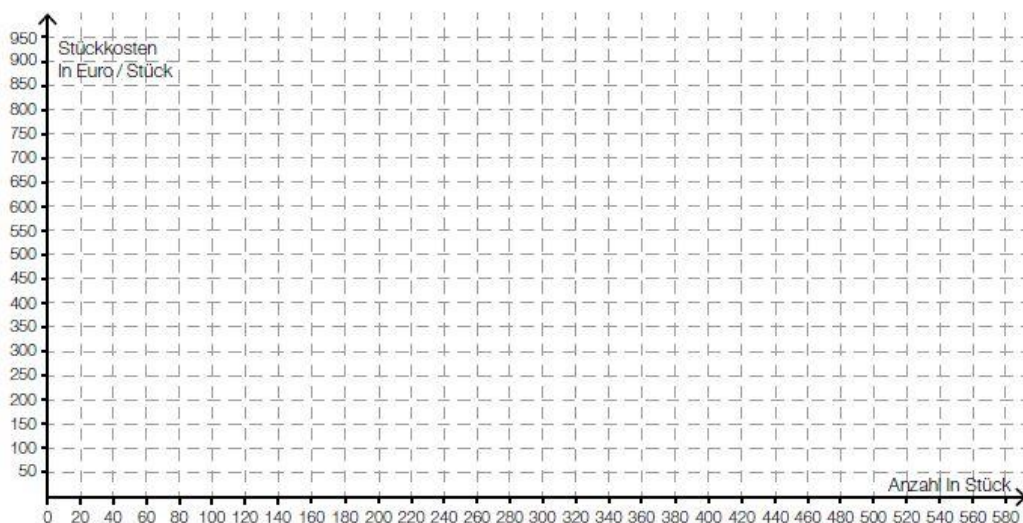
Ein Großunternehmen hat eine spezielle GPS-unterstützte Steuerung für Traktoren entwickelt und verkauft diese direkt.

- b) Für die Produktion von Ersatzteilen der Steuerung werden die Stückkosten durch die folgende Funktion \bar{K} beschrieben:

$$\bar{K}(x) = 0,001 \cdot x^2 - 0,03 \cdot x + 1 + \frac{70000}{x}$$

x ... Anzahl produzierter Stück

$\bar{K}(x)$... Stückkosten bei x produzierten Stück in Euro/Stück



- Zeichnen Sie den Graphen der Stückkostenfunktion in das obige Koordinatensystem ein.
- Markieren Sie in der obigen Abbildung das Betriebsoptimum.

2. Erlösfunktion $E(x)$

Video 7/10



2.1 Preisfunktion bzw. Nachfragefunktion $p(x)$:

Die Preisfunktion der Nachfrage gibt den Preis p in Abhängigkeit der produzierten Menge x an.

- Vollkommene Konkurrenz: Konstanter Preis \rightarrow Lineare Preisfunktion
- Monopolbetrieb: Preis kann individuell bestimmt werden

Eine **lineare Preisfunktion** hat zwei wichtige Eigenschaften:

- Höchstpreis p_h** : Jener Preis, bei dem kein Stück mehr verkauft werden kann, d.h.

$$p_h = p(0)$$

Funktionswert der Preisfunktion bei $x = 0$

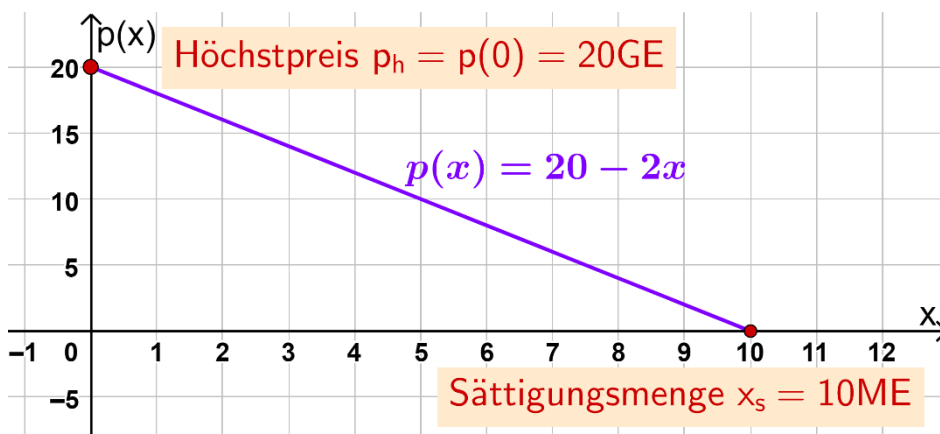
- Sättigungsmenge x_s** : Jene Menge, bei dem der Markt gesättigt ist und damit nicht mehr verkauft werden kann, d.h.

$$p(x_s) = 0$$

Nullstelle der Preisfunktion

Mit steigender Nachfrage sinkt der Preis. So lange, bis nicht mehr produziert werden kann (Sättigungsmenge).

Bemerkung: Die Preisfunktion muss nicht zwingend eine lineare Funktion sein.



$$p(x) = 20 - 2x$$

Berechnung Höchstpreis:

$$p(0) = 20 - 2 \cdot 0 = 20 \text{ GE}$$

Berechnung Sättigungsmenge:

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow 20 - 2x = 0 \quad | -20$$

$$-2x = -20 \quad | : (-2)$$

$$x = 10 \text{ ME}$$

Bsp. 16) Gegeben ist eine Preisfunktion $p(x)$. Bestimme den Höchstpreis und die Sättigungsmenge.

- $p(x) = -3x + 60$
- $p(x) = -0,01x + 10$
- $p(x) = -0,25x + 250$

Farben und Lacke * (B_539)

Ein Unternehmen stellt verschiedene Farben und Lacke her.

- c) Für einen bestimmten Kunstharzlack beträgt der Höchstpreis 60 €/L. Bei einem Preis von 20 €/L können 200 L dieses Lacks abgesetzt werden. Der Zusammenhang zwischen dem Preis und der Absatzmenge kann für diesen Lack durch die lineare Preis-Absatz-Funktion p beschrieben werden.

x ... Absatzmenge in L

$p(x)$... Preis bei der Absatzmenge x in €/L

- 1) Stellen Sie eine Gleichung der linearen Preis-Absatz-Funktion p auf.
- 2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Preis-Absatz-Funktion p im gegebenen Sachzusammenhang.
- 3) Berechnen Sie die Sättigungsmenge.

Müsli * (B_570)

Ein kleiner Betrieb produziert und verpackt verschiedene Sorten Müsli.

- d) In einer Marktstudie wird die Nachfrage nach einer bestimmten Müsliart untersucht.

Die Sättigungsmenge liegt bei 180 Packungen.

Bei einem Preis von 10 Euro pro Packung beträgt die Nachfrage 80 Packungen.

Für die Preisfunktion der Nachfrage p_N gilt:

$$p_N(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 30$$

x ... Anzahl der nachgefragten Packungen

$p_N(x)$... Preis bei der Nachfrage x in Euro pro Packung

- 1) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b .
- 2) Berechnen Sie die Nachfrage bei einem Preis von 24 Euro pro Packung.

Modernisierung (B_324)

Ein Unternehmer möchte seinen Betrieb modernisieren.

- c) Durch den Einsatz neuer Maschinen steigt die Qualität des hergestellten Produkts. Man glaubt, dass bei einem Preis von 20 GE/ME monatlich 100 ME abgesetzt werden können. Der Höchstpreis für das Produkt liegt erfahrungsgemäß bei 60 GE/ME.

– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Preisfunktion der Nachfrage.

Der Unternehmer plant, den Preis von 20 GE/ME auf 18 GE/ME zu senken.

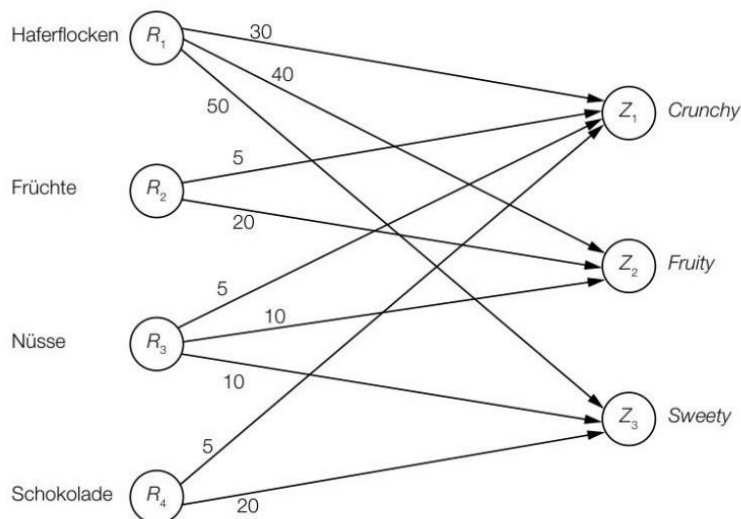
– Berechnen Sie, um welchen Betrag sich der Erlös durch die Preissenkung verändert.

Müsliriegel * (B_571)

Ein Start-up-Unternehmen bringt verschiedene Müsliriegel-Sorten auf den Markt.

Aus den 4 Rohstoffen Haferflocken (R_1), Früchte (R_2), Nüsse (R_3) und Schokolade (R_4) werden mit Öl und Honig Müsliriegel der Sorten *Crunchy* (Z_1), *Fruity* (Z_2) und *Sweety* (Z_3) als Zwischenprodukte hergestellt.

Im nachstehenden Gozinto-Graphen ist der Mengenbedarf an diesen 4 Rohstoffen in Gramm für die Herstellung jeweils eines Müsliriegels dargestellt.



Das Start-up-Unternehmen bringt die Müsliriegel als Endprodukte in 6er-Probierversammlungen (E_1), in 12er-Packungen (E_2) und in 18er-Mix-Boxen (E_3) auf den Markt.

Die jeweiligen Stückzahlen der Müsliriegel in den Packungen sind in der nachstehenden Tabelle angegeben, die der Matrix P entspricht.

		6er-Probierversammlung E_1	12er-Packung E_2	18er-Mix-Box E_3
<i>Crunchy</i> Z_1		2	2	10
<i>Fruity</i> Z_2		2	4	4
<i>Sweety</i> Z_3		2	6	4

c) In einer Marktstudie wird die Nachfrage nach der 18er-Mix-Box untersucht.

Die Sättigungsmenge liegt bei 180 Stück.

Bei einem Preis von 10 Euro pro Stück beträgt die Nachfrage 80 Stück.

Für die Preisfunktion der Nachfrage p_N gilt:

$$p_N(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 30$$

x ... nachgefragte Menge in Stück

$p_N(x)$... Preis bei der nachgefragten Menge x in Euro pro Stück

- 1) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b .
- 2) Berechnen Sie die Nachfrage bei einem Preis von 24 Euro pro Stück.

Preis und Absatz (B_128)

In einem Monopolbetrieb wird der Zusammenhang des Absatzes einer Ware mit einem bestimmten Preis pro Kilogramm untersucht.

x ... Absatz in Kilogramm (kg)

$p(x)$... Preis für x verkaufte Kilogramm in Euro pro Kilogramm (€/kg)

b) Für den 2. Verkaufsmonat lautet die Preisfunktion der Nachfrage:

$$p(x) = -0,04x^2 - 0,2x + 40$$

Wenn sich die Absatzmenge von x kg auf $(x + 1)$ kg verändert, gilt für die damit zusammenhängende Preisänderung $\Delta p(x)$ folgende Beziehung:

$$\Delta p(x) = p(x + 1) - p(x)$$

- Ermitteln Sie eine möglichst einfache Gleichung der Funktion Δp für die gegebene Preisfunktion der Nachfrage p .
- Berechnen Sie mithilfe von Δp die Veränderung des Preises bei einer Absatzsteigerung von 20 kg auf 21 kg.

Produktion von Golfschlägern (B_303)

Ein Unternehmen produziert und verkauft Golfschläger.

a) Durch Marktforschung konnten folgende Verkaufsdaten ermittelt werden:

Nachfrage in Stück	240	310	400	500
Preis in €/Stk.	230	217	203	182

Auf Grundlage dieser Daten soll eine Preisfunktion der Nachfrage p_N mit $p_N(x) = a \cdot x + b$ ermittelt werden.

x ... Anzahl der Golfschläger in Stück

$p_N(x)$... Preis bei einer Nachfrage von x Stück in Euro pro Stück (€/Stk.)

- Ermitteln Sie mithilfe von Regression eine Gleichung der Funktion p_N .
- Interpretieren Sie die Parameter a und b der Preisfunktion der Nachfrage p_N im gegebenen Sachzusammenhang.

2.2 Erlösfunktion $E(x)$:

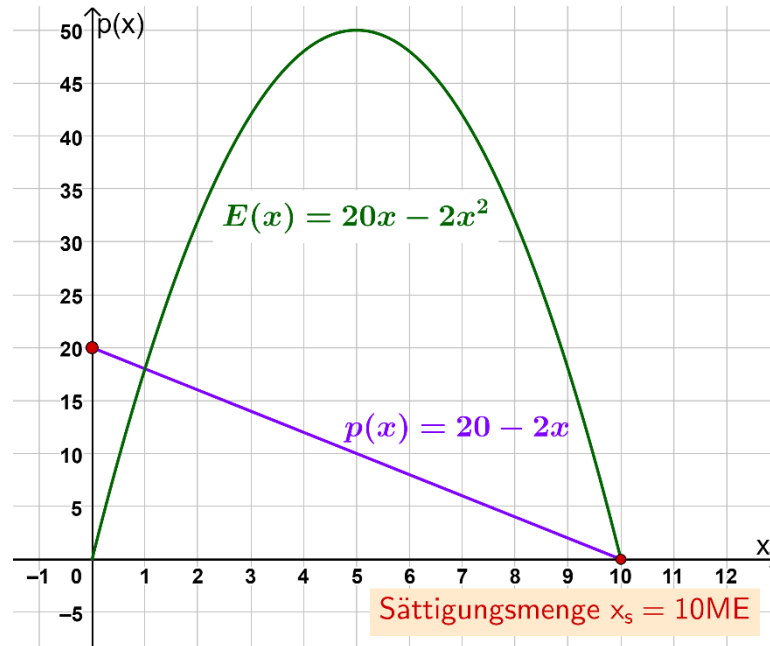
Die Erlösfunktion $E(x)$ ordnet jeder Stückzahl x den damit verbundenen Erlös zu. Die Erlösfunktion wird mit folgender Formel berechnet:

$$E(x) = p(x) \cdot x$$

$$\text{Erlös} = \text{Preis pro Stück} \cdot \text{Anzahl der Stückzahl}$$

- Ist die **Preisfunktion linear**, so ist die **Erlösfunktion** eine **Parabel** mit **zwei Nullstellen** (Eine Nullstelle im Ursprung, die andere bei der Sättigungsmenge, da kein Erlös mehr möglich ist).

Beispiel: $p(x) = 20 - 2x \rightarrow E(x) = p(x) \cdot x = (20 - 2x) \cdot x = 20x - 2x^2$



Bestimmung Maximaler Erlös

Fragestellung: Welche Stückzahl x eines Produktes soll erzeugt werden, damit nach dem Verkauf zum Preis von $p(x)$ der größtmögliche Erlös entsteht?

Gegeben: Preisfunktion $p(x) = 20 - 2x$

Aus der Preisfunktion kann die Erlösfunktion gebildet werden. Es gilt: $E(x) = p(x) \cdot x = 20x - 2x^2$

Zur **Bestimmung** des **maximalen Erlöses** müssen wir das **Maximum** der **Erlösfunktion** berechnen.

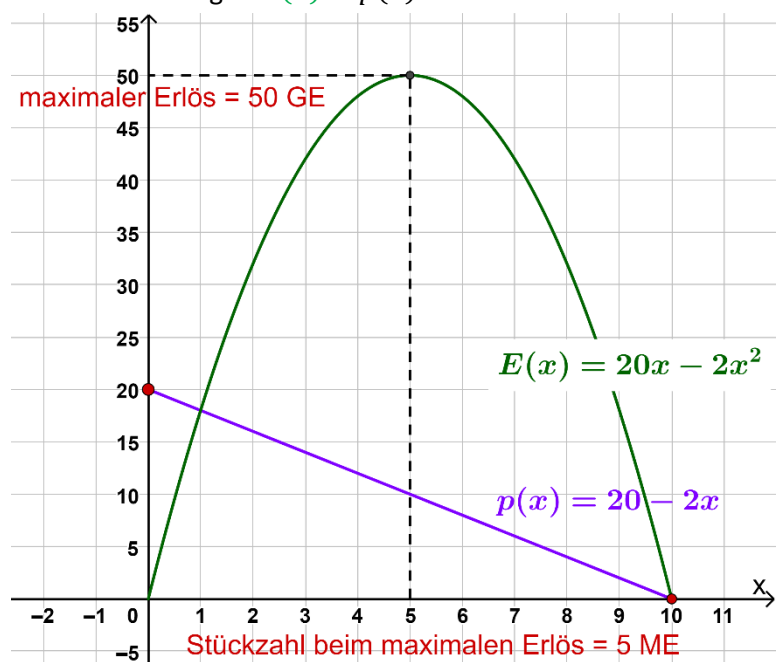
Schritt 1: $E'(x) = 20 - 4x$ & $E''(x) = -4$

Schritt 2: $E'(x) = 0 \Leftrightarrow 20 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 5$

Schritt 3: $E''(5) = -4 < 0 \rightarrow \text{MAXIMUM}$

Schritt 4: Erlös $E(5) = 50 \text{ GE}$, Preis bei 5 Stück:
 $p(5) = 10 \text{ GE/ME}$

Antwort: Werden 5 ME produziert, so kann der größtmögliche Erlös mit 50 GE erzielt werden. Der Preis pro ME beträgt 10 GE.



Bsp. 17) Ein Fußballverein möchte im Sommer ein Fußballcamp für Kinder veranstalten. Laut einer Umfrage würde das Fußballcamp bei einem Preis von 170 € von 90 Kindern, sowie bei einem Preis von 150 € von 110 Kindern gebucht werden.

Stelle die Funktionsgleichung der zugehörigen linearen Preisfunktion der Nachfrage $p(x)$ auf.

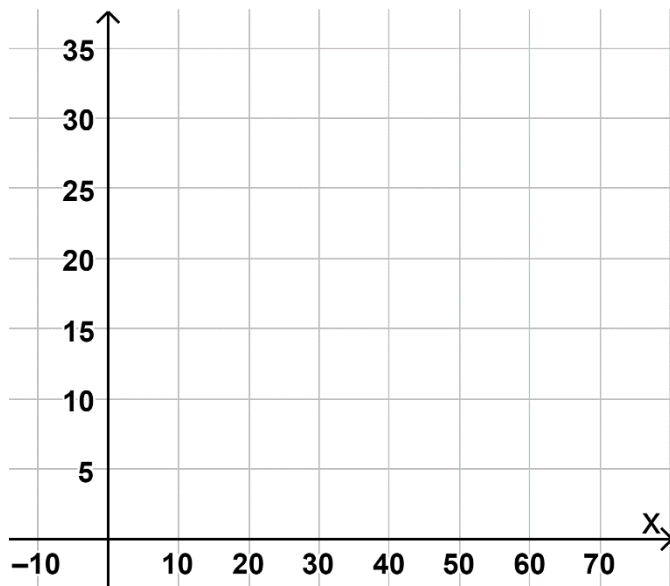
Bsp. 18) Die Preisfunktion p für ein fünftägiges Abenteuercamp ist erhoben worden:

$$p(x) = -3x + 450$$

- x ... Anzahl der teilnehmenden Personen
 - $p(x)$... Preis bei x Personen in € pro Person
- a. Berechne denjenigen Preis pro Person, der bei (i) 50, (ii) 75 bzw. (iii) 100 teilnehmenden Personen zu erwarten ist.
 - b. Gib den Höchstpreis an.
 - c. Bestimme die Sättigungsmenge an. Interpretiere den Wert im gegebenen Kontext.
 - d. Ermittle die Erlösfunktion $E(x)$ und berechne mit Hilfe der Differentialrechnung den maximalen Erlös. Bei wie vielen Personen ist der maximale Erlös zu erwarten? Gib den maximalen Erlös an.

Bsp. 19) Ein Restaurant möchte ein All-You-Can-Eat Buffet einführen. In einer Befragung haben die Personen angegeben, welchen Preis sie für das Buffet bezahlen würden. Das Ergebnis der Umfrage liefert folgende Preisfunktion der Nachfrage $p(x)$:

$$p(x) = -0,5x + 30$$



- x ... Anzahl der Personen, die zum Essen kommen würden
 - $p(x)$... Preis für das Buffet bei x Personen in € pro Person
- a. Zeichne die Preisfunktion in das Koordinatensystem ein.
 - b. Bestimme graphisch die Sättigungsmenge und den Höchstpreis. Gib die Werte an und markiere sie in deiner Graphik.
 - c. Bestimme die zugehörige Erlösfunktion $E(x)$. Ermittle den maximalen Erlös. Bei wie vielen Personen wird der maximale Erlös erzielt?

Miststreuer (B_286)

Ein Unternehmen stellt Miststreuer her. Die Produktion sowie der Verkauf werden innerhalb eines Jahres betrachtet.

- a) Das Unternehmen geht bezüglich eines speziellen Zusatzteils innerhalb eines Jahres von folgender Preis-Absatz-Funktion aus:

$$p(x) = -0,02 \cdot (x + 10)^2 + 288$$

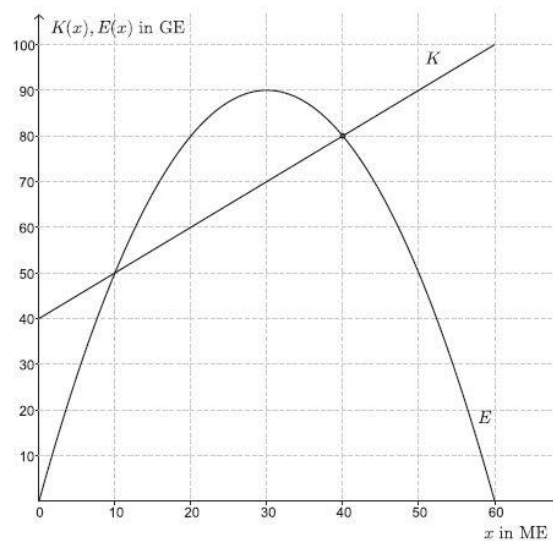
x ... verkaufte Menge in Mengeneinheiten (ME)

$p(x)$... Preis bei x verkauften ME in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME)

- Argumentieren Sie anhand der Funktionsgleichung, dass der Graph der Funktion p einen Hochpunkt hat.
- Berechnen Sie die Sättigungsmenge.
- Stellen Sie eine Gleichung zur Berechnung der erlösmaximierenden Menge auf.

Papierproduzent * (B_281)

Ein Papierproduzent stellt als Monopolist hochwertiges Urkundenpapier her. Die Kostenfunktion K für die Herstellung und die Erlösfunktion E für den Absatz dieses Produkts sind in der nachstehenden Grafik dargestellt.



- a) - Stellen Sie die Funktionsgleichung dieser Kostenfunktion K auf.
- Argumentieren Sie, welches Vorzeichen der Koeffizient a dieser Erlösfunktion E mit $E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ haben muss.

Rohrproduktion * (B_089)

- d) Die Erlösfunktion E für Betonrohre ist gegeben durch:

$$E(x) = -3,2 \cdot x \cdot (x - 25)$$

x ... Absatzmenge in ME

$E(x)$... Erlös bei der Absatzmenge x in GE

- Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage.
- Ermitteln Sie den Höchstpreis.

Verkehrsbetriebe * (B_294)

Städtische Verkehrsbetriebe analysieren ihre Einnahmen.

- c) In der Stadt C wird modellhaft angenommen, dass der Zusammenhang zwischen dem Einzelfahrscheinpreis in Euro und der Anzahl der nachgefragten Einzelfahrscheine in Millionen durch eine quadratische Funktion p beschrieben werden kann.

$$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

x ... Anzahl der nachgefragten Einzelfahrscheine in Millionen

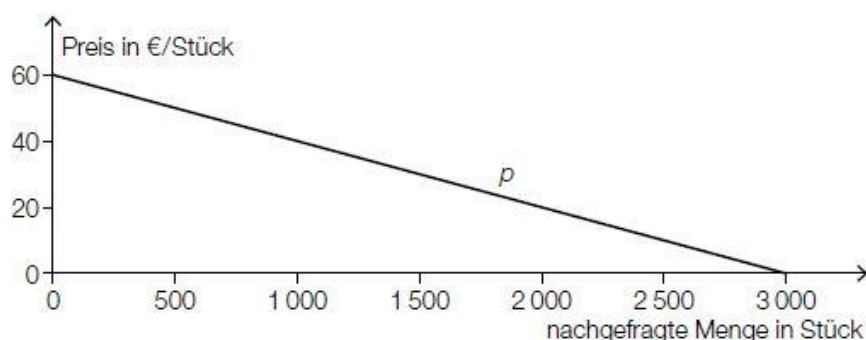
$p(x)$... Einzelfahrscheinpreis bei x nachgefragten Einzelfahrscheinen in Euro

Bei einem Einzelfahrscheinpreis von € 1,60 werden 50 Millionen Einzelfahrscheine nachgefragt. Bei einem Einzelfahrscheinpreis von € 1,80 werden 48 Millionen Einzelfahrscheine nachgefragt. Der Höchstpreis wird mit € 7,80 angenommen.

- 1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion p .
- 2) Berechnen Sie die Koeffizienten von p .

Betonrohre* (B_452)

- a) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Preisfunktion der Nachfrage p für Betonrohre des Modells A dargestellt.



- 1) Erstellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage p .
- 2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von p im gegebenen Sachzusammenhang.

Die Betonrohre des Modells A werden um € 32 pro Stück verkauft.

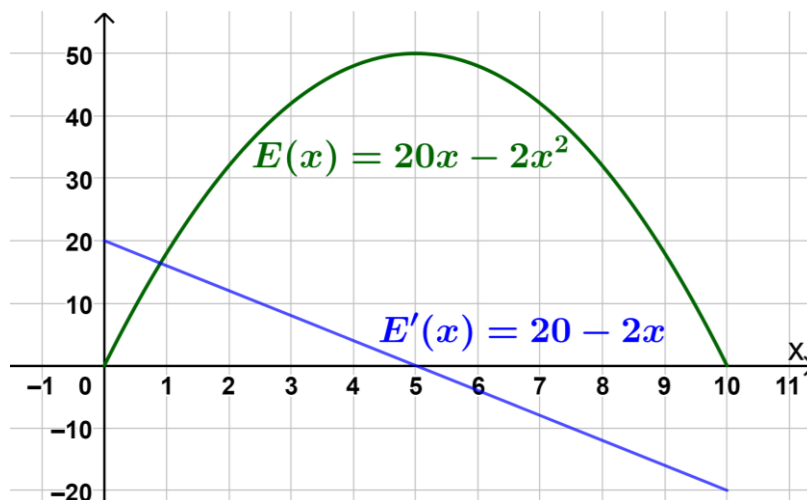
- 3) Berechnen Sie die zugehörige Anzahl der nachgefragten Betonrohre des Modells A.

2.3 Grenzerlösfunktion $E'(x)$:

$E'(x)$ gibt die ungefähre Erhöhung des Erlöses an, wenn bei x Stück eine weitere Mengeneinheit produziert wird!

○ $E'(2) = 12 \text{ GE/ME}$

Wird bei 2 Stück eine weitere Mengeneinheit verkauft, steigt der Gesamterlös um ca. 12 GE.



Bsp. 20) Gegeben ist die Erlösfunktion $E(x) = -0,5x^2 + 10x$, die den Erlös in GE bei x verkauften ME angibt.

- Bestimme den Erlös bei 10 verkauften ME.
- Bestimme den Grenzerlös für $x = 20$ ME. Interpretiere den Wert im gegebenen Kontext.
- Interpretiere folgenden Term im gegebenen Sachzusammenhang: $E'(7)$

Verkehrsbetriebe * (B_294)

Städtische Verkehrsbetriebe analysieren ihre Einnahmen.

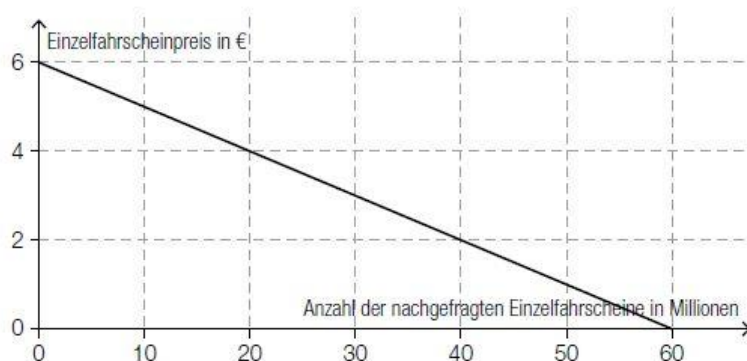
- a) In der Stadt A können die Einnahmen der Verkehrsbetriebe durch den Verkauf von Einzelfahrscheinen modellhaft durch die folgende Erlösfunktion E beschrieben werden:

$$E(x) = -0,1 \cdot x^2 + 6,6 \cdot x$$

x ... Anzahl der verkauften Einzelfahrscheine in Millionen

$E(x)$... Erlös beim Verkauf von x Einzelfahrscheinen in Millionen Euro

- 1) Berechnen Sie den maximal möglichen Erlös in Euro.
 - 2) Erstellen Sie eine Funktionsgleichung der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage.
 - 3) Ermitteln Sie den zum maximalen Erlös führenden Einzelfahrscheinpreis in Euro.
- b) In der Stadt B wird ein linearer Zusammenhang zwischen dem Einzelfahrscheinpreis in Euro und der Anzahl der nachgefragten Einzelfahrscheine in Millionen angenommen. Dieser Zusammenhang ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



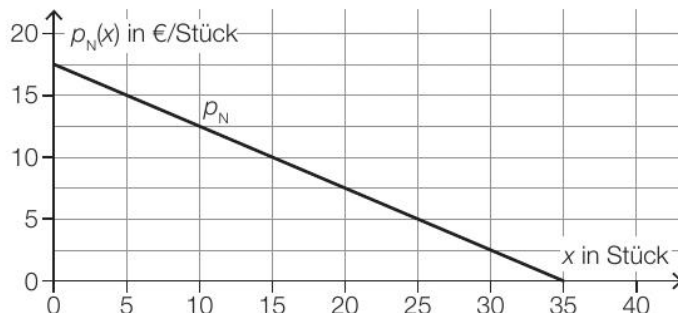
- 1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Höchstpreis ab.
- 2) Beschreiben Sie die Bedeutung der Sättigungsmenge im gegebenen Sachzusammenhang.

Waldführungen * (B_526)

Ein Naturschutzzentrum bietet verschiedene Waldführungen an.

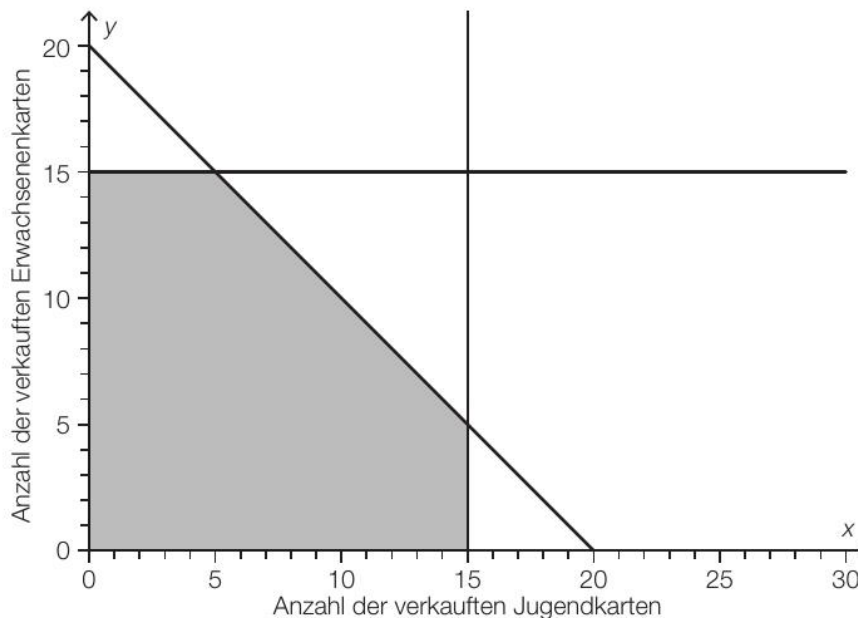
- c) In den Sommerferien werden Abenteuer Touren angeboten. Für diese Touren werden die möglichen Verkaufszahlen von Jugendkarten und Erwachsenenkarten untersucht.

Die tägliche Nachfrage nach Jugendkarten ist vom Preis der Karten abhängig. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage p_N für die Jugendkarten.



- 1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung diejenige Nachfrage nach Jugendkarten ab, bei der der Preis 12,50 €/Stück beträgt.

In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich für die Anzahl der verkauften Jugendkarten und Erwachsenenkarten bei Abenteuer Touren dargestellt.



- 2) Überprüfen Sie nachweislich, ob die oben ermittelte Nachfrage nach Jugendkarten an einem Tag erfüllt werden kann, an dem 13 Erwachsenenkarten verkauft werden.

Integral der Grenzerlösfunktion $E'(x)$:

i. Unbestimmtes Integral:

[Video 8/10](#)



Das unbestimmte Integral der Grenzerlösfunktion $E'(x)$ liefert die Erlösfunktion $E(x)$.

Beispiel: $E'(x) = 2x + 3$, Fixkosten = 10 GE

Gesucht: Erlösfunktion $E(x)$

$$E(x) = \int E'(x) dx = \int (2x + 3) dx = x^2 + 3x + c$$

Wichtig: Bei der **Erlösfunktion** spielen die **Fixkosten keine Rolle**, d.h. sie werden nicht berücksichtigt und die Integrationskonstante ist 0, da bei 0 Stück auch kein Erlös sein kann!

$$E(x) = x^2 + 3x$$

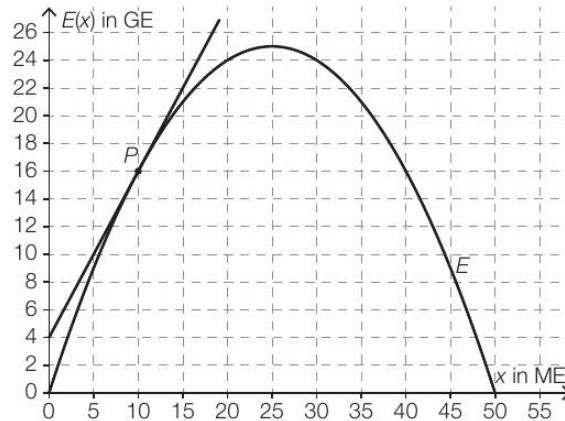
Bsp. 21) Gegeben sind jeweils eine Grenzerlösfunktion $E'(x)$ und die Fixkosten. Ermittle die Erlösfunktion $K(x)$.

- a. $E'(x) = -2x + 3$ Fixkosten: 20 GE
- b. $E'(x) = 7$ Fixkosten: 100 GE
- c. $E'(x) = -0,05x + 1,5$ Fixkosten: 800 GE

Produktion von CD-Rohlingen und DVD-Rohlingen * (B_490)

Unbeschriebene CDs und DVDs werden als *Rohlinge* bezeichnet.

- c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Erlösfunktion E für spezielle DVD-Rohlinge dargestellt. Zusätzlich ist die Tangente an den Graphen von E in einem Punkt P eingezeichnet.

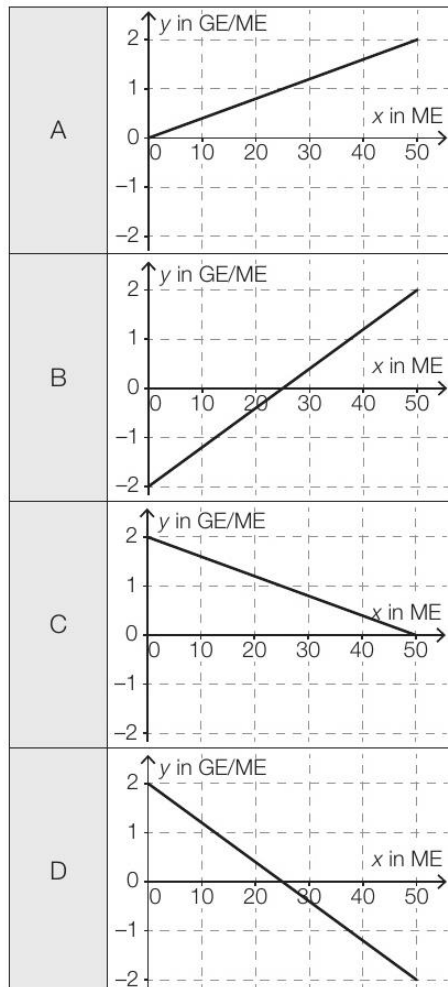


- 1) Bestimmen Sie mithilfe der obigen Abbildung die Steigung k der Tangente.

$k =$ _____ GE/ME

- 2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Tangente im gegebenen Sachzusammenhang.
 3) Ordnen Sie den beiden Funktionen jeweils den zugehörigen Graphen aus A bis D zu.
 [2 zu 4]

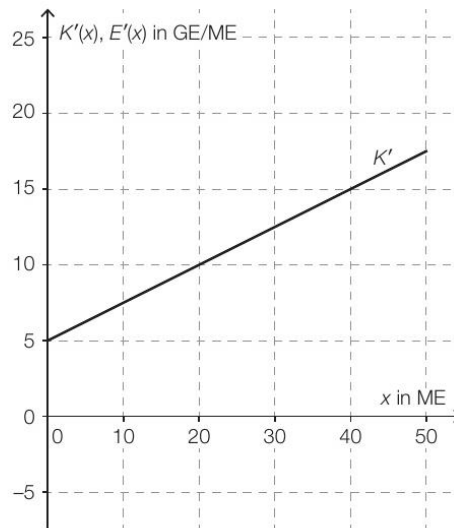
Grenzerlösfunktion E'	
Preisfunktion der Nachfrage p_N	



Scharniere * (B_503)

Ein Unternehmen stellt Scharniere her.

- a) In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph der linearen Grenzkostenfunktion K' für die Herstellung von *Clip*-Scharnieren dargestellt.



- 1) Erstellen Sie eine Gleichung der Grenzkostenfunktion K' .

Die Fixkosten für die Herstellung von *Clip*-Scharnieren betragen 50 GE.

- 2) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K .

Die Grenzerlösfunktion E' für *Clip*-Scharniere ist gegeben durch:

$$E'(x) = -0,5 \cdot x + 20$$

x ... Absatzmenge in ME

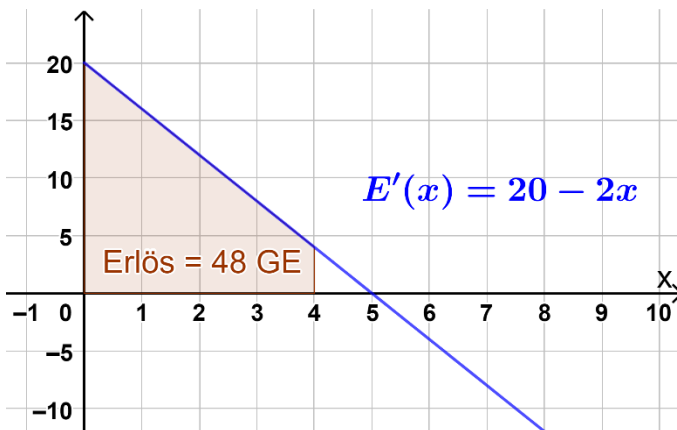
$E'(x)$... Grenzerlös bei der Absatzmenge x in GE/ME

- 3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Grenzerlösfunktion E' im Intervall $[0; 50]$ ein.
4) Interpretieren Sie die Nullstelle der Grenzerlösfunktion E' in Bezug auf den Erlös.

ii. Bestimmtes Integral:

Das bestimmte Integral (bzw. die Fläche unter der Grenzerlösfunktion) entspricht dem Erlös bei dieser Stückzahl! (Integral der Grenzerlösfunktion = Erlösfunktion)

Beispiel: Gegeben ist die Grenzerlösfunktion $E'(x) = 20 - 4x$. Berechne den Erlös, der bei 4 Stück anfällt.



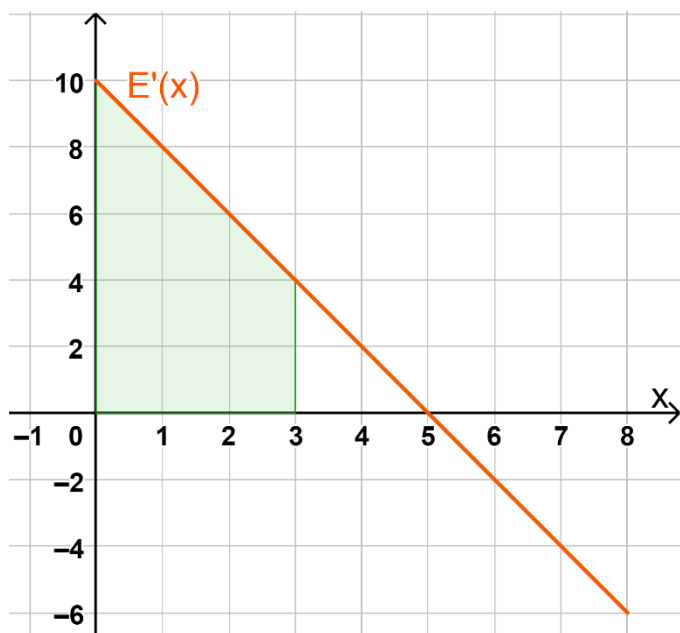
$$E'(x) = 20 - 4x$$

$$\int_0^4 E'(x) dx = \int_0^4 (20 - 4x) dx$$

$$\left[20x - 4 \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = [20x - 2x^2]_0^4$$

$$80 - 32 - (0 - 0) = 48 \text{ GE}$$

Bsp. 22) Gegeben ist eine Grenzerlösfunktion $E'(x)$. Die zugehörige Erlösfunktion $E(x)$ gibt den Erlös in GE bei x verkauften ME an.

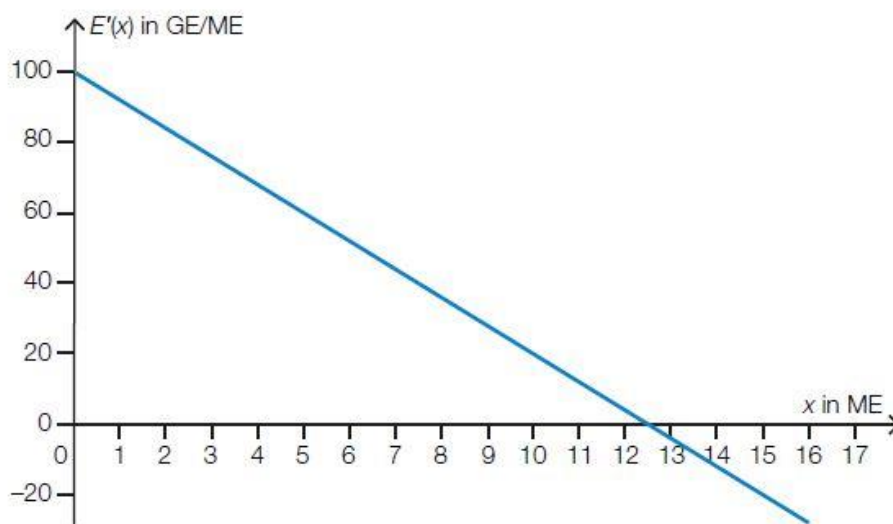


- Stelle eine Funktionsgleichung von $E'(x)$ auf. Bestimme die Funktionsgleichung der zugehörigen Erlösfunktion von $E(x)$.
- In der Graphik ist eine Fläche grün markiert. Gib das bestimmte Integral an, mit der du den Inhalt der Fläche berechnen kannst. Berechne.
- Gibt es noch eine weitere Möglichkeit, die grüne Fläche (ohne Integral) zu berechnen? Berechne den Flächeninhalt und interpretiere den Wert im gegebenen Sachzusammenhang.
- Interpretiere die Bedeutung der Nullstelle von E' in Bezug auf die zugehörige Erlösfunktion E im gegebenen Sachzusammenhang.

Handyverkauf (B_218)

Anlässlich der Herstellung eines neuen Handymodells untersucht ein Konzern die mit den bisherigen Handymodellen gemachten Erfahrungen am Markt. Geldbeträge werden dabei in Geldeinheiten (GE) und die Anzahl der Handys in Mengeneinheiten (ME) angegeben.

- c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Grenzerlösfunktion E' für den Verkauf eines anderen Handymodells dargestellt.



- Lesen Sie aus der Abbildung diejenige Verkaufsmenge ab, bei der der maximale Erlös erwirtschaftet wird.
- Erklären Sie, wie man ohne Integration mithilfe der Abbildung den maximalen Erlös berechnen kann.
- Berechnen Sie den maximalen Erlös.

3. Gewinnfunktion $G(x)$

Video 9/10



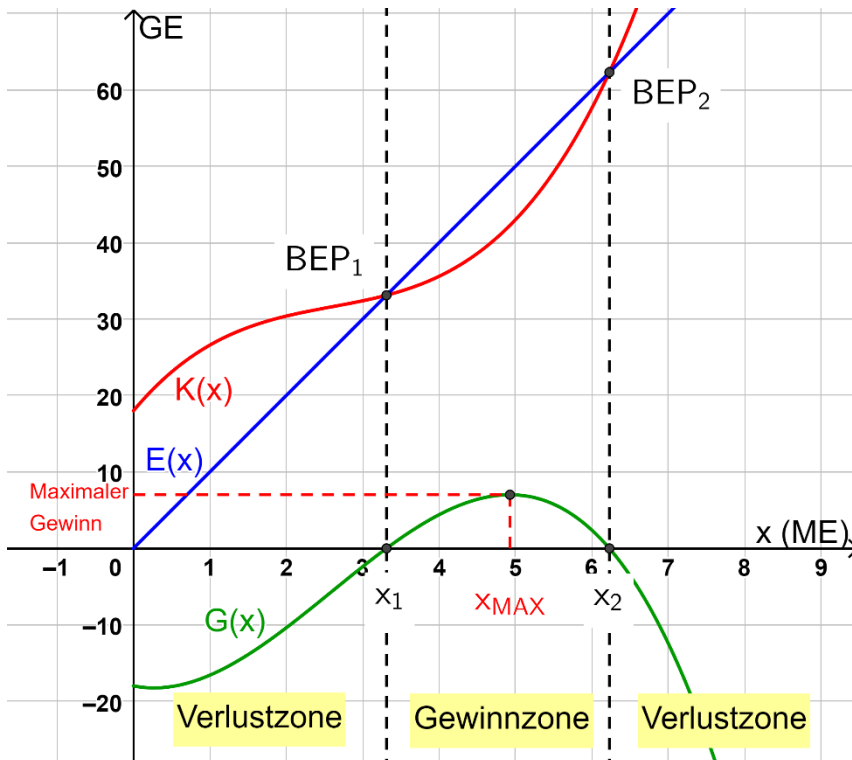
3.1 Die Gewinnfunktion $G(x)$

Die Gewinnfunktion $G(x)$ ergibt sich aus dem Erlös und den Kosten:

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

$G(x)$ gibt den **Gewinn** bzw. **Verlust** bei x produzierten & verkauften Stück an!

- $G(x) > 0 \rightarrow$ Gewinn (Erlös > Kosten)
- $G(x) = 0 \rightarrow$ weder Gewinn noch Verlust (Erlös = Kosten)
- $G(x) < 0 \rightarrow$ Verlust (Kosten > Erlös)



Begriffe:

- **Verlustzone:** Bereich/e, in denen Verlust erzielt wird: $G(x) < 0$
- **Gewinnzone:** jenes Intervall bzw. Bereich, in dem Gewinn erzielt wird: $G(x) > 0$
- Der **break-even-point 1** ist jener Punkt, bei dem der Gewinn das erste Mal nicht mehr negativ ist (=1. Nullstelle der Gewinnfunktion). Generell gilt bei einem break-even-point, dass weder Gewinn noch Verlust erwirtschaftet wird (Erlös = Kosten). Bei dieser Veranschaulichung gibt es zwei Punkte: BEP_1 und BEP_2 .

Berechnung der break-even-points:
 $G(x) = 0$ oder $E(x) = K(x)$

- Die Gewinn Grenzen x_1 und x_2 sind jene Stellen, an denen der Gewinn 0 ist (Stellen der break-even-points). x_1 nennt man die untere bzw. x_2 die obere Gewinn Grenze. Die beiden Gewinn Grenzen sind die Grenzen für die Gewinnzone. Es gilt für die Gewinnzone: $(x_1; x_2)$

Berechnung der Gewinn Grenzen: $G(x) = 0$

- Das **Gewinnmaximum G_{max}** wird mithilfe des Hochpunktes der Gewinnfunktion bestimmt.

Maximum = Extremum \rightarrow 1. Ableitung gleich 0

$G'(x) = 0 \rightarrow x_{MAX}$... Stückzahl in ME, bei der der maximale Gewinn auftritt.

Einsetzen in die Gewinnfunktion, um den maximalen Gewinn zu erhalten:

$$\text{Maximaler Gewinn} = G(x_{max})$$

Musterbeispiel: Gegeben sind folgende Funktionen:

$$K(x) = 0,5x^3 - 3,9x^2 + 12x + 18 \quad \text{und} \quad E(x) = 10x$$

Aufgabenstellung: Ermittle die Gewinnfunktion $G(x)$. Bestimme die Verlust- und Gewinnzonen, die Gewinngrenzen, die break-even-points sowie den maximalen Gewinn.

1) $G(x) = E(x) - K(x) = 10x - (0,5x^3 - 3,9x^2 + 12x + 18) = -0,5x^3 + 3,9x^2 - 2x - 18$

2) $G(x) = 0 \Leftrightarrow -0,5x^3 + 3,9x^2 - 2x - 18 = 0 \Leftrightarrow [x_1 = -1,74]; x_2 = 3,31; x_3 = 6,23$

→ Gewinngrenzen: $x_1 = 3,31$ & $x_2 = 6,23$

- **Verlustzonen:** $[0; 3,31)$ und $(6,23; +\infty)$
- **Gewinnzone:** $(3,31; 6,23)$

3) BEP1: $K(3,31) = E(3,31) = 33,13 \rightarrow BEP_1 = (3,31|33,13)$

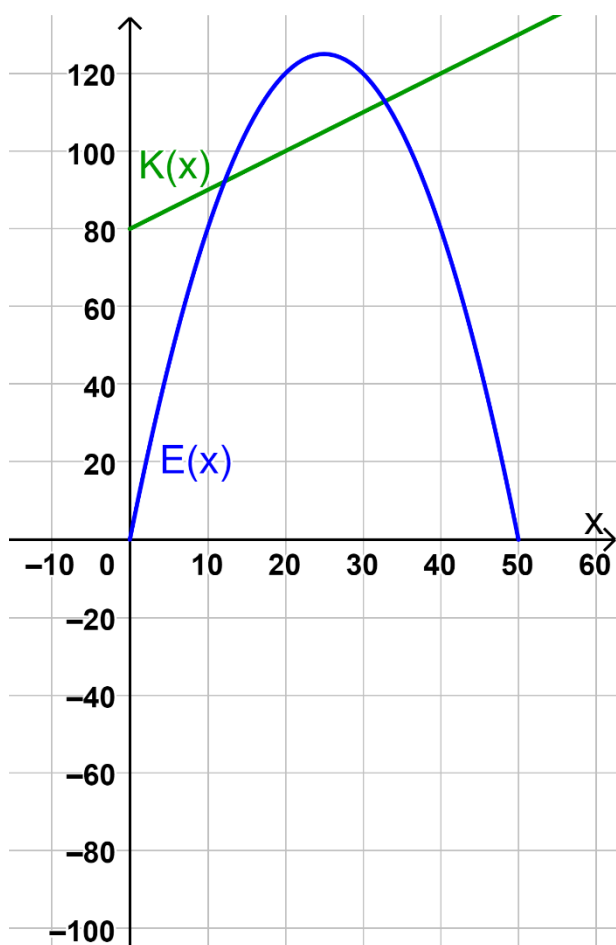
BEP2: $K(6,23) = E(6,23) = 62,31 \rightarrow BEP_2 = (6,23|62,31)$

4) Ermittlung des maximalen Gewinns:

$$G'(x) = -1,5x^2 + 7,8x - 2 \rightarrow G'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4,93$$

Kontrolle, ob es sich um ein Maximum handelt: $G''(4,93) = -6,99 < 0 \dots$ Maximum

Maximaler Gewinn: $G(4,93) = 7,02 \text{ GE}$



Bsp. 23) Die Abbildung zeigt die Darstellung einer linearen Kostenfunktion und einer quadratischen Erlösfunktion.

- a. Gib die Funktionsgleichung der Kostenfunktion K an.
- b. Begründe, warum die zugehörige Gewinnfunktion $G(x)$ eine quadratische Funktion sein muss.
- c. Zeichne den Graphen der Gewinnfunktion im Intervall $[0; 45]$ ein.
- d. Gib die break-even-points an. Erkläre die Bedeutung dieser speziellen Punkte.
- e. Wie ändern sich die Gewinngrenzen, wenn die Fixkosten verringert werden?
- f. Gib die beiden Gewinngrenzen an, wenn die Fixkosten auf 40 GE gesenkt werden. Ermittle graphisch!

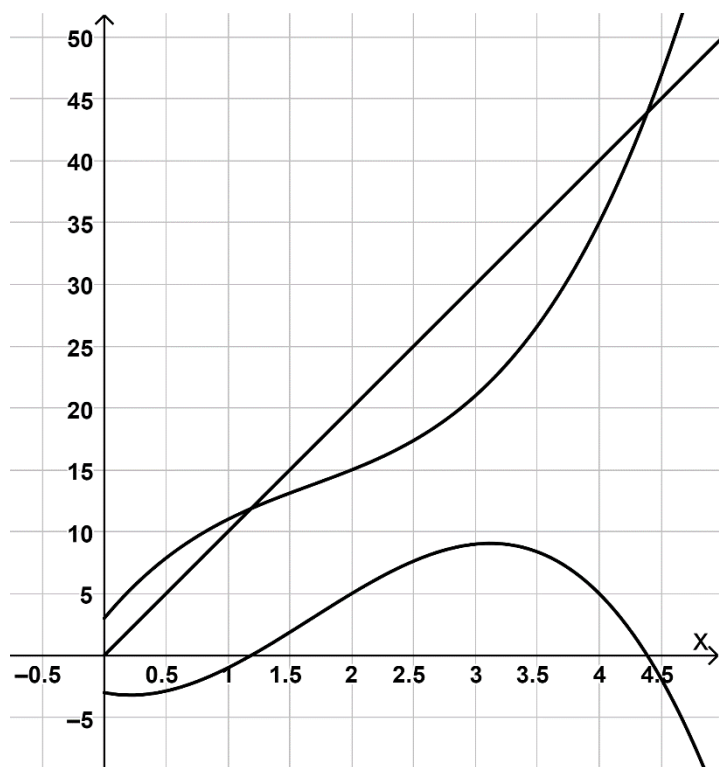
Bsp. 24) Bei einer Fortbildung fallen für den Veranstalter Kosten an, die näherungsweise mit Hilfe folgender Kostenfunktion bestimmt werden können:

$$K(x) = 0,02x^2 + 40x + 3800$$

- x ... Anzahl der teilnehmenden Personen
- $K(x)$... Gesamtkosten in €, die bei x Personen für den Veranstalter anfallen

Der Preis für die Fortbildung beträgt 130 € pro Person.

- a. Wie hoch sind die Fixkosten für den Veranstalter?
- b. Bestimme die Erlösfunktion $E(x)$.
- c. Stelle die Gewinnfunktion $G(x)$ auf.
- d. Berechne, bei welcher Teilnehmerzahl der break-even-point erreicht wird.

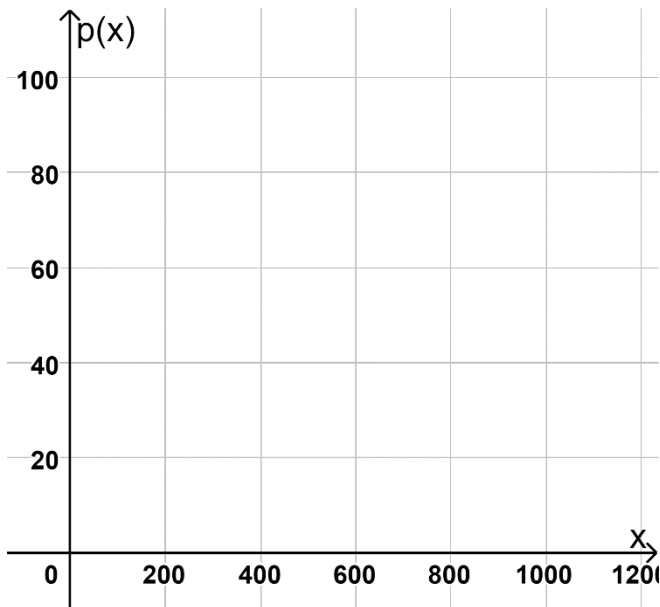


Bsp. 25) Die Graphen einer Kostenfunktion, Erlösfunktion und Gewinnfunktion sind im Koordinatensystem dargestellt.

- a. Beschrifte die drei Graphen.
- b. Bestimme die Gleichung der Erlösfunktion $E(x)$.
- c. Bestimme die Gewinn Grenzen und die Verlust- und Gewinnzonen.
- d. Bestimme die break-even-points.
- e. Bestimme graphisch den maximalen Gewinn.

Bsp. 26) Für eine quadratische Gewinnfunktion G gilt: $G(x) = ax^2 + bx + c$

- x ... Anzahl der verkauften Stück in ME
 - $G(x)$... Gewinn bei x verkauften Stück in GE
- a. Bestimme allgemein die Extremstelle der Gewinnfunktion.
 - b. Welche Bedingung muss für den Parameter a gelten, dass ein Maximum an der in Teil a) bestimmten Extremstelle vorliegt.



Bsp. 27) In einem Zoo möchten die Besitzer eine Jahreskarte anbieten. In einer Befragung haben die BesucherInnen angegeben, welchen Preis sie für die Jahreskarte bezahlen würden. Das Ergebnis der Umfrage liefert folgende Preisfunktion der Nachfrage $p(x)$:

$$p(x) = -0,1x + 100$$

- x ... Anzahl der Personen, die eine Jahreskarte kaufen
- $p(x)$... Preis für die Jahreskarte bei x Personen in € pro Person

a. Zeichne die Preisfunktion in das Koordinatensystem ein. Bestimme graphisch die Sättigungsmenge und den Höchstpreis. Gib die Werte an und markiere sie in deiner Graphik.

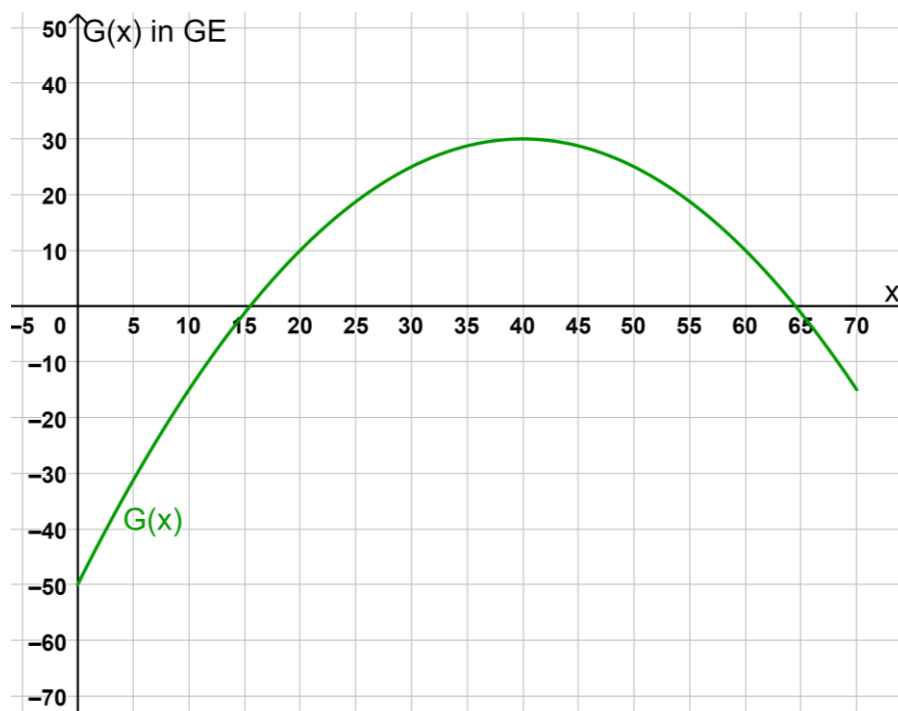
- b. Stelle die Gleichung der zugehörigen Erlösfunktion auf. Bestimme den Scheitelpunkt der Erlösfunktion. Interpretiere die beiden Koordinaten im gegebenen Kontext.
- c. Die täglichen Kosten, die für die Veranstalter anfallen, lassen sich durch folgende Funktion K beschreiben:

$$K(x) = 0,05x^2 + 13x + 5000$$

- Berechne die break-even-points und gib die Gewinn- bzw. Verlustzonen an.
- Berechne die Höhe des maximalen Gewinns.
- Begründe: Hängt die Stelle vom maximalen Gewinn von den Fixkosten ab?

Bsp. 28) Gegeben ist eine Gewinnfunktion $G(x)$ im Intervall $[0; 70]$. Die Fixkosten steigen um 20 GE an. Die variablen Kosten und der Erlös bleiben gleich. Die Funktion $G_2(x)$ soll die Gewinnfunktion unter diesen veränderten Bedingungen angeben (Fixkostenanstieg um 20 GE).

- a. Zeichne in die Abbildung der Graphen der neuen Gewinnfunktion $G_2(x)$ ein.
- b. Verändern sich die Gewinn- bzw. Verlustzonen? Gib deine Erkenntnisse an.



Bsp. 29) Eine Gewinnfunktion für ein Produkt ist gegeben durch:

$$G(x) = -0,027x^3 - 0,12x^2 + 11,8x - 130$$

- x ... Anzahl der verkauften ME
 - G(x) ... Gewinn in GE bei x verkauften ME
- a. Lies aus der Gleichung der Gewinnfunktion die Fixkosten für die Herstellung des Produktes ab.
 - b. Wie ändert sich der Graph der Gewinnfunktion, wenn sich die Fixkosten verringern.

Betonrohre* (B_452)

b) Für Betonrohre des Modells B geht man von einer kubischen Gewinnfunktion G aus.

x ... Absatzmenge in ME

G(x) ... Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils die zutreffende Gleichung aus A bis D zu.
[2 zu 4]

Der Break-even-Point liegt bei 200 ME.	
Das Gewinnmaximum liegt bei 200 ME.	

A	$G(0) = 200$
B	$G(200) = 0$
C	$G'(200) = 0$
D	$G''(200) = 0$

Käseproduktion * (B_468)

Der Produktionsleiter einer kleinen Käserei hat für eine bestimmte Käsesorte die täglichen Produktionskosten genauer untersucht.

c) Der Gewinn kann durch eine Polynomfunktion G beschrieben werden.

$$G(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

x ... Absatzmenge in kg

G(x) ... Gewinn bei der Absatzmenge x in €

Bei einer Absatzmenge von 5 kg werden € 35 Verlust erzielt.

Bei einer Absatzmenge von 25 kg beträgt der Gewinn € 200.

Der maximale Gewinn wird bei einer Absatzmenge von 30 kg erzielt und beträgt € 215.

- 1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Koeffizienten von G ermittelt werden können.
- 2) Berechnen Sie diese Koeffizienten.

USB-Sticks (B_191)

Ein Unternehmen bringt USB-Sticks auf den Markt.

- a) Für bestimmte USB-Sticks werden die in der nachstehenden Tabelle aufgelisteten Gewinne G in Abhängigkeit von der Absatzmenge x der Ware ermittelt:

x	0	10	20
$G(x)$	-1,4	6,4	1,4

x ... Absatzmenge in Mengeneinheiten (ME)

$G(x)$... Gewinn in Geldeinheiten (GE) bei einer Absatzmenge von x ME

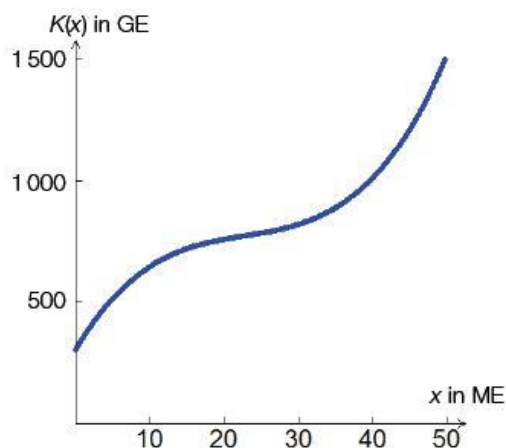
Die Gewinnfunktion G wird beschrieben mit:

$$G(x) = ax^2 + bx + c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

- Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a , b und c .
- Ermitteln Sie die Gleichung dieser Gewinnfunktion.
- Beschreiben Sie, was der Parameter c in Bezug auf die Kosten aussagt.
- Erklären Sie, wo sich der Break-even-Point auf dem Graphen der Gewinnfunktion befindet.

Spielzeugautos (1) (B_200)

In der nachstehenden Grafik ist eine Kostenfunktion für die Produktion eines Spielzeugautos dargestellt.



- c) Die Gleichung der Kostenfunktion K lautet $K(x) = 0,03x^3 - 2,05x^2 + 51,7x + 305$, wobei x in Mengeneinheiten (ME) und $K(x)$ in Geldeinheiten (GE) gegeben ist. Das Produkt kann zum Preis von 35,2 GE/ME verkauft werden.
- Berechnen Sie die Verkaufsmenge x , ab der das Unternehmen mit diesem Produkt einen Gewinn erzielen kann.

Scharniere * (B_503)

Ein Unternehmen stellt Scharniere her.

d) Der Gewinn für das Scharnier *Cardo* kann durch die Funktion G beschrieben werden:

$$G(x) = -0,01 \cdot x^3 + 0,28 \cdot x^2 + 1,75 \cdot x - 50$$

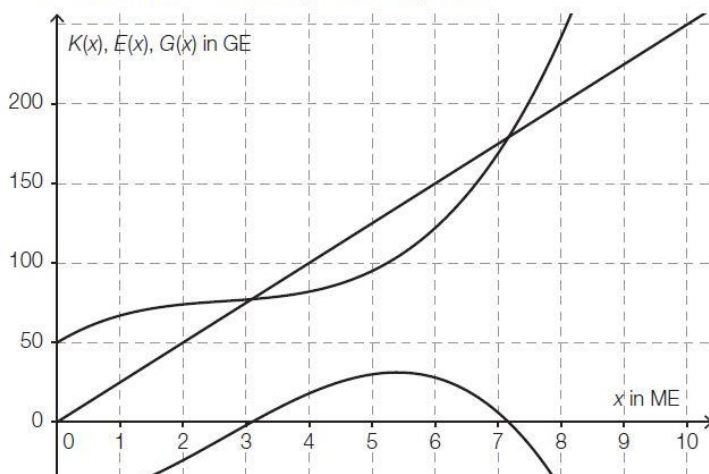
x ... Absatzmenge in ME

$G(x)$... Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

- 1) Ermitteln Sie die untere Gewinngrenze.
- 2) Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

Sportartikel * (B_348)

d) Die Graphen einer Kostenfunktion K , einer Erlösfunktion E und der zugehörigen Gewinnfunktion G sind im nachstehenden Diagramm dargestellt.



- Beschriften Sie im obigen Diagramm diese 3 dargestellten Graphen.
- Stellen Sie die Gleichung der Erlösfunktion E mithilfe des Diagramms auf.

Süßwarenproduktion * (B_545)

Ein Unternehmen produziert Süßwaren.

a) Eine bestimmte Sorte von Schokoriegeln wird im Werk A und im Werk B produziert. Aufgrund unterschiedlicher Produktionsbedingungen sind die Kostenfunktionen für die Produktion in den beiden Werken unterschiedlich.

x ... Produktionsmenge in ME

$K_A(x)$... Gesamtkosten im Werk A bei der Produktionsmenge x in GE

$K_B(x)$... Gesamtkosten im Werk B bei der Produktionsmenge x in GE

Bei der Produktionsmenge x_1 sind die jeweiligen Gesamtkosten in beiden Werken gleich hoch.

- 1) Argumentieren Sie, dass bei der Produktionsmenge x_1 auch die jeweiligen Durchschnittskosten in beiden Werken gleich hoch sind.

Für K_A gilt:

$$K_A(x) = 0,0001 \cdot x^2 + 0,17 \cdot x + 200$$

Für K_B gilt:

K_B ist eine lineare Funktion. Die Fixkosten betragen 260 GE, die variablen Stückkosten betragen 0,3 GE/ME.

- 2) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion K_B auf.
- 3) Berechnen Sie diejenige Produktionsmenge, bei der die jeweiligen Grenzkosten in beiden Werken gleich hoch sind.

- c) Für die Produktion von Schokolinsen sind die Kostenfunktion K und die Erlösfunktion E bekannt:

$$K(x) = 0,0003 \cdot x^3 - 0,017 \cdot x^2 + 0,4 \cdot x + 40$$

$$E(x) = 1,5 \cdot x$$

x ... produzierte bzw. abgesetzte Menge in ME

$K(x)$... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

$E(x)$... Erlös bei der Absatzmenge x in GE

- 1) Stellen Sie eine Gleichung der Gewinnfunktion G auf.
- 2) Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$$\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0,0003 \cdot x^2 - 0,017 \cdot x + 0,4 + \frac{40}{x}$$

$$0,0006 \cdot x - 0,017 - \frac{40}{x^2} = 0 \Rightarrow x \approx 52,5$$

- 3) Interpretieren Sie die Zahl 52,5 im gegebenen Sachzusammenhang.

3.2 Cournot'scher Punkt:

[Video 10/10](#)



Sei x_{max} jene Menge, bei der der Gewinn maximal ist und $p(x_{max})$ der Preis bei dieser Menge. Dann bezeichnet man x_{max} als **Cournot'sche Menge** und den **Punkt $(x_{max} | p(x_{max}))$** den **Cournot'schen Punkt**. Dieser liegt auf dem Graphen der Preisfunktion p .

Beispiel: Folgende Funktionen sind gegeben:

$$K(x) = 0,5x^2 + x + 100 \quad \text{und} \quad p(x) = -0,2x + 20$$

Aufgabenstellung: Bestimme die Erlös- und Gewinnfunktion, den maximalen Gewinn und den Cournot'schen Punkt.

$$1) E(x) = p(x) \cdot x = -0,2x^2 + 20x$$

$$2) G(x) = E(x) - K(x) = -0,2x^2 + 20x - (0,5x^2 + x + 100) = -0,7x^2 + 19x - 100$$

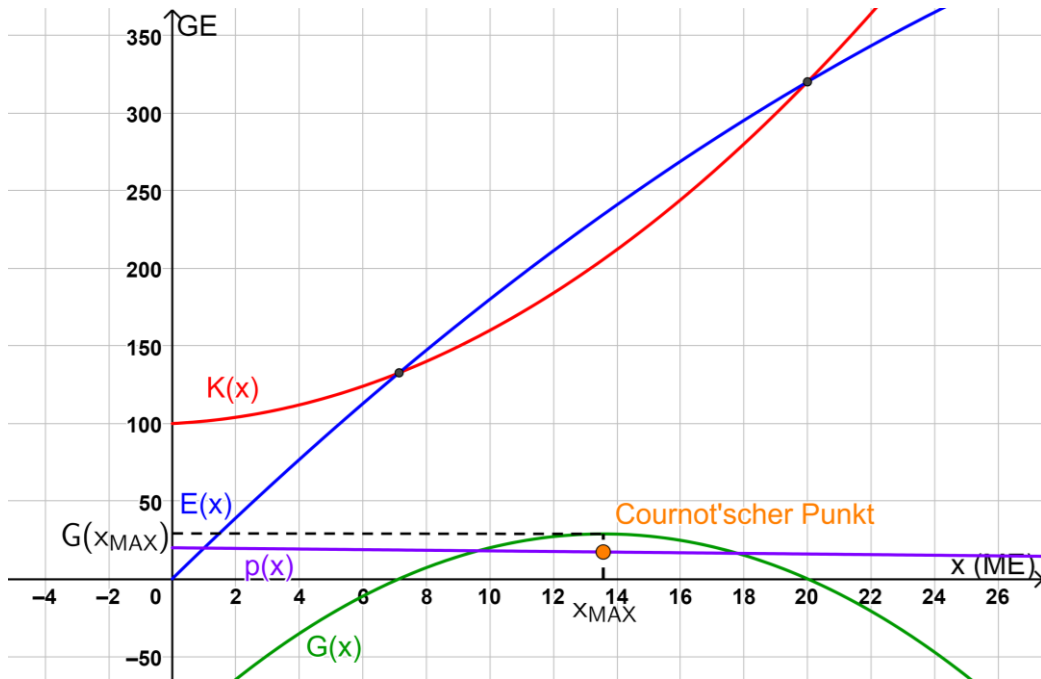
$$3) \text{Maximaler Gewinn: } G'(x) = -1,4x + 19 = 0 \Leftrightarrow x = 13,57$$

Kontrolle, ob es sich um ein Maximum handelt: $G''(x) = -1,4 < 0$... *Maximum*

$$\text{Maximaler Gewinn: } G(13,57) = 28,93 \text{ GE}$$

$$4) \text{Cournot'sche Menge } x_{MAX} = 13,57$$

$$\text{Cournot'scher Punkt } p(13,57) = 17,29 \frac{GE}{ME} \rightarrow P = (13,57 | 17,29)$$



Bsp. 30) Es sind jeweils eine Kostenfunktion und eine Preisfunktion gegeben. Bestimme die Erlös- und Gewinnfunktion, den maximalen Gewinn, die Cournot'sche Menge und den Cournot'schen Punkt.

$K(x) = 5x + 100$ $p(x) = -0,05x + 10$	$K(x) = 3x^2 + 0,5x + 100$ $p(x) = -0,1x + 50$
--	--

3.3 Grenzwinnfunktion $G'(x)$

$G'(x)$ gibt die ungefähre Erhöhung des Gewinns an, wenn bei x Stück eine weitere Mengeneinheit produziert wird!

- $G'(3) = 8 \frac{GE}{ME} \rightarrow$ Wird bei 3 Stück eine weitere Mengeneinheit produziert, steigt der Gesamtgewinn um ca. 8 GE.

Integral der Grenzwinnfunktion $G'(x)$:

- Unbestimmtes Integral:

Beispiel: $G'(x) = 3x^2 + 6x + 3$, Fixkosten = 20 GE

Gesucht: Gewinnfunktion $G(x)$

$$G(x) = \int G'(x) dx = \int (3x^2 + 6x + 3) dx = x^3 + 3x^2 + 3x - 20$$

Wichtig: Bei der Gewinnfunktion wirken sich anfallende Fixkosten negativ aus. Diese erhöhen nicht den Gewinn, sondern verringern ihn um diesen Betrag. D.h. die **Fixkosten** müssen **abgezogen** werden!!!

- Bestimmtes Integral:

Das bestimmte Integral (bzw. die Fläche unter der Grenzwinnfunktion) entspricht dem Gewinn/Verlust bei dieser Stückzahl! (Integral des Grenzertrags = Gewinnfunktion)

Bsp. 31) Gegeben sind jeweils eine Grenzfunktion $K'(x)$, $E'(x)$ oder $G'(x)$ und die zugehörigen Fixkosten.

Fragestellung 1: Bei welchem unbestimmten Integral spielen die Fixkosten eine Rolle? Was musst du mit den Fixkosten bei $K(x)$, $E(x)$ bzw. $G(x)$ machen?

Fragestellung 2: Ermittle die gesuchte Funktion.

- a. $E'(x) = -4x + 10$ Fixkosten: 20 GE - gesucht: $E(x)$
- b. $K'(x) = 7x$ Fixkosten: 1000 GE - gesucht: $K(x)$
- c. $G'(x) = -0,5x + 2$ Fixkosten: 200 GE - gesucht: $G(x)$
- d. $E'(x) = -0,001x + 30$ Fixkosten: 80 GE - gesucht: $E(x)$
- e. $K'(x) = 0,2x^2 - 0,1x + 2$ Fixkosten: 350 GE - gesucht: $K(x)$
- f. $G'(x) = -x^2 + x - 3$ Fixkosten: 1500 GE - gesucht: $G(x)$

Fruchtsaftproduktion * (B_483)

Ein Unternehmen produziert den Fruchtsaft *Mangomix*.

- a) Die Kosten bei der Produktion des Fruchtsafts *Mangomix* können durch eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K beschrieben werden:

$$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + 105 \cdot x + 1215$$

x ... Produktionsmenge in hl

$K(x)$... Kosten bei der Produktionsmenge x in €

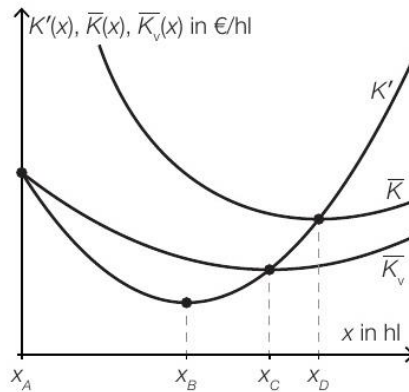
Von der Kostenfunktion ist bekannt:

I: Die Grenzkosten bei einer Produktionsmenge von 25 hl betragen 30 €/hl.

II: $K''(25) = 0$

- 1) Erstellen Sie eine Gleichung, die die Bedingung I beschreibt.
- 2) Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 25 in der Gleichung II im gegebenen Sachzusammenhang.
- 3) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b .

- b) In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Grenzkostenfunktion K' , der Durchschnittskostenfunktion \bar{K} und der variablen Durchschnittskostenfunktion \bar{K}_V für den Fruchtsaft *Mangomix* dargestellt. Vier Produktionsmengen, x_A bis x_D , sind auf der horizontalen Achse markiert.



- 1) Ordnen Sie den beiden Begriffen jeweils die zutreffende Produktionsmenge aus A bis D zu. [2 zu 4]

Kostenkehre	
Betriebsminimum	

A	Produktionsmenge x_A
B	Produktionsmenge x_B
C	Produktionsmenge x_C
D	Produktionsmenge x_D

- c) Der Erlös beim Verkauf des Fruchtsafts *Mangomix* kann durch eine quadratische Funktion E beschrieben werden:

$$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x \text{ mit } x \geq 0$$

x ... Absatzmenge in hl

$E(x)$... Erlös bei der Absatzmenge x in €

- 1) Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht. [Lückentext]

Der Koeffizient a muss ① sein, weil der Graph von E ② .

①	
positiv	<input type="checkbox"/>
negativ	<input type="checkbox"/>
gleich null	<input type="checkbox"/>

②	
durch den Ursprung geht	<input type="checkbox"/>
keinen Wendepunkt hat	<input type="checkbox"/>
nach unten geöffnet ist	<input type="checkbox"/>

- 2) Weisen Sie nach, dass der maximale Erlös bei der Absatzmenge $x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$ erzielt wird.

- d) Der Grenzgewinn für den Fruchtsaft *Mangomix* kann durch die Funktion G' beschrieben werden:

$$G'(x) = -0,12 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 220$$

x ... Absatzmenge in hl

$G'(x)$... Grenzgewinn bei der Absatzmenge x in €/hl

- 1) Ermitteln Sie diejenige Absatzmenge, bei der der maximale Gewinn erzielt wird.

Die Fixkosten betragen 1.215 €.

- 2) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Gewinnfunktion G unter Berücksichtigung der Fixkosten.

Es soll derjenige Bereich für die Absatzmenge ermittelt werden, in dem der Gewinn mindestens 1.000 € beträgt.

- 3) Ermitteln Sie diesen Bereich.

Mixer * (B_282)

Ein Unternehmen stellt unterschiedliche Typen von Mixern her.

- a) Bei einem Stückpreis von € 65 können 2000 Stabmixer pro Jahr verkauft werden.
Bei einem Verkauf von 2500 Stabmixern kann ein Erlös in Höhe von € 131.250 pro Jahr erzielt werden.

Der Erlös beim Verkauf der Stabmixer kann durch eine quadratische Funktion E beschrieben werden:

$$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

x ... Anzahl der verkauften Stabmixer

$E(x)$... Erlös bei x verkauften Stabmixern in €

- 1) Begründen Sie, warum in der Gleichung der Erlösfunktion der Parameter c gleich null sein muss.
- 2) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a und b der Erlösfunktion.
- 3) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b .
- 4) Berechnen Sie die Sättigungsmenge.

- b) Der Gewinn beim Verkauf der Handmixer kann durch die Funktion G beschrieben werden.

$$G(x) = -0,1 \cdot x^3 - 1,9 \cdot x^2 + 200 \cdot x - 940$$

x ... Absatzmenge in ME

$G(x)$... Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

- 1) Berechnen Sie die Gewinngrenzen.
- 2) Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

Durch Veränderungen im Unternehmen können die Fixkosten um 200 GE gesenkt werden.

- 3) Erstellen Sie eine Gleichung der neuen Gewinnfunktion G_1 .

- c) Die Kosten bei der Produktion von Standmixern können durch die Funktion K beschrieben werden.

$$K(x) = 0,04 \cdot x^3 - 2,4 \cdot x^2 + 63 \cdot x + 940$$

x ... Produktionsmenge in ME

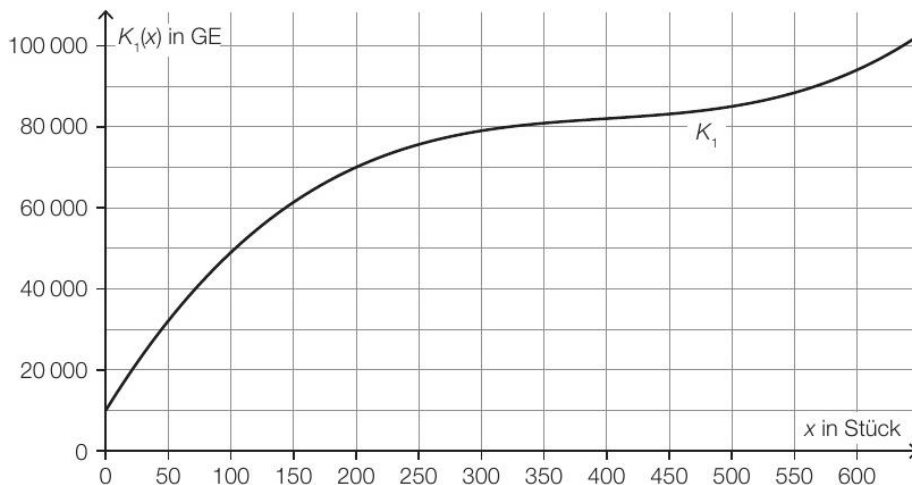
$K(x)$... Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

- 1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Kostenverlauf bei einer Produktion von 25 ME progressiv oder degressiv ist.
- 2) Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, deren Lösung das Betriebsoptimum ist. [1 aus 5]

$0 = 0,04 \cdot x^3 - 2,4 \cdot x^2 + 63 \cdot x + 940$	<input type="checkbox"/>
$0 = 0,12 \cdot x^2 - 4,8 \cdot x + 63$	<input type="checkbox"/>
$0 = 0,24 \cdot x - 4,8$	<input type="checkbox"/>
$0 = 0,04 \cdot x^2 - 2,4 \cdot x + 63 + \frac{940}{x}$	<input type="checkbox"/>
$0 = 0,08 \cdot x - 2,4 - \frac{940}{x^2}$	<input type="checkbox"/>

Möbel * (B_513)

- b) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Kostenfunktion K_1 eines Betriebs bei der Produktion von Kleiderschränken dargestellt.



x ... Produktionsmenge in Stück

$K_1(x)$... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

- 1) Lesen Sie das größtmögliche Produktionsintervall ab, in dem der Verlauf der Kostenfunktion K_1 degressiv ist.
- 2) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Stückkosten bei einer Produktion von 200 Stück.

Die Fixkosten können um 10 % reduziert werden.

- 3) Begründen Sie, warum sich die Grenzkostenfunktion dadurch nicht ändert.

- c) Die Kostenfunktion K_2 eines Betriebs bei der Produktion von Kommoden ist gegeben durch:

$$K_2(x) = 0,001 \cdot x^3 - 0,9 \cdot x^2 + a \cdot x + 3000$$

x ... Produktionsmenge in Stück

$K_2(x)$... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

Bei einer Produktion von 100 Kommoden hat der Betrieb Gesamtkosten von 35 000 GE.

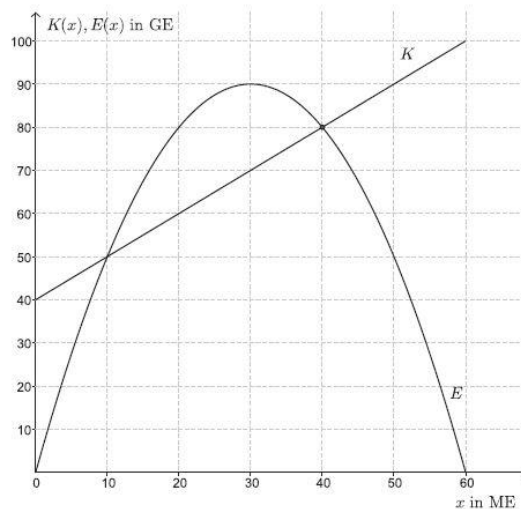
- 1) Berechnen Sie den Koeffizienten a der Kostenfunktion K_2 .
- 2) Berechnen Sie das Betriebsoptimum.

Der Break-even-Point wird bei einem Verkauf von 60 Kommoden erreicht.

- 3) Berechnen Sie den Preis pro Kommode bei dieser verkauften Menge.

Papierproduzent * (B_281)

Ein Papierproduzent stellt als Monopolist hochwertiges Urkundenpapier her. Die Kostenfunktion K für die Herstellung und die Erlösfunktion E für den Absatz dieses Produkts sind in der nachstehenden Grafik dargestellt.



- b) Das Verhalten der Erlösfunktion soll für die nachgefragte Menge 40 ME untersucht werden.
 - Zeichnen Sie in der obigen Grafik die Tangente an den Graphen der Erlösfunktion E an der Stelle $x = 40$ ein.
 - Lesen Sie die Steigung dieser Tangente ab.
 - Interpretieren Sie die Steigung dieser Tangente im Sachzusammenhang.
- c) Für die Stelle des Gewinnmaximums gilt, dass die Grenzkosten gleich dem Grenzerlös sind.
 - Begründen Sie diese Aussage.

Parfumherstellung * (B_556)

In einem Betrieb wird Parfum hergestellt.

- a) Die Gesamtkosten für die Produktion des Parfums *Desert* können durch die ertragsgesetzliche Kostenfunktion K beschrieben werden. Für die zugehörige Grenzkostenfunktion K' gilt:

$$K'(x) = 0,15 \cdot x^2 - 6 \cdot x + c \quad \text{mit } x \geq 0$$

x ... Produktionsmenge in ME

$K'(x)$... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in GE/ME

c ... Parameter

- 1) Ermitteln Sie, für welche Produktionsmengen ein progressiver Kostenverlauf vorliegt.

Bei ertragsgesetzlichen Kostenfunktionen gilt folgende Bedingung:

Die Grenzkostenfunktion muss im gesamten Definitionsbereich positiv sein.

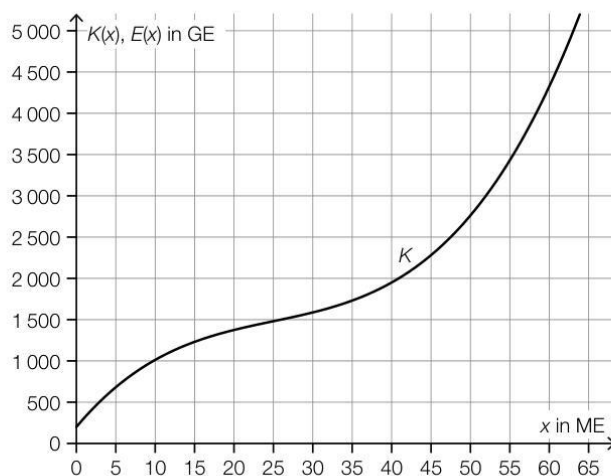
- 2) Weisen Sie nach, dass diese Bedingung nur für $c > 60$ erfüllt ist.

Die Fixkosten bei der Produktion dieses Parfums betragen 250 GE.

Es gilt: $c = 80$

- 3) Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K auf.

- b) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Gesamtkostenfunktion K für die Produktion des Parfums *Sunrise* dargestellt. Der Verkaufspreis dieses Parfums beträgt 75 GE/ME.



- 1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Erlösfunktion E ein.

- 2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Gewinnbereich ab.

[_____ ; _____] (in ME)

- c) Für die Gewinnfunktion G für die Produktion des Parfums *Moonlight* gilt:

$$G(x) = -0,05 \cdot x^3 + 2,4 \cdot x^2 - 9 \cdot x - 180$$

x ... Absatzmenge in ME

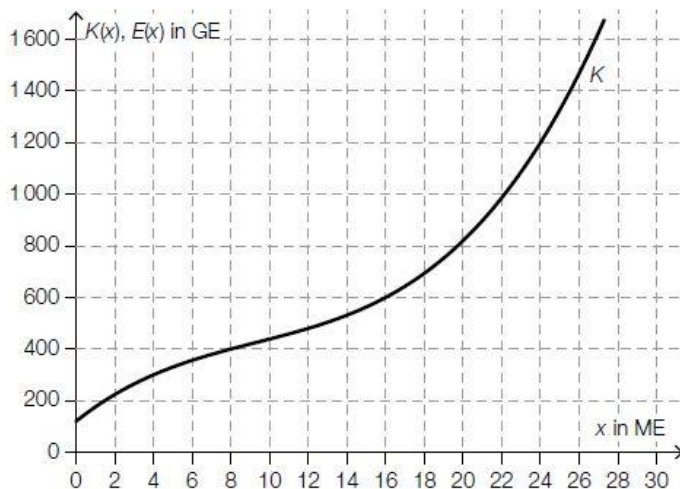
$G(x)$... Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

- 1) Berechnen Sie den durchschnittlichen Gewinn pro ME, der bei einem Absatz von 25 ME erzielt wird.
- 2) Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

Rohrproduktion * (B_089)

a) Ein Unternehmen stellt Kunststoffrohre her, die zu einem fixen Preis verkauft werden.

Im nachstehenden Diagramm ist der Graph der Kostenfunktion K für die Herstellung der Kunststoffrohre dargestellt.



Der Break-even-Point liegt bei einer Produktion von 8 ME. Die Kosten betragen dabei 400 GE.

- Zeichnen Sie den Graphen der Erlösfunktion E im obigen Diagramm ein.
- Ermitteln Sie den zugehörigen Marktpreis.
- Ergänzen Sie in der nachstehenden Wertetabelle die fehlenden Werte für die zugehörige Gewinnfunktion G .

x in ME	0	8	16
G(x) in GE		0	

c) Ein anderes Unternehmen stellt Keramikrohre her.

Von der quadratischen Erlösfunktion E ist für den Absatz von 10 ME bekannt:

$$E(10) = 15$$

$$E'(10) = -1,5$$

$$E''(10) = -0,6$$

- Kreuzen Sie die zutreffende Aussage über den Erlös bei einem Absatz von 11 ME an.
[1 aus 5]

$E(11) = 13,2$	<input type="checkbox"/>
$E(11) = 13,5$	<input type="checkbox"/>
$E(11) = 14,1$	<input type="checkbox"/>
$E(11) = 16,2$	<input type="checkbox"/>
$E(11) = 16,5$	<input type="checkbox"/>

Werkzeugproduktion * (B_569)

In einer Fabrik werden Werkzeuge hergestellt. Der Fabrik ist auch ein Shop für den Direktverkauf angeschlossen.

- a) Im Shop ist der Erlös aus dem Verkauf eines bestimmten Schraubenziehers, der zu einem fixen Preis verkauft wird, erfasst worden:

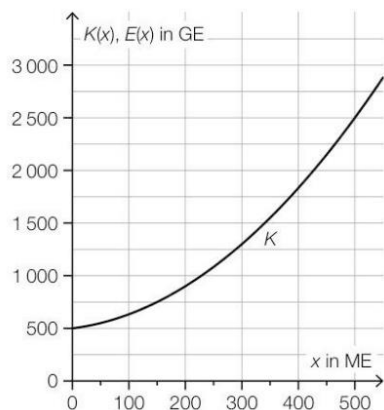
verkaufte Menge in ME	Erlös in GE
50	250
110	605

Die Daten in der obigen Wertetabelle sind allerdings fehlerhaft.

- 1) Weisen Sie nach, dass die obige Wertetabelle nicht zur Erlösfunktion des Schraubenziehers passen kann.

Es stellt sich heraus, dass nur der Erlös aus dem Verkauf von 50 ME korrekt erfasst wurde.

- 2) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Graphen der zugehörigen Erlösfunktion E ein.



x ... produzierte bzw. abgesetzte Menge in ME
 $K(x)$... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE
 $E(x)$... Erlös bei der Absatzmenge x in GE

- 3) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Gewinngrenzen ab.

untere Gewinngrenze: _____ ME

obere Gewinngrenze: _____ ME

- 4) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass für die Funktionen E und K eine richtige Aussage entsteht.

Wenn für eine Menge x_0 der Zusammenhang _____ ① _____ gilt, dann ist _____ ② _____.

①	
$E(x_0) = K(x_0)$	<input type="checkbox"/>
$E'(x_0) = K'(x_0)$	<input type="checkbox"/>
$E(x_0) > K(x_0)$	<input type="checkbox"/>

②	
x_0 kleiner als der Break-even-Point	<input type="checkbox"/>
$x_0 = 0$	<input type="checkbox"/>
x_0 diejenige Menge, bei der der Gewinn maximal ist	<input type="checkbox"/>