LÖSUNGEN

Kosten- und Preistheorie

Bei der Kosten- und Preistheorie gibt es drei grundlegende Basisfunktionen, die in diesem Skript Schritt für Schritt erarbeitet werden:

- **Kostenfunktion** $K(x)$ ... ordnet jeder Stückzahl die damit verbundenen Kosten zu!
- **Erlösfunktion** $E(x)$ ... ordnet jeder Stückzahl den damit verbundenen Erlös zu!
- **Gewinnfunktion** $G(x) = E(x) - K(x)$ ... ordnet jeder Stückzahl den damit verbundenen Gewinn zu!

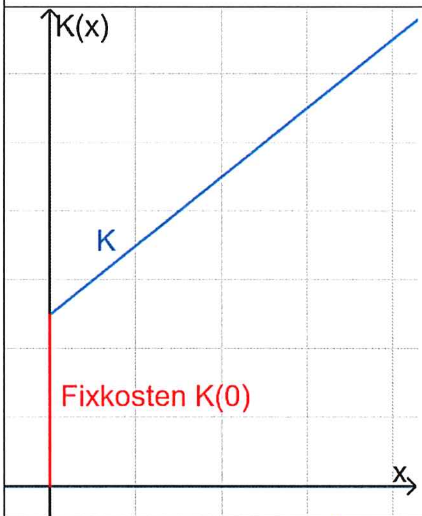
1. Kostenfunktion

1.1 Kostenfunktion $K(x)$

Kostenfunktion $K(x)$ ... ordnet jeder Stückzahl die damit verbundenen Kosten zu

Die **Kosten** werden in **GE** (=Geldeinheiten) und die **Stückzahlen** in **ME** (=Mengeneinheiten) angegeben.

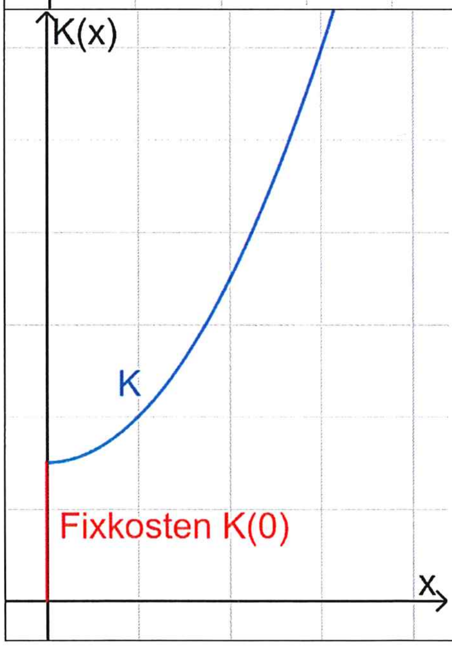
Bemerkung: Die Kostenfunktion ist in der Regel eine streng monoton steigende Funktion – Warum: Je mehr produziert wird, desto höher werden die Kosten.
In weiterer Folge zeige ich dir typische Verläufe einer Kostenfunktion:



Linearer Kostenverlauf

- Die Kostenfunktion K ist streng monoton steigend und linear.
- Lineare Funktion $K(x) = kx + d$ mit $k > 0$
- Es gilt: $K'(x) = k \ldots konstant$
- $K(0) = d = \text{Fixkosten}$

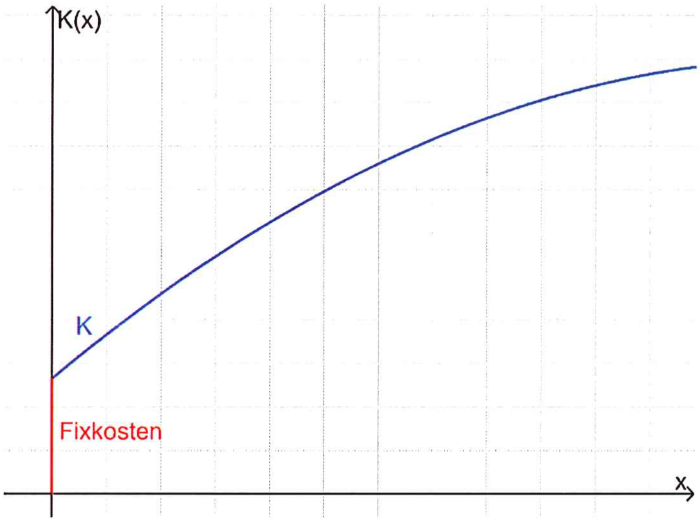
Erklärung: Mit jeder produzierten Stückzahl steigen die Kosten um den Wert k konstant an.



Progressiver Kostenverlauf

- Die Kostenfunktion K ist streng monoton steigend und linksgekrümmt.
- Es gilt: $K'(x) > 0 \ und \ K''(x) > 0$
- $K(0) = \text{Fixkosten}$

Erklärung: Mit jeder produzierten Stückzahl steigen die Kosten stärker an. Jede zusätzlich produzierte Mengeneinheit verursacht einen höheren Kostenzuwachs als die vorherige.

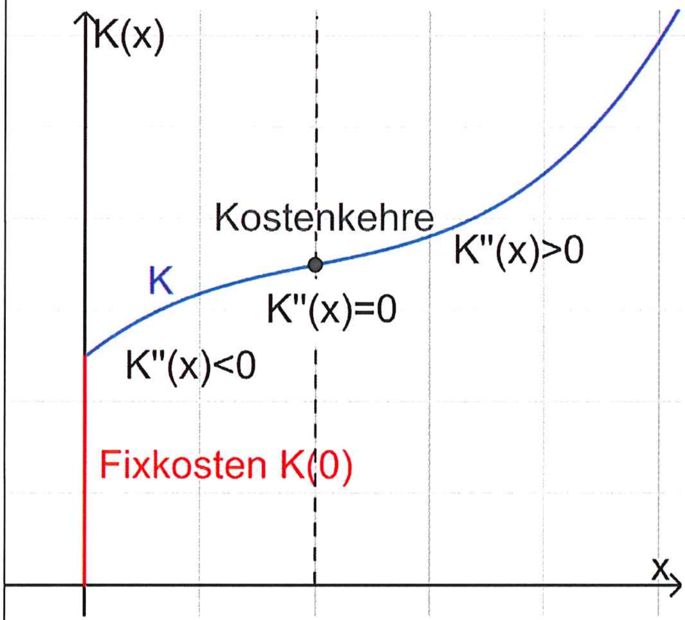


Degressiver Kostenverlauf

- Die Kostenfunktion K ist streng monoton steigend und rechtsgekrümmt.
- Es gilt: $K'(x) > 0 \ und \ K''(x) < 0$
- $K(0) = \text{Fixkosten}$

Erklärung: Mit jeder produzierten Stückzahl werden die zusätzlich anfallenden Kosten geringer. Jede zusätzlich produzierte Mengeneinheit verursacht einen geringeren Kostenzuwachs als die vorherige.

In den meisten Fällen (vor allem im **Alltag**) ist die Kostenfunktion eine Polynomfunktion dritten Grades. Wenn folgende Eigenschaften gelten, spricht man von einer **ertragsgesetzlichen Kostenfunktion**:



Typischer Verlauf einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion

- „S-förmig"
- Streng monoton steigend

Erklärung: Bei einer Produktion von 0 Stück fallen Fixkosten an (Kosten für Maschinen, Geräte, Arbeiter, etc.).

Werden Stücke produziert, so steigen die Kosten an. Zu Beginn gibt es einen bestimmten Anstieg, dann sinken die Kosten, da es zu Vorteilen aufgrund der Massen-/Mengenproduktion kommt (bis zur Kostenkehre). Ab der Kostenkehre kommt es zu einer Überlastung (z.B. Firma, hohe Überstunden, zusätzliche Geräte, ...). Die Gesamtkosten steigen stark an.

Beispiel einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion (Polynomfunktion 3. Grades):

$$\boldsymbol{K(x)} = x^3 - 3x^2 + 4x + \mathbf{5}$$

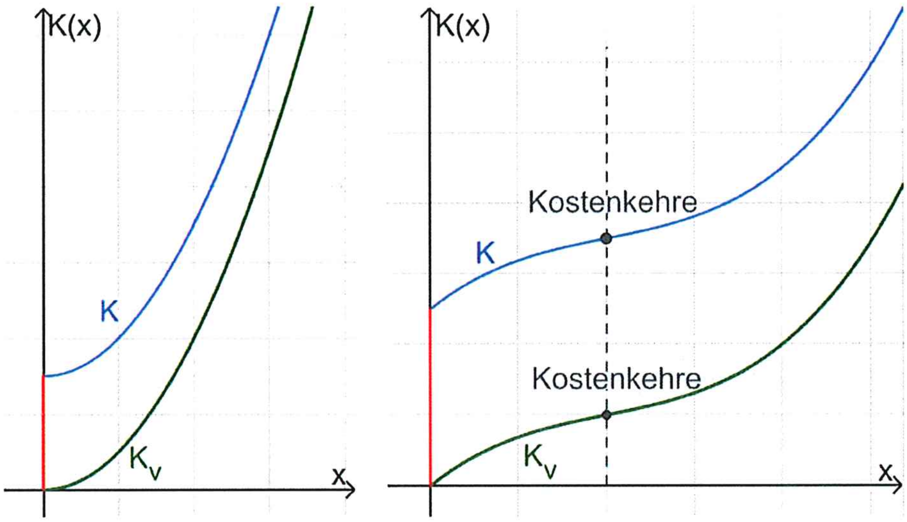
Aus dieser Gleichung können die **Fixkosten** $\boldsymbol{K(0)}$ abgelesen werden. Diese betragen $K(0) = 5\ GE$.

1.2 Variable Kostenfunktion $K_v(x)$

Die **variable Kostenfunktion** entspricht der **Kostenfunktion ohne Fixkosten**

$$K(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 5 \rightarrow K_v(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$$

Identer Verlauf zu $K(x)$, jedoch beginnt der Graph im Ursprung!



Bsp. 1) Gegeben ist eine Kostenfunktion. Bestimme (i) die Fixkosten, (ii) die variable Kostenfunktion, (iii) die Kosten bei 5 bzw. 20 produzierten Mengen und (iv) die variablen Kosten bei 10 bzw. 40 produzierten Stücken.

a. $K(x) = 2x + 10$

b. $K(x) = 3x^2 + 100$

c. $K(x) = 0{,}5x^3 - 3{,}9x^2 + 12x + 18$

d. $K(x) = 1{,}2x^3 - 3{,}3x^2 + 79x + 800$

Bsp. 2) Ein Firma kann am Tag maximal 100 Geräte produzieren. Die täglichen Fixkosten belaufen sich auf 330 GE. Pro erzeugtes Gerät kommen weitere 20 GE Produktionskosten hinzu.

Stelle die Kostenfunktion K auf und gib einen passenden Definitionsbereich an.

1.3 Stückkostenfunktion $\overline{K}(x)$

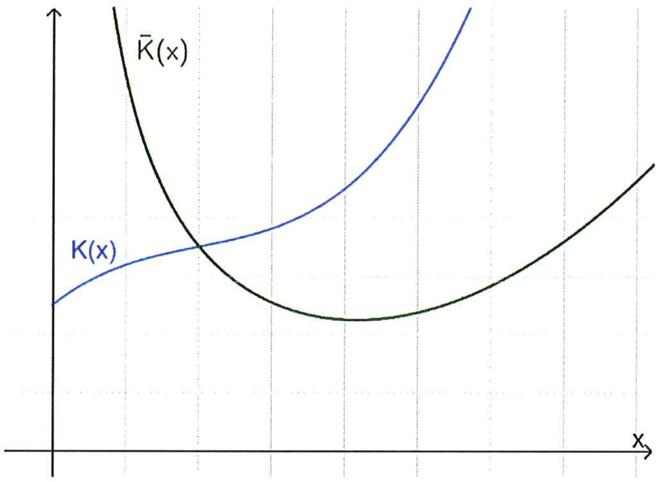
Die Stückkostenfunktion $\overline{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{x})$ gibt die <u>durchschnittlichen Kosten</u> bei x Stück an, die pro Stück anfallen!

<u>Beispiel</u>: Bei 10 produzierten Stücken fallen Kosten von 60 GE an -> somit wären die durchschnittlichen Kosten pro Stück 6 GE/ME, d.h. $\overline{K}(10) = 6\ GE/ME$

<u>Formel (mit Beispiel):</u>

$$\overline{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}} \rightarrow \overline{K}(10) = \frac{K(10)}{10} = \frac{60}{10} = 6\ GE/ME$$

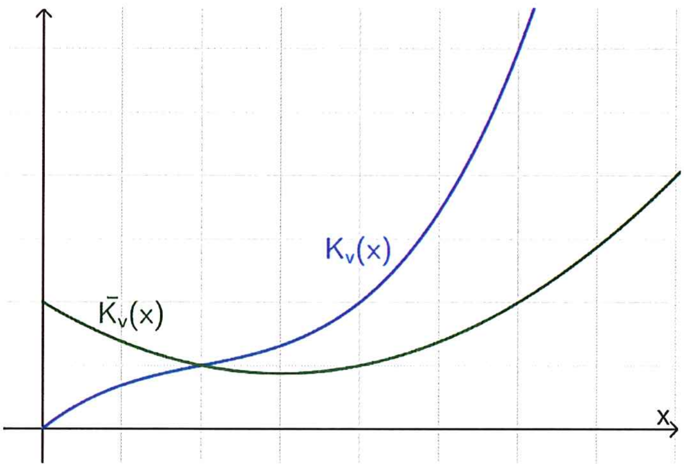
Typischer Verlauf (Ertragsgesetzliche Kostenfunktion):



$$\boldsymbol{K(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 5}$$

$$\boldsymbol{\overline{K}(x)} = \frac{K(x)}{x} = x^2 - 3x + 4 + \boldsymbol{\frac{5}{x}}$$

1.4 Variable Stückkostenfunktion $\overline{K_v}(x)$



Analog zur Stückkostenfunktion, nur ohne Berücksichtigung der Fixkosten wird die variable Stückkostenfunktion berechnet:

$$\boldsymbol{\overline{K_v}(x) = \frac{K_v(x)}{x}}$$

$$K_v(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$$

$$\overline{K_v}(x) = \frac{K_v(x)}{x} = x^2 - 3x + 4$$

Bsp. 3) Gegeben ist eine Kostenfunktion. Bestimme (i) die Stückkostenfunktion, (ii) die variable Stückkostenfunktion, (iii) die Stückkosten bei 4 bzw. 22 produzierten Stück und (iv) die variablen Stückkosten bei 10 bzw. 30 produzierten Stücken.

a. $K(x) = 4x + 25$

b. $K(x) = 4x^2 + 200$

c. $K(x) = 0{,}5x^3 - 3{,}8x^2 + 13x + 50$

d. $K(x) = 1{,}3x^3 - 3{,}2x^2 + 79x + 1320$

1.5 Grenzkostenfunktion $K'(x)$

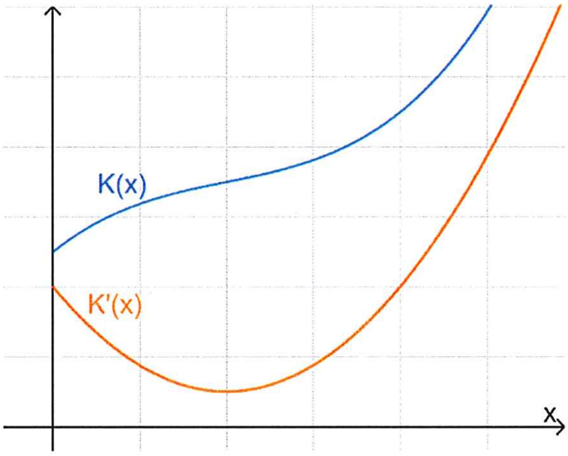
K'(x) gibt die ungefähre Erhöhung der Kosten an, wenn bei x Stück eine weitere Mengeneinheit produziert wird!

Beispiel:

$$K'(5) = 10\ GE/ME$$

*Wird bei 5 Stück eine weitere Mengeneinheit produziert, steigen die Gesamtkosten um **ca.** 10 GE (da es um die Kosten geht -> Einheit: **GE**).*

Typischer Verlauf – Ermittlung über die Kostenfunktion:



$$K(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 5$$

$$K'(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

Bsp. 4) Gegeben ist eine Kostenfunktion K mit $K(x) = 0{,}003x^3 - 0{,}118x^2 + 5{,}4x + 100$

- x ... Anzahl der produzierten Stück in ME
- $K(x)$ ... Kosten bei x produzierten Stück in GE

a. Stelle die variable Kostenfunktion auf.

b. Berechne, wie viele (i) Gesamtkosten bzw. (ii) variable Kosten bei einer Produktion von 20 ME anfallen.

c. Berechne die mittlere Änderungsrate von K, wenn die Produktion von 20 ME auf 25 ME erhöht wird.

d. Berechne die Grenzkosten bei 30 ME. Interpretiere diesen Wert im gegebenen Kontext.

Integral der Grenzkostenfunktion K'(x):

i. Unbestimmtes Integral:

Das unbestimmte Integral der Grenzkostenfunktion $K'(x)$ liefert die Kostenfunktion $K(x)$.

Beispiel: $K'(x) = 3x^2 + 3x + 2\ , Fixkosten = 10\ GE$

Gesucht: *Kostenfunktion* $K(x)$

$$K(x) = \int K'(x)\,dx = \int (3x^2 + 3x + 2)\,dx = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 10$$

Wichtig: Die Fixkosten kommen als Integrationskonstante hinzu, da sie die Kosten erhöhen!

(+ Fixkosten)

Bsp. 5) Gegeben sind jeweils eine Grenzkostenfunktion $K'(x)$ und die zugehörigen Fixkosten. Ermittle die Kostenfunktion $K(x)$.

a. $K'(x) = 0{,}3x^2 - 0{,}5x + 6$ Fixkosten: 20 GE

b. $K'(x) = 4x$ Fixkosten: 100 GE

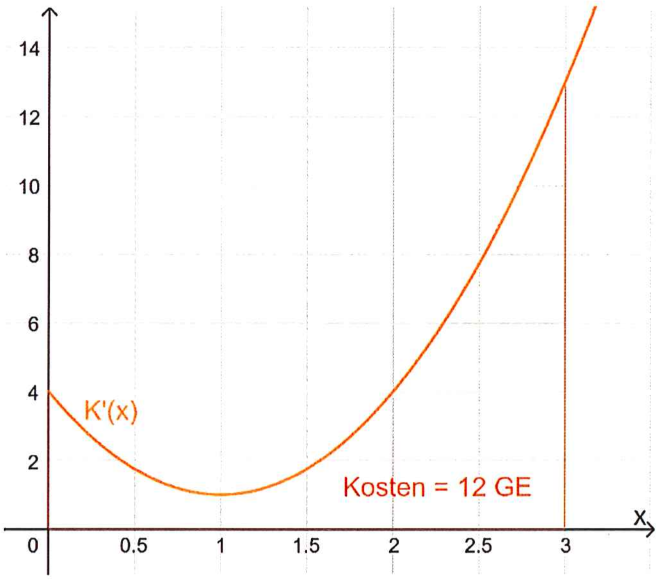
c. $K'(x) = 2x^2 - 4x + 15$ Fixkosten: 800 GE

d. $K'(x) = 5$ Fixkosten: 10 GE

ii. Bestimmtes Integral:

Das bestimmte Integral (bzw. die Fläche unter der Grenzkostenfunktion) entspricht den anfallenden Kosten bei dieser Stückzahl (Integral der Grenzkosten = Kostenfunktion)

Achtung: Gegebenfalls müssen Fixkosten dazu-addiert werden (bzw. nicht berücksichtigt werden)



Beispiel:

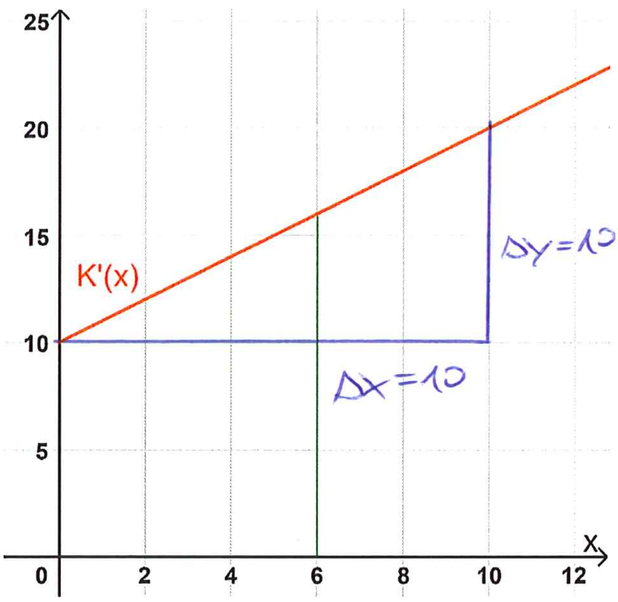
$$\boldsymbol{K'(x)} = 3x^2 - 6x + 4$$

Berechne die Kosten, die bei 3 produzierten ME anfallen.

$$\int_0^3 K'(x)\,dx = \int_0^3 3x^2 - 6x + 4\,dx$$

$$\left[3 \cdot \frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + 4x\right]_0^3 = [x^3 - 3x^2 + 4x]_0^3$$

$$3^3 - 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - (0^3 - 3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0) = \boldsymbol{12\ GE}$$



Bsp. 6) Gegeben ist eine Grenzkostenfunktion K'(x). Die zugehörige Kostenfunktion K(x) gibt die Produktionskosten in GE an, die bei x produzierten ME anfallen. Die Fixkosten betragen 100 GE.

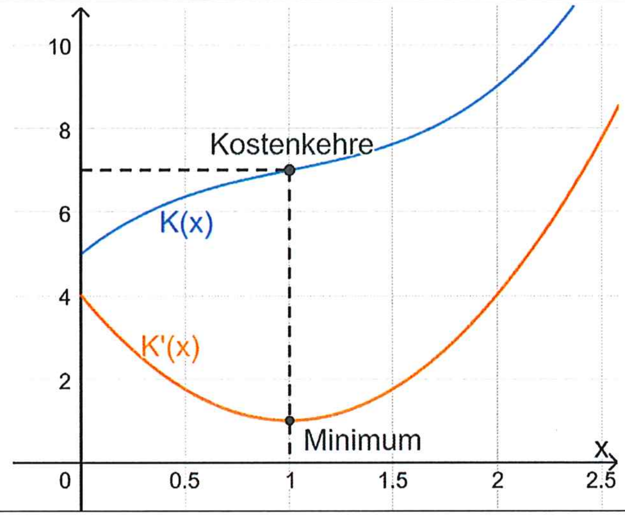
a. Ermittle die Funktionsgleichungen von K'(x) und K(x).

b. Berechne den grün markierten Flächeninhalt auf zwei verschiedene Möglichkeiten (Bestimmtes Integral & Flächeninhalt des Vierecks).

c. Interpretiere den Wert des Flächeninhalts im gegebenen Sachzusammenhang.

1.6 Anwendungen der Kostenfunktion

1. Bestimmung der Kostenkehre über die Kostenfunktion bzw. Grenzkostenfunktion:

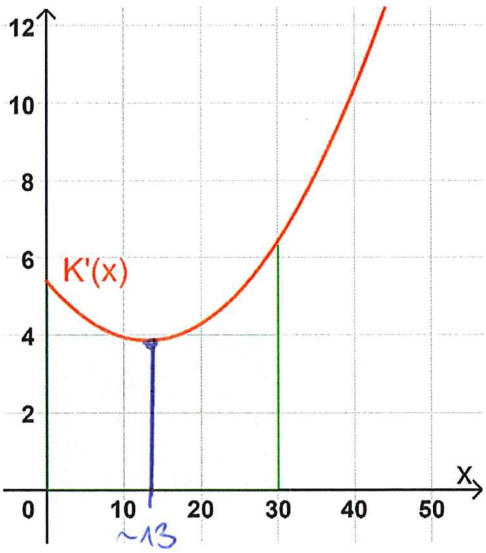


Die **Kostenkehre** ist der **Wendepunkt** der **Kostenfunktion** $K(x)$. Dabei geht die degressive Kostenfunktion in eine progressive Kostenfunktion über.

$$K''(x) = 0$$

Die Kostenkehre entspricht auch dem **Minimum** der **Grenzkostenfunktion** $K'(x)$ – denke an die NEW-Regel: Eine Wendestelle wird in der ersten Ableitung zu einer Extremstelle.

Bestimmung des Minimums: $K''(x) = 0$ & $K'''(x) > 0$



Bsp. 7) Gegeben ist eine Grenzkostenfunktion K'(x). Die zugehörige Kostenfunktion K(x) gibt die Produktionskosten an, die bei x produzierten ME anfallen.

a. Ermittle graphisch die Stelle der Kostenkehre.

b. In der Graphik ist eine Fläche grün markiert. Gib eine mathematische Formel an, mit der du den Inhalt der Fläche berechnen kannst.

c. Interpretiere den Wert des Flächeninhalts im gegebenen Sachzusammenhang.

Bsp. 8) Die Fixkosten zur Produktion eines bestimmten Artikels betragen 2800 GE. Die Kostenkehre liegt bei 6 ME. Die Gesamtkosten bei einer Produktionsmenge von 6 ME betragen 3050 GE. Bei einer Produktionsmenge von 10 ME betragen die Gesamtkosten 3200 GE.

Der Kostenverlauf soll mit Hilfe einer Kostenfunktion K mit $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ beschrieben werden.

a. Erstelle ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter der Kostenfunktionen.
b. Berechne die Parameter und stelle die Kostenfunktion K auf.

Bsp. 9) Ein Unternehmen produziert ein bestimmtes Produkt. Die Kosten bei einer Produktionsmenge von 10 ME betragen 154 GE. Die Kostenkehre liegt bei einer Produktionsmenge von 1,5 ME. Bei der Kostenkehre betragen die anfallenden Kosten 13,75 GE. Bei einer Produktionsmenge von 20 ME betragen die Grenzkosten 207,4 GE/ME.

Der Kostenverlauf soll mit Hilfe einer Kostenfunktion K mit $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ beschrieben werden.

a. Erstelle ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter der Kostenfunktionen.
b. Berechne die Parameter und stelle die Kostenfunktion K auf.

2. Bestimmung des Betriebsoptimums und –minimums, bzw. der Preisuntergrenzen

- Betriebsoptimum: Das Betriebsoptimum ist jene Stückzahl x_{OPT}, bei der die Stückkosten minimal sind (Einheit: in **ME**)

- Langfristige Preisuntergrenze: Stückkosten beim Betriebsoptimum - $\overline{K}(x_{OPT})$ (Einheit: in **GE/ME**)

Interpretation:

- Im Betriebsoptimum erreicht das Verhältnis zwischen Gesamtkosten und Produktionsmenge das günstigste Verhältnis. Die Kosten pro erzeugter ME sind hier am geringsten.

- Verkauft man eine Stückzahl zum Preis der langfristigen Preisuntergrenze, so werden die Fixkosten und variablen Kosten gedeckt. Dabei wird noch kein Gewinn erzielt. Wird ein höherer Preis erwirtschaftet, so macht die Firma bzw. das Unternehmen Gewinn.

Warum könnte es Sinn machen, ein Produkt zum Preis der langfristigen Preisuntergrenze zu etablieren?

- Man möchte mit einem Produkt einen Wettbewerber unter Druck setzen, die mit diesem niedrigen Preis nicht mithalten wollen/können. Dabei nimmt man bewusst in Kauf, dass kein Gewinn erwirtschaftet wird.

Dieser Betrag soll nicht unterschritten, da ansonsten Verluste entstehen.

- Betriebsminimum: Das Betriebsminimum ist jene Stückzahl x_{MIN}, bei der die variablen Stückkosten minimal sind (Einheit: in **ME**)

- Kurzfristige Preisuntergrenze: Variable Stückkosten beim Betriebsminimum - $\overline{K_v}(x_{MIN})$ (Einheit: in **GE/ME**)

Interpretation:

- Im Betriebsminimum erreicht das Verhältnis zwischen variablen Kosten und Produktionsmenge das günstigste Verhältnis. Die variablen Kosten pro erzeugter ME sind hier am geringsten.

- Verkauft man eine Stückzahl zum Preis der kurzfristigen Preisuntergrenze, so werden nur die variablen Kosten gedeckt. Die Fixkosten werden nicht gedeckt & in Summe macht das Unternehmen Verlust.

Warum könnte es Sinn machen, ein Produkt zum Preis der kurzfristigen Preisuntergrenze zu etablieren?

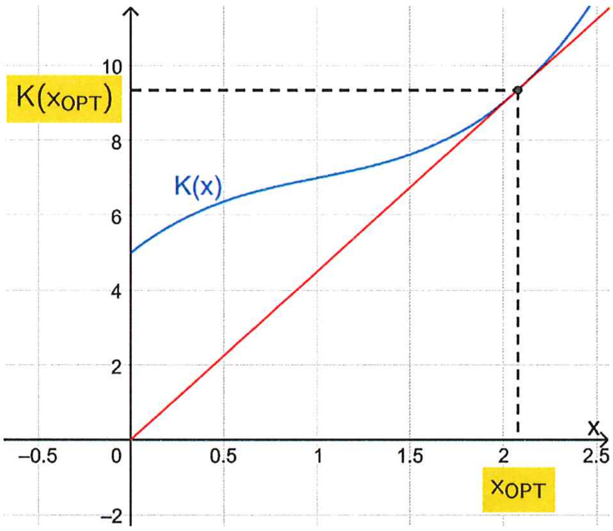
- Man möchte ein neues Produkt im Markt etablieren (z.B. Sonderangebot – weckt die Aufmerksamkeit)
- Man möchte Wettbewerber verdrängen, die mit einem solch niedrigen Preis nicht mithalten können (bedenke: es entsteht stets der Verlust der Fixkosten).

2.1 Bestimmung Betriebsoptimum und langfristige Preisuntergrenze:

i. <u>Graphische Bestimmung über den Funktionsgraph der Kostenfunktion $K(x)$:</u>

Lege eine Gerade ausgehend vom Ursprung so an den Graphen der Kostenfunktion, dass die Gerade den Graphen in genau einem Punkt berührt:

- Die Stelle des Berührungspunktes ist das Betriebsoptimum x_{OPT}.
- Mit Hilfe des Funktionswertes $K(x_{opt})$ kann die langfristige Preisuntergrenze berechnet werden. Der Funktionswert wird an der y-Achse abgelesen.



Langfristige Preisuntergrenze = $\boldsymbol{\frac{K(x_{opt})}{x_{opt}} = \overline{K}(x_{opt})}$

Aus dem Graphen kann man ablesen, dass das Betriebsoptimum bei ca. 2,1 produzierten ME liegt.

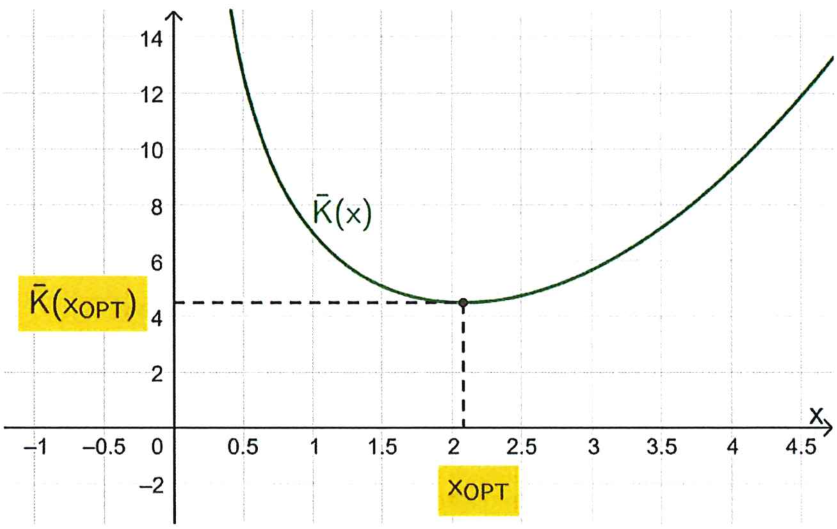
$$x_{OPT} \approx 2{,}1\ ME$$

Der Funktionswert $K(x_{OPT})$ ist ca. 9,3. Mit diesen Werten kann die langfristige Preisuntergrenze näherungsweise ermittelt werden:

$$\frac{K(x_{OPT})}{x_{OPT}} \approx \frac{9{,}3}{2{,}1} \approx 4{,}4\ GE/ME$$

ii. <u>Bestimmung über die Stückkostenfunktion $\overline{K}(x)$ – graphisch & rechnerisch:</u>

Wiederholung Definition Betriebsoptimum: <u>Stückzahl</u> x_{OPT}, bei der die Stückkosten **minimal** sind -> d.h. **MINIMUM** (=**Extremum**)

<table>
<tr><th>Graphische Ermittlung</th><th>Rechnerische Ermittlung</th></tr>
<tr><td>
Ermittlung des Tiefpunktes
▪ x-Koordinate = Betriebsoptimum x_{OPT}
▪ y-Koordinate $\overline{K}(x_{opt})$ = Langfriste Preisuntergrenze


Betriebsoptimum: $x_{OPT} \approx 2{,}1\ ME$
Langfristige Preisuntergrenze: $\overline{K}(x_{OPT}) \approx 4{,}3\ GE/ME$
</td><td>
▪ $\overline{K}(x)\ ableiten \rightarrow \overline{K}'(x) = 0$
$\rightarrow Betriebsoptimum = x_{OPT}$

▪ Kontrolle, ob es sich um ein Minimum handelt: $\overline{K}''(x_{OPT}) > 0$

Da $\overline{K}'(x)$ linear ist, gibt es nur eine Lösung. Diese ist immer ein Minimum.

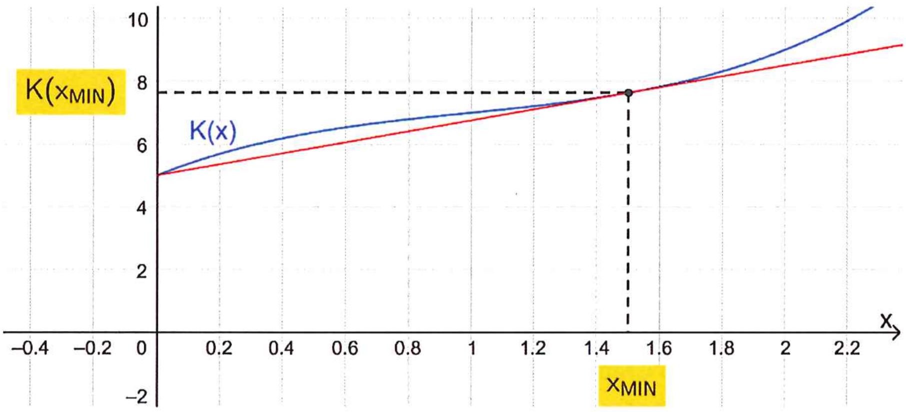
▪ Ermittlung der langfristigen Preisuntergrenze

Das Betriebsoptimum x_{opt} muss man in die Stückkostenfunktion $\overline{K}(x_{opt})$ einsetzen:

Langfristige Preisuntergrenze =
$\boldsymbol{\overline{K}(x_{opt})}$
</td></tr>
</table>

2.2 Bestimmung Betriebsminimum und kurzfristige Preisuntergrenze:

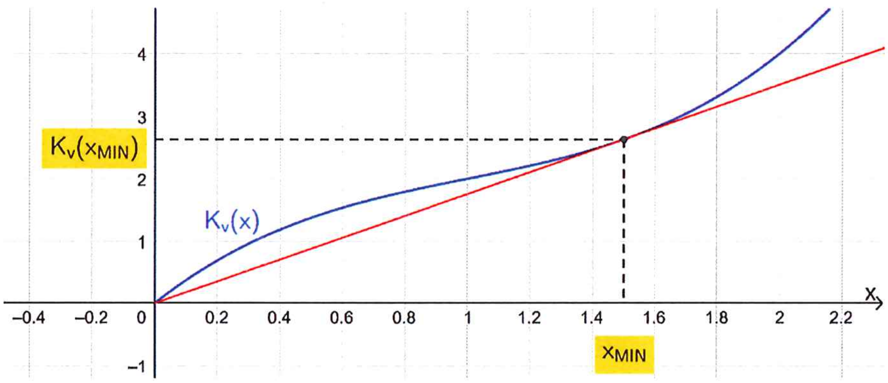
i. Bestimmung über den Funktionsgraph der Kostenfunktion $K(x)$:



Lege eine Gerade ausgehend von den **Fixkosten** = Punkt $\left(0, K(0)\right)$ so an den Graphen der Kostenfunktion, dass die Gerade den Graphen in genau einem Punkt berührt:

Die **Stelle des Berührungspunktes** ist das **Betriebsminimum** x_{MIN}.

ii. Bestimmung über den Funktionsgraph der variablen Kostenfunktion $K_v(x)$:



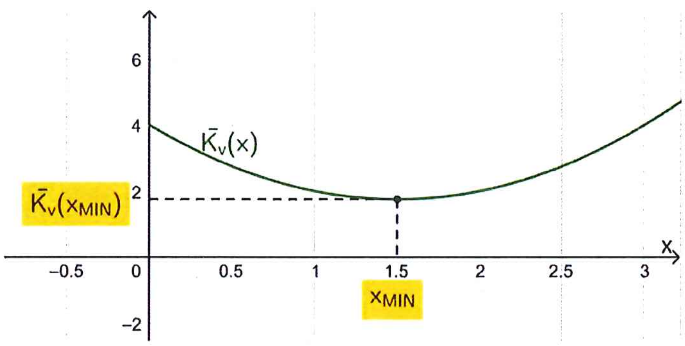
Lege eine Gerade ausgehend vom Ursprung so an den Graphen der variablen Kostenfunktion, dass die Gerade den Graphen in genau einem Punkt berührt. Die Stelle des Berührungspunktes ist das Betriebsminimum x_{MIN}.

Mit Hilfe des Funktionswertes $K_v(x_{MIN})$ kann die kurzfristige Preisuntergrenze berechnet werden. Der Funktionswert wird an der y-Achse abgelesen.

$$\textbf{Kurzfristige Preisuntergrenze} = \frac{K_v(x_{min})}{x_{min}} = \overline{K_v}(x_{min})$$

iii. Bestimmung über die variable Stückkostenfunktion $\overline{K_v}(x)$ – graphisch & rechnerisch:

Wiederholung Definition Betriebsminimum: Stückzahl x_{min}, bei der die variablen Stückkosten **minimal** sind -> d.h. MINIMUM (=Extremum).

Graphische Ermittlung	Rechnerische Ermittlung
Ermittlung des Tiefpunktes ▪ x-Koordinate = Betriebsminimum x_{MIN} ▪ y-Koordinate $\overline{K}(x_{MIN})$ = Kurzfristige Preisuntergrenze  Betriebsminimum: $x_{MIN} = 1{,}5\ ME$ Langfristige Preisuntergrenze: $\overline{K_v}(x_{MIN}) \approx 1{,}8\ GE/ME$	▪ $\overline{K_v}(x)\ ableiten \rightarrow \overline{K_v}'(x) = 0$ $\rightarrow Betriebsminimum = x_{MIN}$ ▪ Kontrolle, ob es sich um ein Minimum handelt: $\overline{K}''(x_{MIN}) > 0$ Da $\overline{K}'(x)$ linear ist, gibt es nur eine Lösung. Diese ist immer ein Minimum. ▪ Ermittlung der kurzfristigen Preisuntergrenze Das Betriebsminimum x_{MIN} muss man in die variable Stückkostenfunktion $\overline{K_v}(x_{MIN})$ einsetzen: **Kurzfristige Preisuntergrenze** = $\overline{K}(x_{MIN})$

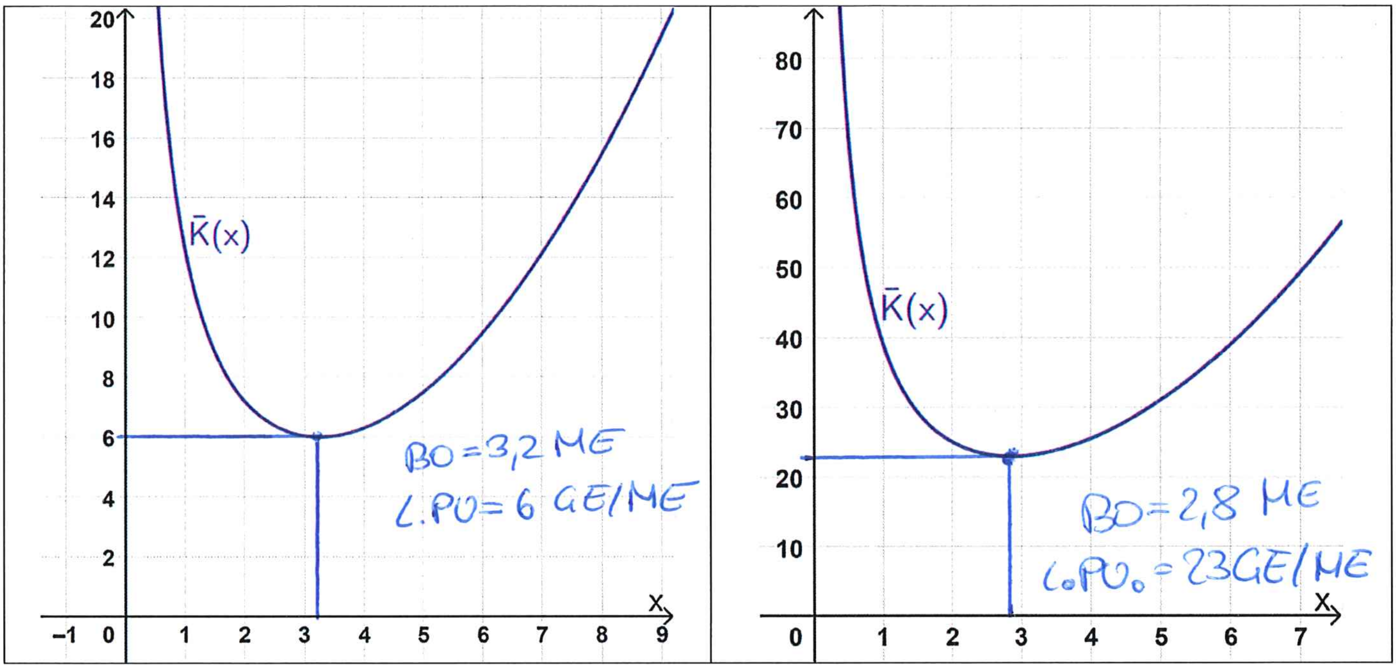
Bsp. 10) Bestimme rechnerisch die Kostenkehre, das Betriebsoptimum, das Betriebsminimum, sowie die langfristige und kurzfristige Preisuntergrenze zur zugehörigen Kostenfunktion $K(x)$.

a. $K(x) = 0{,}02x^3 - 3{,}1x^2 + 170x + 700$

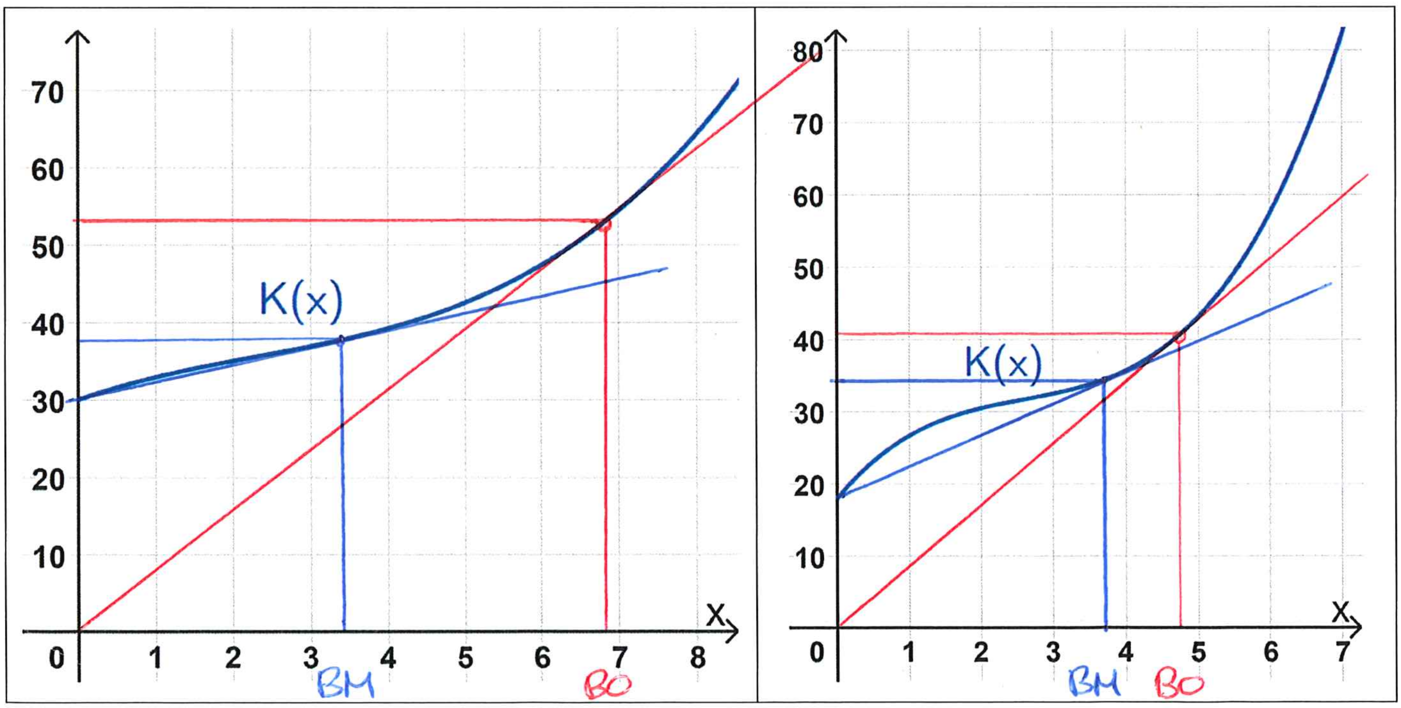
b. $K(x) = 0{,}3x^3 - 1{,}2x^2 + 20x + 120$

c. $K(x) = 0{,}0004x^3 - 0{,}027x^2 + 98x + 47\,000$

Bsp. 11) Gegeben ist der Graph einer Stückkostenfunktion $\overline{K}(x)$. Bestimme graphisch das Betriebsoptimum und die langfristige Preisuntergrenze. Interpretiere die Werte im Kontext.



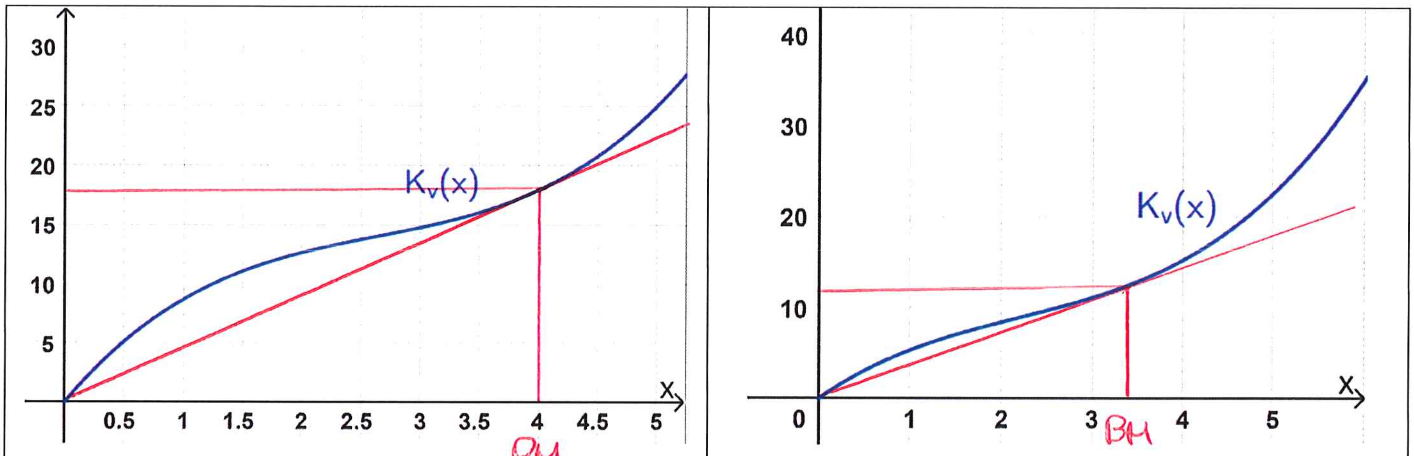
Bsp. 12) Gegeben ist der Graph einer Kostenfunktion K(x). Bestimme graphisch das Betriebsoptimum, das Betriebsminimum, die langfristige und kurzfristige Preisuntergrenze. ~~Interpretiere die Werte im gegebenen Kontext.~~



→ ZETTEL!

* Verkauft man zum Preis der K.PU von 4,5GE pro Stück, werden nur die variablen Kosten gedeckt. (Insgesamt: Verlust wg. Fixkosten)

Bsp. 13) Gegeben ist der Graph einer variablen Kostenfunktion $K_v(x)$. Bestimme graphisch das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze. Interpretiere die Werte im gegebenen Kontext.



$x_{MIN} = 4\,ME$

$K.PU \approx \frac{18}{4} \approx 4{,}5\,GE/ME$

→ Das Betriebsminimum mit 4ME stellt das optimale Verhältnis zw. Stückzahl & variablen Kosten dar. Die variablen Stückkosten sind bei 4ME am geringsten.

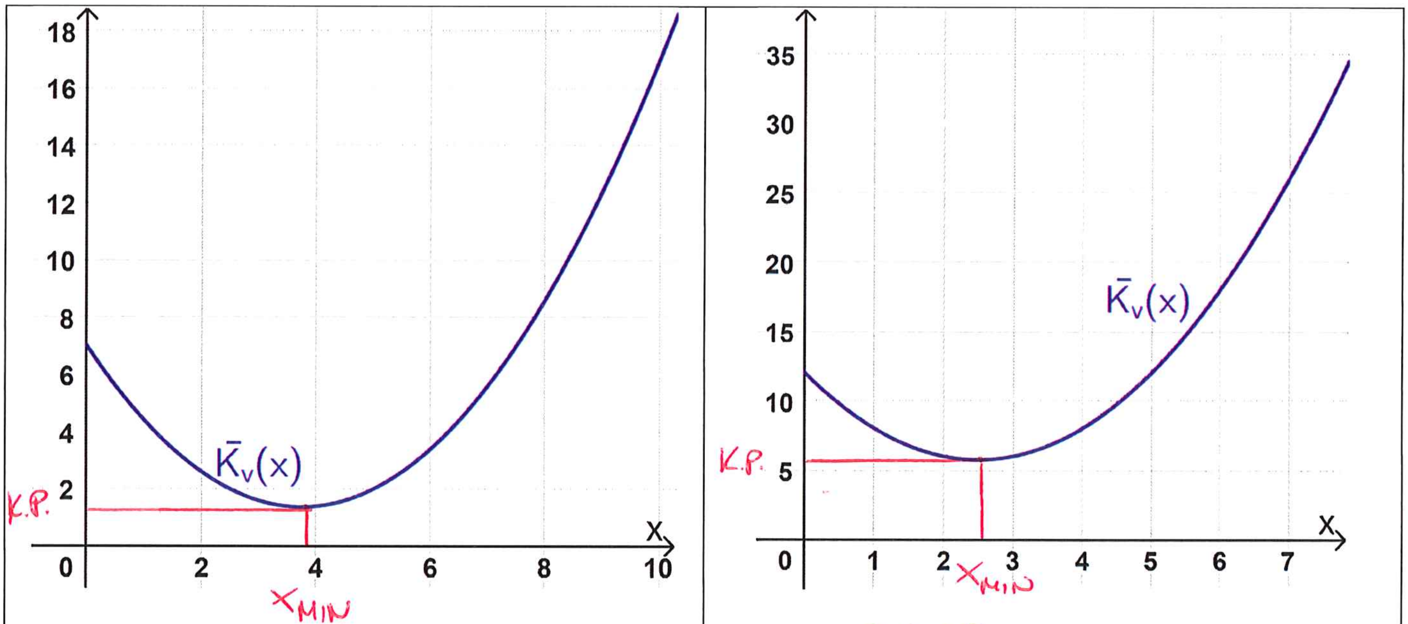
$x_{MIN} = 3{,}4\,ME$

$K.P. \approx \frac{12}{3{,}4} = 3{,}5\,GE/ME$

Int. wie a.

*

Bsp. 14) Gegeben ist der Graph einer variablen Stückkostenfunktion $\overline{K_v}(x)$. Bestimme graphisch das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze. Interpretiere die Werte im gegebenen Kontext.



$x_{MIN} \approx 3{,}9\,ME$

$K.P. \approx 1{,}2\,GE/ME$

$x_{MIN} \approx 2{,}6\,ME$

$K.P. \approx 6\,GE/ME$

Bsp. 15) Eine allgemeine, ertragsgesetzliche Kostenfunktion K ist gegeben mit $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Gib eine Gleichung an, mit der du das Betriebsoptimum bestimmen kannst.

2. Erlösfunktion $E(x)$

2.1 Preisfunktion bzw. Nachfragefunktion $p(x)$:

Die Preisfunktion der Nachfrage gibt den Preis p in Abhängigkeit der produzierten Menge x an.

i. Vollkommene Konkurrenz: Konstanter Preis -> Lineare Preisfunktion
ii. Monopolbetrieb: Preis kann individuell bestimmt werden

Eine **lineare Preisfunktion** hat zwei wichtige Eigenschaften:

- **Höchstpreis p_h**: Jener Preis, bei dem kein Stück mehr verkauft werden kann, d.h.

$$p_h = p(0)$$

Funktionswert des Preisfunktion bei $x = 0$

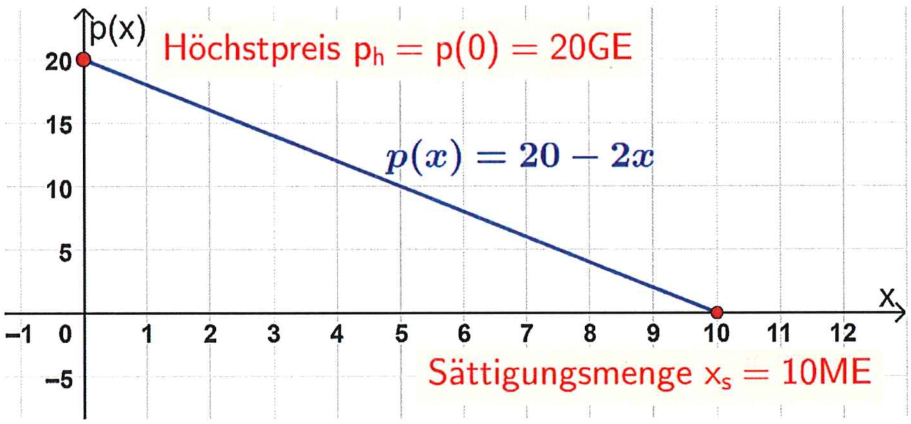
- **Sättigungsmenge x_s**: Jene Menge, bei dem der Markt gesättigt ist und damit nicht mehr verkauft werden kann, d.h.

$$p(x_s) = 0$$

Nullstelle der Preisfunktion

Mit steigender Nachfrage sinkt der Preis. So lange, bis nicht mehr produziert werden kann (Sättigungsmenge).

Bemerkung: Die Preisfunktion muss nicht zwingend eine lineare Funktion sein.



$p(x) = 20 - 2x$

Berechnung Höchstpreis:

$p(0) = 20 - 2 \cdot 0 = 20\ GE$

Berechnung Sättigungsmenge:

$p(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 20 - 2x = 0 \ | - 20$

$-2x = -20 \ | : (-2)$

$x = 10\ ME$

Bsp. 16) Gegeben ist eine Preisfunktion $p(x)$. Bestimme den Höchstpreis und die Sättigungsmenge.

a. $p(x) = -3x + 60$
b. $p(x) = -0{,}01x + 10$
c. $p(x) = -0{,}25x + 250$

HÖCHSTPREIS SÄTTIGUNGSMENGE

a) $p(0) = \underline{60GE}$ $\quad p(x)=0 \Leftrightarrow -3x+60=0 \ | -60$

$-3x=-60$

$\underline{x=20ME}$

b) $p(0) = \underline{10GE}$ $\quad \rightarrow -0{,}01x+10=0$

$-0{,}01x=-10 \ |:(-0{,}01)$

$\underline{x=1000ME}$

c) $p(0)=250GE$ $\quad \rightarrow -0{,}25x+250=0 \ | -250$

$-0{,}25x=-250 \ |:(-0{,}25)$

$x=x=1000\,ME$

2.2 Erlösfunktion $E(x)$:

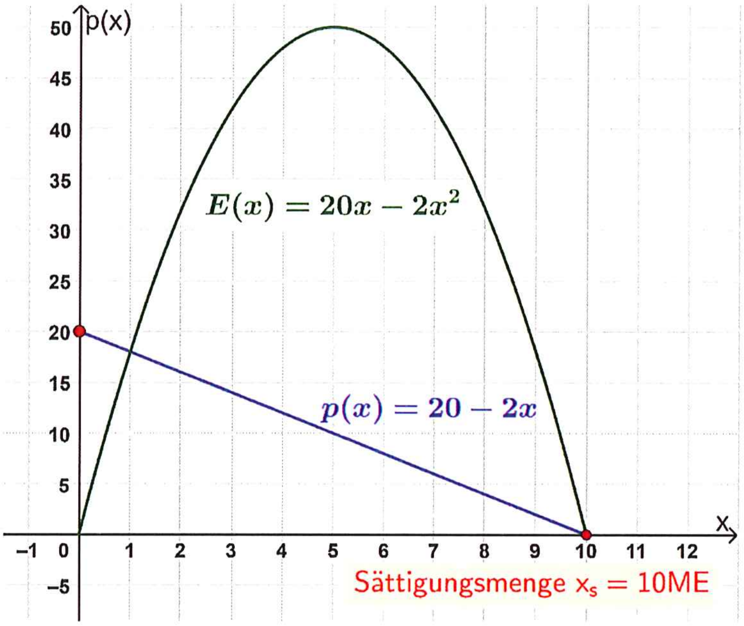
Die Erlösfunktion $E(x)$ ordnet jeder Stückzahl x den damit verbundenen Erlös zu. Die Erlösfunktion wird mit folgender Formel berechnet:

$$E(x) = p(x) \cdot x$$

$$Erlös = Preis\ pro\ Stück \cdot Anzahl\ der\ Stückzahl$$

- Ist die **Preisfunktion linear**, so ist die **Erlösfunktion** eine **Parabel** mit **zwei Nullstellen** (Eine Nullstelle im Ursprung, die andere bei der Sättigungsmenge, da kein Erlös mehr möglich ist).

Beispiel: $p(x) = 20 - 2x \rightarrow \boldsymbol{E(x)} = p(x) \cdot x = (20 - 2x) \cdot x = 20x - 2x^2$



Bestimmung Maximaler Erlös

Fragestellung: Welche Stückzahl x eines Produktes soll erzeugt werden, damit nach dem Verkauf zum Preis von $p(x)$ der größtmögliche Erlös entsteht?

Gegeben: Preisfunktion $p(x) = 20 - 2x$

Aus der Preisfunktion kann die Erlösfunktion gebildet werden. Es gilt: $\boldsymbol{E(x)} = p(x) \cdot x = 20x - 2x^2$

Zur **Bestimmung** des **maximalen Erlöses** müssen wir das **Maximum** der **Erlösfunktion** berechnen.

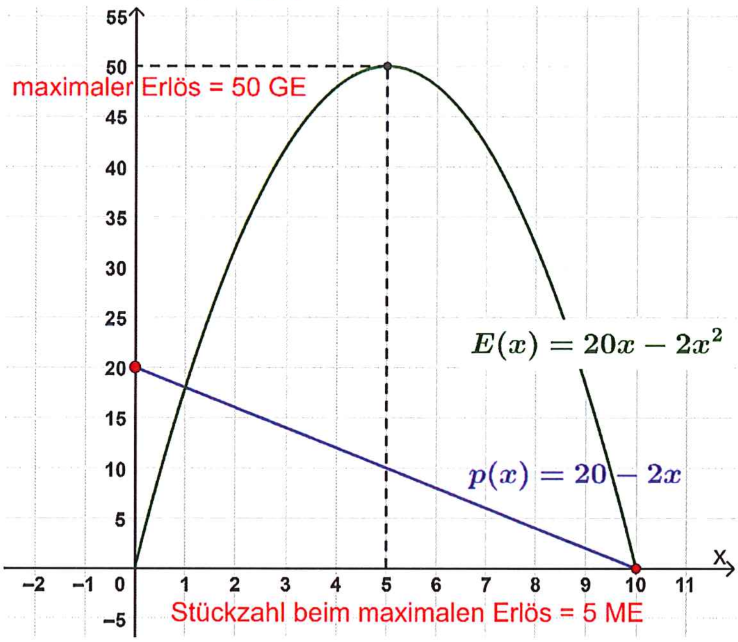
Schritt 1: $E'(x) = 20 - 4x \quad \& \quad E''(x) = -4$

Schritt 2: $E'(x) = 0 \iff 20 - 4x = 0 \iff x = 5$

Schritt 3: $E''(5) - 4 < 0 \rightarrow \quad MAXIMUM$

Schritt 4: Erlös $E(5) = 50\ GE$, Preis bei 5 Stück: $p(5) = 10\ GE/ME$

Antwort: Werden 5 ME produziert, so kann der größtmögliche Erlös mit 50 GE erzielt werden. Der Preis pro ME beträgt 10 GE.



Bsp. 17) Ein Fußballverein möchte im Sommer ein Fußballcamp für Kinder veranstalten. Laut einer Umfrage würde das Fußballcamp bei einem Preis von 170 € von 90 Kindern, sowie bei einem Preis von 150 € von 110 Kindern gebucht werden.

Stelle die Funktionsgleichung der zugehörigen linearen Preisfunktion der Nachfrage $p(x)$ auf.

Bsp. 18) Die Preisfunktion p für ein fünftägiges Abenteuercamp ist erhoben worden:

$$p(x) = -3x + 450$$

- x ... Anzahl der teilnehmenden Personen
- $p(x)$ ... Preis bei x Personen in € pro Person

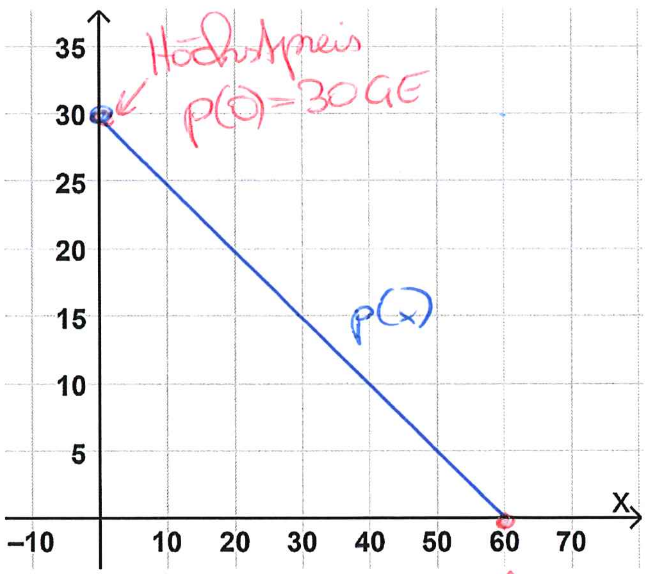
a. Berechne denjenigen Preis pro Person, der bei (i) 50, (ii) 75 bzw. (iii) 100 teilnehmenden Personen zu erwarten ist.

b. Gib den Höchstpreis an.

c. Bestimme die Sättigungsmenge an. Interpretiere den Wert im gegebenen Kontext.

d. Ermittle die Erlösfunktion $E(x)$ und berechne mit Hilfe der Differentialrechnung den maximalen Erlös. Bei wie vielen Personen ist der maximale Erlös zu erwarten?

Bsp. 19) Ein Restaurant möchte ein All-You-Can-Eat Buffet einführen. In einer Befragung haben die Personen angegeben, welchen Preis sie für das Buffet bezahlen würden. Das Ergebnis der Umfrage liefert folgende Preisfunktion der Nachfrage $p(x)$:



Sättigungsmenge: x=60ME

$$p(x) = -0{,}5x + 30$$

x ... Anzahl der Personen, die zum Essen kommen würden

p(x)... Preis für das Buffet bei x Personen in € pro Person

a. Zeichne die Preisfunktion in das Koordinatensystem ein. $k = -\frac{1}{2} = -\frac{20}{40} = -\frac{30}{60}$

b. Bestimme graphisch die Sättigungsmenge und den Höchstpreis. Gib die Werte an und markiere sie in deiner Graphik.

c. Bestimme die zugehörige Erlösfunktion $E(x)$. Ermittle den maximalen Erlös. Bei wie vielen Personen wird der maximale Erlös erzielt?

$E(x) = -0{,}5x^2 + 30x$

$\rightarrow E'(x) = -x + 30 \qquad E''(x) = -1 < 0$ ✓

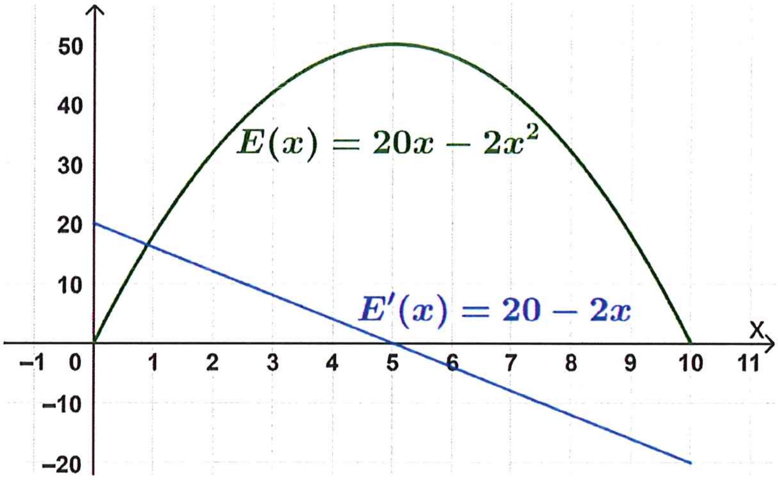
$E'(x) = 0 \iff \underline{\underline{x = 30}}$

Bei 30 Personen wird der maximale Erlös erzielt.

2.3 Grenzerlösfunktion $E'(x)$:

$E'(x)$ gibt die ungefähre Erhöhung des Erlöses an, wenn bei x Stück eine weitere Mengeneinheit produziert wird!

- $\boldsymbol{E'(2) = 12\ GE/ME}$
  *Wird bei 2 Stück eine weitere Mengeneinheit produziert, steigt der Gesamterlös um **ca.** 12 GE.*



Bsp. 20) Gegeben ist die Erlösfunktion $E(x) = -0{,}5x^2 + 10x$, die den Erlös in GE bei x verkauften ME angibt.

a. Bestimme den Erlös bei 10 verkauften ME.

b. Bestimme den Grenzerlös für $x = 20$ ME. Interpretiere den Wert im gegebenen Kontext.

c. Interpretiere folgenden Term im gegebenen Sachzusammenhang: $E'(7)$

Integral der Grenzerlösfunktion E'(x):

i. Unbestimmtes Integral:

Das unbestimmte Integral der Grenzerlösfunktion $E'(x)$ liefert die Erlösfunktion $E(x)$.

Beispiel: $E'(x) = 2x + 3\,, Fixkosten = 10\ GE$

Gesucht: *Erlösfunktion* $E(x)$

$$E(x) = \int E'(x)\,dx = \int (2x+3)\,dx = x^2 + 3x + c$$

Wichtig: Bei der **Erlösfunktion** spielen die **Fixkosten keine Rolle**, d.h. sie werden nicht berücksichtigt und die Integrationskonstante ist 0, da bei 0 Stück auch kein Erlös sein kann!

$$E(x) = x^2 + 3x$$

Bsp. 21) Gegeben sind jeweils eine Grenzerlösfunktion $E'(x)$ und die Fixkosten. Ermittle die Erlösfunktion $K(x)$.

a. $E'(x) = -2x + 3$ Fixkosten: 20 GE $\Rightarrow E(x) = -x^2 + 3x$

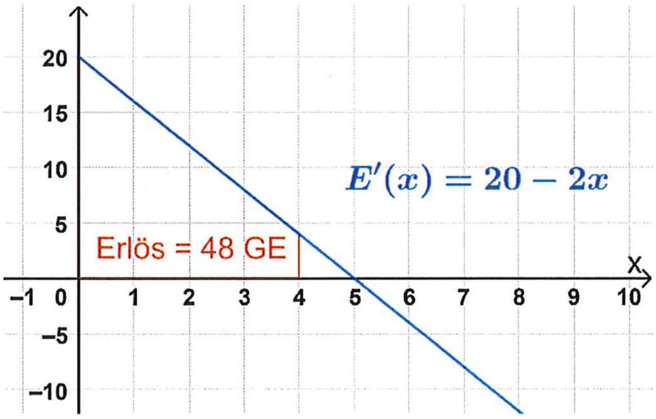
b. $E'(x) = 7$ Fixkosten: 100 GE $\Rightarrow E(x) = 7x$

c. $E'(x) = -0{,}05x + 1{,}5$ Fixkosten: 800 GE $\Rightarrow E(x) = -0{,}025x^2 + 1{,}5x$

ii. Bestimmtes Integral:

Das bestimmte Integral (bzw. die Fläche unter der Grenzerlösfunktion) entspricht dem Erlös bei dieser Stückzahl! (Integral des Grenzerlös = Erlösfunktion)

Beispiel: Gegeben ist die Grenzerlösfunktion $E'(x) = 20 - 4x$. Berechne den Erlös, der bei 4 Stück anfällt.

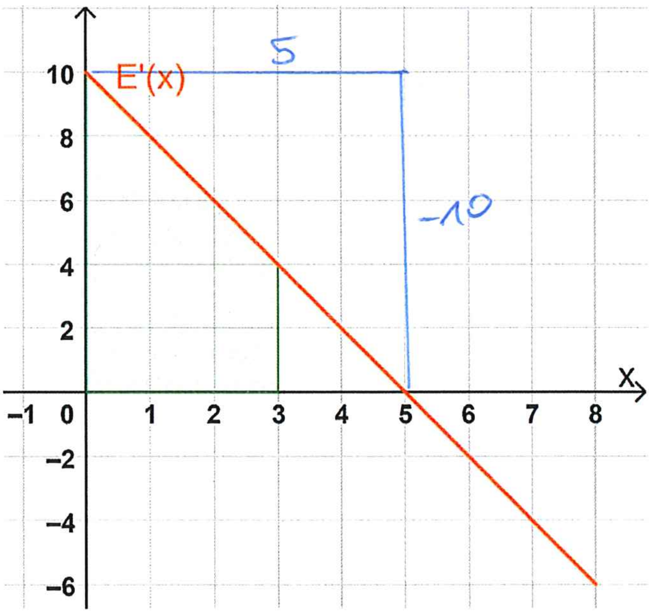


$$\int_0^4 E'(x)\,dx = \int_0^4 (20 - 4x)\,dx$$

$$\left[20x - 4\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = [20x - 2x^2]_0^4$$

$$80 - 32 - (0 - 0) = \boldsymbol{48\,GE}$$

Bsp. 22) Gegeben ist eine Grenzerlösfunktion E'(x). Die zugehörige Erlösfunktion E(x) gibt den Erlös in GE bei x verkauften ME an.



a. Stelle eine Funktionsgleichung von $E'(x)$ auf. Bestimme die Funktionsgleichung der zugehörigen Erlösfunktion von $E(x)$.

b. In der Graphik ist eine Fläche grün markiert. Gib das bestimmte Integral an, mit der du den Inhalt der Fläche berechnen kannst. Berechne.

c. Gibt es noch eine weitere Möglichkeit, die grüne Fläche (ohne Integral) zu berechnen? Berechne den Flächeninhalt und interpretiere den Wert im gegebenen Sachzusammenhang.

d. Interpretiere die Bedeutung der Nullstelle von E' in Bezug auf die zugehörige Erlösfunktion E im gegebenen Sachzusammenhang.

3. Gewinnfunktion $G(x)$

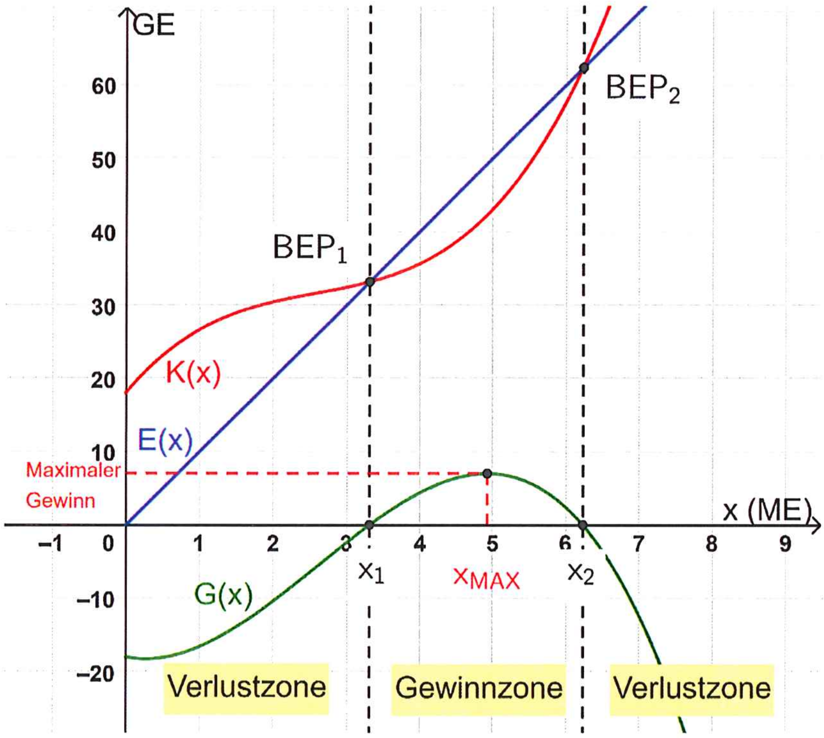
3.1 Die Gewinnfunktion G(x)

Die **Gewinnfunktion G(x)** ergibt sich aus dem Erlös und den Kosten:

$$\boldsymbol{G(x) = E(x) - K(x)}$$

$G(x)$ gibt den **Gewinn** bzw. **Verlust** bei x produzierten & verkauften Stück an!

- $G(x) > 0 \rightarrow$ Gewinn (Erlös > Kosten)
- $G(x) = 0 \rightarrow$ weder Gewinn noch Verlust (Erlös = Kosten)
- $G(x) < 0 \rightarrow$ Verlust (Kosten > Erlös)



Begriffe:

- **Verlustzone**: Bereich/e, in denen Verlust erzielt wird: $G(x) < 0$

- **Gewinnzone**: jenes Intervall bzw. Bereich, in dem Gewinn erzielt wird: $G(x) > 0$

- Der **break-even-point 1** ist jener Punkt, bei dem der Gewinn das erste Mal nicht mehr negativ ist (=1. Nullstelle der Gewinnfunktion). Generell gilt bei einem break-even-point, dass weder Gewinn noch Verlust erwirtschaftet wird (Erlös = Kosten). Bei dieser Veranschaulichung gibt es zwei Punkte: BEP_1 *und* BEP_2.

Berechnung der break-even-points:
$G(x) = 0$ oder $E(x) = K(x)$

- Die Gewinngrenzen x_1 und x_2 sind jene Stellen, an denen der Gewinn 0 ist (Stellen des Break-Even-Points). x_1 nennt man di untere bzw. x_2 die obere Gewinngrenze. Die beiden Gewinngrenzen sind die Grenzen für die Gewinnzone. Es gilt für die Gewinnzone: $(x_1; x_2)$

Berechnung der Gewinngrenzen: $G(x) = 0$

- Das **Gewinnmaximum** G_{max} wird mithilfe des Hochpunktes der Gewinnfunktion bestimmt.

Maximum = Extremum -> 1. Ableitung gleich 0

$G'(x) = 0 \rightarrow x_{MAX}$ ... Stückzahl in ME, bei der der maximale Gewinn auftritt.

Einsetzen in die Gewinnfunktion, um den maximalen Gewinn zu erhalten:

Maximaler Gewinn $= G(x_{max})$

Musterbeispiel: Gegeben sind folgende Funktionen:

$$K(x) = 0{,}5x^3 - 3{,}9x^2 + 12x + 18 \quad und \quad E(x) = 10x$$

Aufgabenstellung: Ermittle die Gewinnfunktion $G(x)$. Bestimme die Verlust- und Gewinnzonen, die Gewinngrenzen, die break-even-points sowie den maximalen Gewinn.

1) $G(x) = E(x) - K(x) = 10x - (0{,}5x^3 - 3{,}9x^2 + 12x + 18) = -0{,}5x^3 + 3{,}9x^2 - 2x - 18$

2) $G(x) = 0 \iff -0{,}5x^3 + 3{,}9x^2 - 2x - 18 = 0 \iff [x_1 = -1{,}74]\,; x_2 = 3{,}31; x_3 = 6{,}23$

$$\rightarrow Gewinngrenzen: x_1 = 3{,}31 \;\&\; x_2 = 6{,}23$$

- **Verlustzonen**: $[0; 3{,}31)$ und $(6{,}23; +\infty)$
- **Gewinnzone**: $(3{,}31; 6{,}23)$

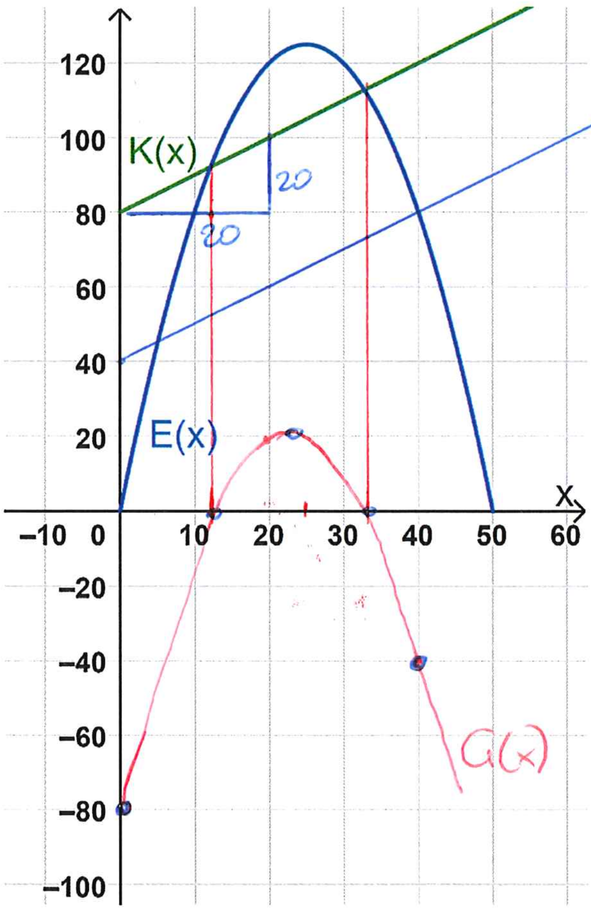
3) BEP1: $K(3{,}31) = E(3{,}31) = 33{,}13 \rightarrow BEP_1 = (3{,}31|33{,}13)$
BEP2: $K(6{,}23) = E(6{,}23) = 62{,}31 \rightarrow BEP_2 = (6{,}23|62{,}31)$

4) Ermittlung des maximalen Gewinns:

$$G'(x) = -1{,}5x^2 + 7{,}8x - 2 \quad \rightarrow \quad G'(x) = 0 \quad \iff \quad x = 4{,}93$$

Kontrolle, ob es sich um ein Maximum handelt: $G''(4{,}93) = -6{,}99 < 0 \ldots Maximum$

Maximaler Gewinn: $G(4{,}93) = \mathbf{7{,}02\ GE}$



Bsp. 23) Die Abbildung zeigt die Darstellung einer linearen Kostenfunktion und einer quadratischen Erlösfunktion.

↗ $k = \frac{20}{20} = 1$

a. Gib die Funktionsgleichung der Kostenfunktion K an.

b. Begründe, warum die zugehörige Gewinnfunktion $G(x)$ eine quadratische Funktion sein muss.

c. Zeichne den Graphen der Gewinnfunktion im Intervall $[0; 45]$ ein.

d. Gib die break-even-points an. Erkläre die Bedeutung dieser speziellen Punkte.

e. Wie ändern sich die Gewinngrenzen, wenn die Fixkosten verringert werden?

f. Gib die beiden Gewinngrenzen an, wenn die Fixkosten auf 40 GE gesenkt werden. Ermittle graphisch!

d) BEP1 = (12|90) BEP2 = (33|112)
KOSTEN = ERLÖS

e) Die untere Gewinngrenze wird kleiner, die obere —u— —u— größer.

a) $K(x) = x + 80$

b) $G(x) = E(x) - K(x)$
Quadr. FKT − LIN. F. = Quadr. F.

f) $x_1 \approx 4$ ME $x_2 \approx 40$ ME

Bsp. 24) Bei einer Fortbildung fallen für den Veranstalter Kosten an, die näherungsweise mit Hilfe folgender Kostenfunktion bestimmt werden können:

$$K(x) = 0{,}02x^2 + 40x + 3800$$

- x ... Anzahl der teilnehmenden Personen
- $K(x)$ ... Gesamtkosten in €, die bei x Personen für den Veranstalter anfallen

Der Preis für die Fortbildung beträgt 130 € pro Person.

a. Wie hoch sind die Fixkosten für den Veranstalter?

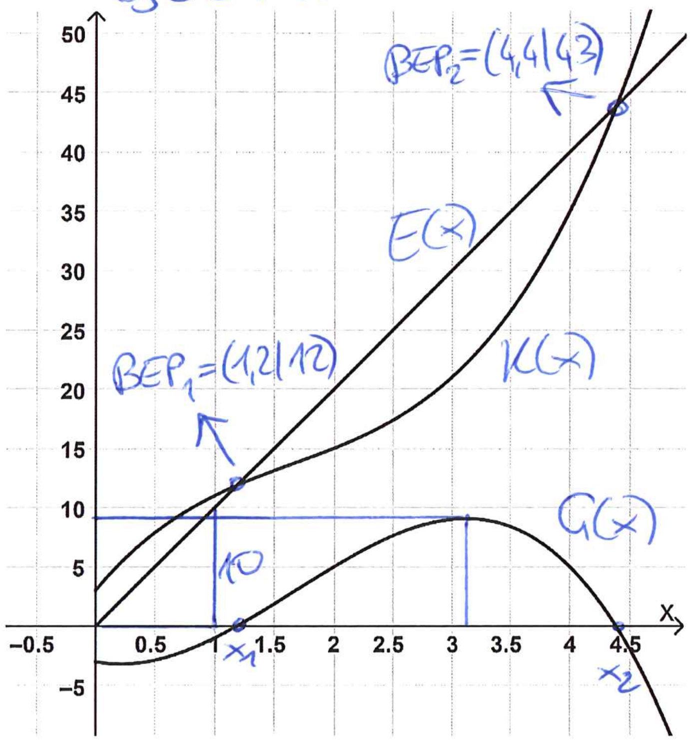
b. Bestimme die Erlösfunktion $E(x)$.

c. Stelle die Gewinnfunktion $G(x)$ auf.

d. Berechne, bei welcher Teilnehmerzahl der break-even-point erreicht wird.

c) Gewinnzone: $(1{,}2 ; 4{,}4)$
Verlustzone: $[0 ; 1{,}2)$ & $(4{,}4 ; +\infty)$

b) $E(x) = 10x$



Bsp. 25) Die Graphen einer Kostenfunktion, Erlösfunktion und Gewinnfunktion sind im Koordinatensystem dargestellt.

a. Beschrifte die drei Graphen.

b. Bestimme die Gleichung der Erlösfunktion $E(x)$.

c. Bestimme die Gewinngrenzen und die Verlust- und Gewinnzonen.

$x_1 \approx 1{,}2\,\text{ME}$ → $x_2 = 4{,}4\,\text{ME}$

d. Bestimme die break-even-points.

e. Bestimme graphisch den maximalen Gewinn.

ca. 9 GE

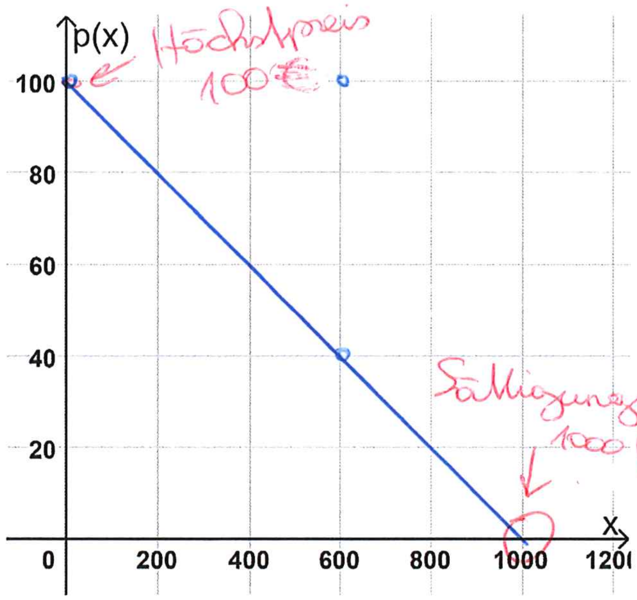
Bsp. 26) Für eine quadratische Gewinnfunktion G gilt: $G(x) = ax^2 + bx + c$

- x ... Anzahl der verkauften Stück in ME
- G(x) ... Gewinn bei x verkauften Stück in GE

a. Bestimme allgemein die Extremstelle der Gewinnfunktion.

b. Welche Bedingung muss für den Parameter a gelten, dass ein Maximum an der in Teil a) bestimmten Extremstelle vorliegt.

$k = -0{,}1 = -\frac{1}{10} = -\frac{60}{600}$



Bsp. 27) In einem Zoo möchten die Besitzer eine Jahreskarte anbieten. In einer Befragung haben die BesucherInnen angegeben, welchen Preis sie für die Jahreskarte bezahlen würden. Das Ergebnis der Umfrage liefert folgende Preisfunktion der Nachfrage $p(x)$:

$$p(x) = -0{,}1x + 100$$

- x … Anzahl der Personen, die eine Jahreskarte kaufen
- p(x)… Preis für die Jahreskarte bei x Personen in € pro Person

a. Zeichne die Preisfunktion in das Koordinatensystem ein. Bestimme graphisch die Sättigungsmenge und den Höchstpreis. Gib die Werte an und markiere sie in deiner Graphik.

b. Stelle die Gleichung der zugehörigen Erlösfunktion auf. Bestimme den Scheitelpunkt der Erlösfunktion. Interpretiere die beiden Koordinaten im gegebenen Kontext.

c. Die täglichen Kosten, die für die Veranstalter anfallen, lassen sich durch folgende Funktion K beschreiben:

$$K(x) = 0{,}05x^2 + 13x + 5000$$

- Berechne die breakt-even-points und gib die Gewinn- bzw. Verlustzonen an.
- Berechne die Höhe des maximalen Gewinns.
- Begründe: Hängt die Stelle vom maximalen Gewinn von den Fixkosten ab?

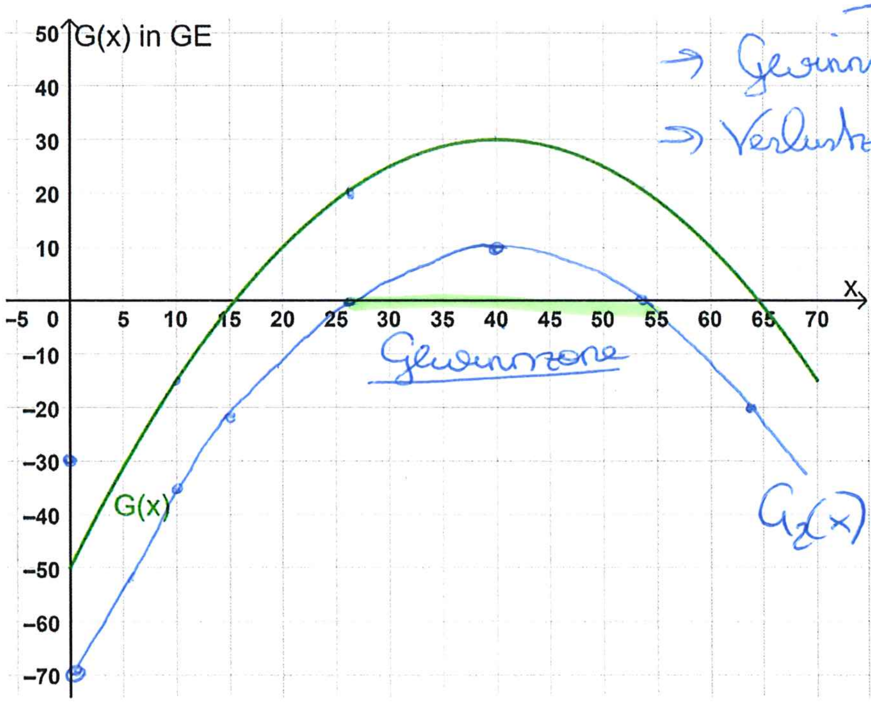
Bsp. 28) Gegeben ist eine Gewinnfunktion $G(x)$ im Intervall $[0; 70]$. Die Fixkosten steigen um 20 GE an. Die variablen Kosten und der Erlös bleiben gleich. Die Funktion $G_2(x)$ soll die Gewinnfunktion unter diesen veränderten Bedingungen angeben (Fixkostenanstieg um 20 GE).

a. Zeichne in die Abbildung der Graphen der neuen Gewinnfunktion $G_2(x)$ ein.

b. Verändern sich die Gewinn- bzw. Verlustzonen? Gib deine Erkenntnisse an. → JA!

→ Gewinnzone wird kleiner

→ Verlustzonen größer



Bsp. 29) Eine Gewinnfunktion für ein Produkt ist gegeben durch:

$$G(x) = -0{,}027x^3 - 0{,}12x^2 + 11{,}8x - 130$$

- x ... Anzahl der verkauften ME
- G(x) ... Gewinn in GE bei x verkauften ME

Fixkosten = 130 GE

a. Lies aus der Gleichung der Gewinnfunktion die Fixkosten für die Herstellung des Produktes ab.

b. Wie ändert sich der Graph der Gewinnfunktion, wenn sich die Fixkosten verringern.

↳ Graph wird um diesen Wert nach oben verschoben!

3.2 Cournot'scher Punkt:

Sei x_{max} jene Menge, bei der der Gewinn maximal ist und p(x_{max}) der Preis bei dieser Menge. Dann bezeichnet man x_{max} als **Cournot'sche Menge** und den **Punkt (x_{max} | p(x_{max}))** den **Cournot'schen Punkt**. Dieser liegt auf dem Graphen der Preisfunktion p.

Beispiel: Folgende Funktionen sind gegeben:

$$K(x) = 0{,}5x^2 + x + 100 \qquad und \qquad p(x) = -0{,}2x + 20$$

Aufgabenstellung: Bestimme die Erlös- und Gewinnfunktion, den maximalen Gewinn und den Cournot'schen Punkt.

1) $E(x) = p(x) \cdot x = -0{,}2x^2 + 20x$

2) $G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}2x^2 + 20x - (0{,}5x^2 + x + 100) = -0{,}7x^2 + 19x - 100$

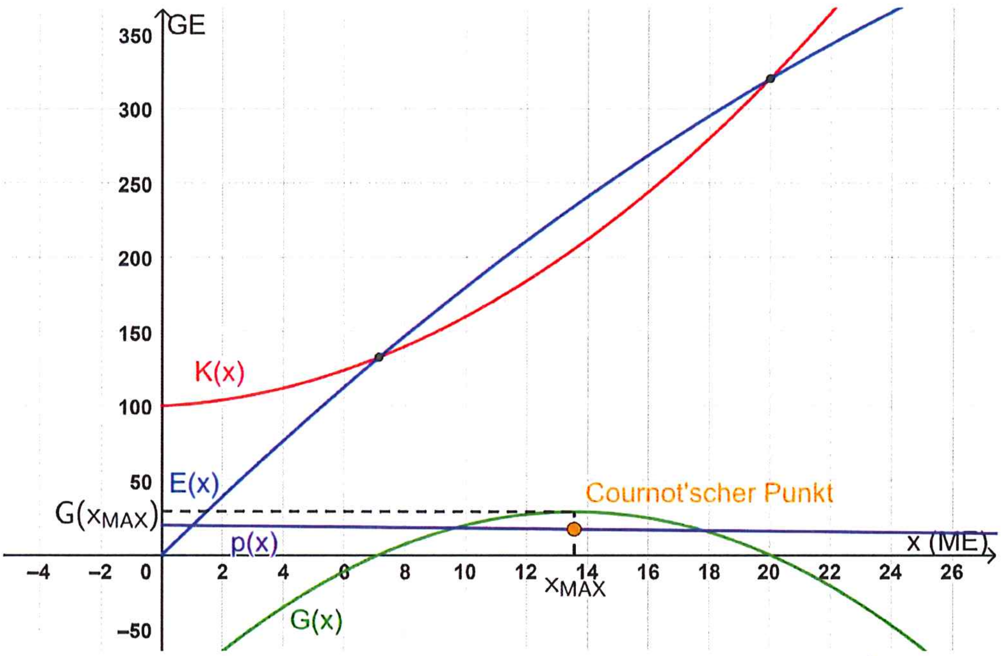
3) Maximaler Gewinn: $G'(x) = -1{,}4x + 19 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 13{,}57$

Kontrolle, ob es sich um ein Maximum handelt: $G''(x) = -1{,}4 < 0 \ldots Maximum$

Maximaler Gewinn: $G(13{,}57) = 28{,}93\ GE$

4) Cournot'sche Menge $x_{MAX} = 13{,}57$

Cournot'scher Punkt $p(13{,}57) = 17{,}29 \frac{GE}{ME} \quad \rightarrow \quad P = (13{,}57|17{,}29)$



Bsp. 30) Es sind jeweils eine Kostenfunktion und eine Preisfunktion gegeben. Bestimme die Erlös- und Gewinnfunktion, den maximalen Gewinn, die Cournot'sche Menge und den Cournot'schen Punkt.

$K(x) = \overset{5}{\cancel{10}}x + 100$ $p(x) = -\underset{0{,}05}{\cancel{0{,}2}}x + 10$	$K(x) = 3x^2 + 0{,}5x + 100$ $p(x) = -0{,}1x + 50$

3.3 Grenzgewinnfunktion G'(x)

G'(x) gibt die ungefähre Erhöhung des Gewinns an, wenn bei x Stück eine weitere Mengeneinheit produziert wird!

- $\boldsymbol{G'(3) = 8\,\frac{GE}{ME}}$ → *Wird bei 3 Stück eine weitere Mengeneinheit produziert, steigt der Gesamtgewinn um* ***<u>ca.</u>*** *8 GE.*

<u>Integral der Grenzgewinnfunktion G'(x):</u>

i. <u>Unbestimmtes Integral:</u>

<u>Beispiel</u>: $G'(x) = 3x^2 + 6x + 3\,,Fixkosten = 20\ GE$

Gesucht: *Gewinnfunktion* $G(x)$

$$G(x) = \int G'(x)\,dx = \int (3x^2 + 6x + 3)\,dx = x^3 + 3x^2 + 3x \mathbf{- 20}$$

Wichtig: Bei der Gewinnfunktion wirken sich anfallende Fixkosten negativ aus. Diese erhöhen nicht den Gewinn, sondern verringern ihn um diesen Betrag. D.h. die **Fixkosten** müssen **abgezogen** werden!!!

ii. <u>Bestimmtes Integral:</u>

Das bestimmte Integral (bzw. die Fläche unter der Grenzgewinnfunktion) entspricht dem Gewinn/Verlust bei dieser Stückzahl! (Integral des Grenzgewinns = Gewinnfunktion)

Bsp. 31) Gegeben sind jeweils eine Grenzfunktion $K'(x), E'(x)$ *oder* $G'(x)$ und die zugehörigen Fixkosten.

Fragestellung 1: Bei welchem unbestimmten Integral spielen die Fixkosten eine Rolle? Was musst du mit den Fixkosten bei K(x), E(x) bzw. G(x) machen?

Fragestellung 2: Ermittle die gesuchte Funktion.

a. $E'(x) = -4x + 10$ Fixkosten: 20 GE - gesucht: $E(x)$
b. $K'(x) = 7x$ Fixkosten: 1000 GE - gesucht: $K(x)$
c. $G'(x) = -0{,}5x + 2$ Fixkosten: 200 GE - gesucht: $G(x)$
d. $E'(x) = -0{,}001x + 30$ Fixkosten: 80 GE - gesucht: $E(x)$
e. $K'(x) = 0{,}2x^2 - 0{,}1x + 2$ Fixkosten: 350 GE - gesucht: $K(x)$
f. $G'(x) = -x^2 + x - 3$ Fixkosten: 1500 GE - gesucht: $G(x)$

KOSTEN- & PREIS

Bsp 1)

Fixkosten

a) $K(x) = 2x + 10$ FIXKOSTEN = 10GE

$K_v(x) = 2x$

$K(5) = 20$ GE $\quad K_v(10) = 20$GE

$K(20) = 50$GE $\quad K_v(40) = 80$GE

b) $K(x) = 3x^2 + 100$

$K_v(x) = 3x^2$

$K(5) = 175$GE $\quad K_v(10) = 300$GE

$K(20) = 1300$GE $\quad K_v(40) = 4800$GE

c) $K(x) = 0{,}5x^3 - 3{,}9x^2 + 12x + 18$

$K_v(x) = 0{,}5x^3 - 3{,}9x^2 + 12x$

$K(5) = 43$ GE $\quad K_v(10) = 230$GE

$K(20) = 2698$GE $\quad K_v(40) = 26\,240$GE

d) $K(x) = 1{,}2x^3 - 3{,}3x^2 + 79x + 800$

$K_v(x) = 1{,}2x^3 - 3{,}3x^2 + 79x$

$K(5) = 1262{,}5$GE $\quad K_v(10) = 2\,160$GE

$K(20) = 10660$GE $\quad K_v(40) = 74680$GE

2) $D = [0; 100]$

$K(x) = 20x + 330$

3) a) $K(x) = 4x + 25 \rightarrow \overline{K}(x) = 4 + \frac{25}{x} \rightarrow \overline{K}(4) = 10{,}25$ GE/ME

$\overline{K}(22) = 5{,}14$GE/ME

$K_v(x) = 4x \rightarrow \overline{K_v}(x) = 4$

$\rightarrow \overline{K_v}(10) = 4$GE/ME

$\overline{K_v}(30) = 4$GE/ME

b) $K(x) = 4x^2 + 200 \rightarrow \overline{K}(x) = 4x + \frac{200}{x} \rightarrow \overline{K}(4) = 66$GE/ME

$\overline{K}(22) = 97{,}09$GE/ME

$K_v(x) = 4x^2 \rightarrow \overline{K_v}(x) = 4x$

$\overline{K_v}(10) = 40$GE/ME

$\overline{K_v}(30) = 120$GE/ME

c) $K(x) = 0{,}5x^3 - 3{,}8x^2 + 13x + 50 \rightarrow \overline{K}(x) = 0{,}5x^2 - 3{,}8x + 13 + \frac{50}{x}$

$K_v(x) = 0{,}5x^3 - 3{,}8x^2 + 13x \rightarrow \overline{K_v}(x) - 0{,}5x^2 - 3{,}8x + 13$

$\overline{K}(4) = 18{,}3$ GE/ME $\quad \overline{K_v}(10) = 25$GE/ME

$\overline{K}(22) = 173{,}67$GE/ME $\quad \overline{K_v}(30) = 349$GE/ME

d) $K(x) = 1{,}3x^3 - 3{,}2x^2 + 79x + 1320 \rightarrow \overline{K}(x) = 1{,}3x^2 - 3{,}2x + 79 + \frac{1320}{x}$ 2

$K_v(x) = 1{,}3x^3 - 3{,}2x^2 + 79x \rightarrow \overline{K_v}(x) = 1{,}3x^2 - 3{,}2x + 79$

$\overline{K}(4) = 417$ GE/ME $\quad \overline{K_v}(10) = 177$ GE/ME

$\overline{K}(22) = 697{,}8$ GE/ME $\quad \overline{K_v}(30) = 1153$ GE/ME

4a) $K_v(x) = 0{,}003x^3 - 0{,}118x^2 + 5{,}4x$

b) $K(20) = 184{,}8$ GE $\quad K_v(20) = 84{,}8$ GE

c) $\frac{K(25) - K(20)}{25 - 20} = \underline{\underline{4{,}67 \text{ GE/ME}}}$

d) $K'(30) = 6{,}42$ GE/ME

→ Würde man bei 30 ME eine weitere ME produzieren, so würden die Kosten um ca. 6,42 GE ansteigen.

FIXKOSTEN

5a) $K(x) = \int K'(x)\,dx = \underline{0{,}1x^3 - 0{,}25x^2 + 6x + 20}$

b) $\underline{K(x) = 2x^2 + 100}$

c) $\underline{K(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 15x + 800}$

d) $\underline{K(x) = 5x + 10}$

6a) Steigungsdreieck

$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10}{10} = 1 \rightarrow K'(x) = x + 10$

$\downarrow$

$K(x) = \frac{1}{2}x^2 + 10x + 100$

b) Fläche Trapez

$A = \frac{(10+16)\cdot 6}{2} = \underline{\underline{78}}$

Integral: $\int_0^6 K'(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 10x + 100 \Big|_0^6$

$= \frac{1}{2}\cdot 36 + 60 + \cancel{100} - 0 - 0 - \cancel{100} = \underline{\underline{78}}$

c) Die Produktion der ersten 6 ME kostet 78 GE. (ohne Fixkosten!)

7a) Kostenkehre, $x \approx 13$ ME ③

b) $A = \int_0^{30} K'(x)\,dx$

c) Kosten für die Produktion der ersten 30 Stück (ohne Fixkosten)

8) $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$K''(x) = 6ax + 2b$

① $K(0) = 2800 \rightarrow d = 2800$

② $K''(6) = 0 \Rightarrow 6a \cdot 6 + 2b = 0$
$36 + 2b = 0$

③ $K(6) = 3050 \Rightarrow 216a + 36b + 6c + d = 3050$

④ $K(10) = 3200 \Rightarrow 1000a + 100b + 10c + d = 3200$

$a = 0{,}21$
$b = -3{,}75$
$c = 56{,}67$
$d = 2800$

$\underline{K(x) = 0{,}21x^3 - 3{,}75x^2 + 56{,}67x + 2800}$

9) ① $K(10) = 154 \rightarrow 1000a + 100b + 10c + d = 154$

② $K''(1{,}5) = 0 \Rightarrow 9a + 2b = 0$

③ $K(1{,}5) = 13{,}75 \Rightarrow 3{,}375a + 2{,}25b + 1{,}5c + d = 13{,}75$

④ $K'(20) = 207{,}4 \Rightarrow 1200a + 40b + c = 207{,}4$

$\Downarrow$ GEOGEBRA

$a = 0{,}2 \quad b = -0{,}9 \quad c = 3{,}4 \quad d = 10$

$\rightarrow \underline{K(x) = 0{,}2x^3 - 0{,}9x^2 + 3{,}4x + 10}$

10a)

$K(x) = 0{,}02x^3 - 3{,}1x^2 + 170x + 700$

$K'(x) = 0{,}06x^2 - 6{,}2x + 170$

$K''(x) = 0{,}12x - 6{,}2$

$\overline{K}(x) = 0{,}02x^2 - 3{,}1x + 170 + \frac{700}{x}$ (4)

$\overline{K}'(x), \overline{K}''(x)$ ... in GeoGebra definiert!

$\overline{K_v}(x) = 0{,}02x^2 - 3{,}1x + 170$

$\overline{K_v}'(x) = 0{,}04x - 3{,}1$

$\overline{K_v}''(x) = 0{,}04$

① Kostenkehre:

$K''(x) = 0 \rightarrow \underline{\underline{x = 51{,}7\,ME}} \rightarrow K(51{,}7) \approx 3966{,}8\,GE$

$\underline{\underline{\text{Kostenkehre} = (51{,}7 \mid 3966{,}8)}}$

② Betriebsoptimum

$\overline{K}'(x) = 0 \xrightarrow[\text{GEOGEBRA}]{} \underline{\underline{x = 80{,}2\,ME}}$ $\quad \overline{K}''(80{,}2) = 0{,}04 > 0 \rightarrow$ MINIMUM

③ langfristige P.U. $= \overline{K}(80{,}2) = \underline{\underline{58{,}7\,GE/ME}}$

④ Betriebsminimum $\overline{K_v}'(x) = 0 \rightarrow \underline{\underline{x = 77{,}5\,M}}$ $\quad \overline{K_v}''(77{,}5) = 0{,}04 > 0$ MINIMUM

⑤ kurzfristige P.U. $= \overline{K_v}(77{,}5) = \underline{\underline{49{,}9\,GE/ME}}$

10b) $K(x) = 0{,}3x^3 - 1{,}2x^2 + 20x + 120$

$\rightarrow K'(x) = 0{,}9x^2 - \cancel{2{,}4x} + 20$

$\rightarrow K''(x) = 1{,}8x - 2$

DEFINIEREN mit Geogebra:

$\overline{K}(x) = 0{,}3x^2 - 1{,}2x + 20 + \frac{120}{x}$

& $\overline{K}'(x), \overline{K}''(x)$

$\underline{\text{UND}}$: $\overline{K_v}(x) = 0{,}3x^2 - 1{,}2x + 20$

& $\overline{K_v}'(x), \overline{K_v}''(x)$

① KK: $K''(x) = 0 \rightarrow x = 1{,}\dot{3}\,ME$

$\rightarrow K(1{,}\dot{3}) \approx 145{,}2\,GE$ $\quad \underline{\underline{KK = (1{,}\dot{3} \mid 145{,}2)}}$

② BO: $\overline{K}'(x) = 0 \rightarrow \underline{\underline{x = 6{,}6\,ME}} \rightarrow \overline{K}''(6{,}6) \approx 1{,}43 > 0$ MIN. ✓

③ L.P.U: $\overline{K}(6{,}6) = \underline{\underline{43{,}3\,GE/ME}}$

④ BM: $\overline{K_v}'(x) = 0 \rightarrow \underline{\underline{x = 2\,ME}} \rightarrow \overline{K_v}''(2) = \frac{3}{5} > 0$ MIN. ✓

⑤ K.P.U: $\overline{K_v}(2) = \underline{\underline{18{,}8\,GE/ME}}$

5

10c) $K(x)=0{,}0004x^3-0{,}027x^2+98x+47000$

definiere in Geogebra: $K'(x), K''(x), \overline{K}(x), \overline{K}'(x), \overline{K}''(x), \overline{K_v}(x), \overline{K_v}'(x), \overline{K_v}''(x)$

① Kostenkehre: $K''(x)=0$ $\quad K(22{,}5)=49\,195{,}9\,GE$

$\underline{\underline{x=22{,}5\,ME}}$ $\quad \underline{\underline{KK=(22{,}5|49\,195{,}9)}}$

② Betriebsopt.: $\overline{K}'(x)=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=400{,}3\,ME}}$

$\overline{K}''(400{,}3)=0{,}0023>0$ .. MINIMUM ✓

③ L. PU: $\overline{K}(400{,}3)=\underline{\underline{268{,}7\,GE/ME}}$

④ Betriebsminimum: $\overline{K_v}'(x)=0 \rightarrow \underline{\underline{x=33{,}75}}$

$\overline{K_v}''(33{,}75)=0{,}0008>0$ MINIMUM ✓

⑤ K. PU: $\overline{K_v}(33{,}75)=\underline{\underline{97{,}5\,GE/ME}}$

11a) • Bei 3,2 ME ist die Stückkostenproduktion am geringsten. (Optimales Verhältnis zw. Kosten & Produktionsmenge)

• Verkauft man die Stückzahl zum Preis von 6 GE, so werden die Kosten gedeckt (kein Gewinn / Verlust)

b) analog zu a)

12a) ① $BO \approx \underline{\underline{6{,}8\,ME}} \Rightarrow L.PU. = \frac{K(6{,}8)}{6{,}8} = \frac{53}{6{,}8} = \underline{\underline{7{,}8\,GE/ME}}$

$K(6{,}8)\approx 53\,GE$

② Betriebsminimum: $x_{MIN}\approx 3{,}4\,ME \Rightarrow K.PU. = \frac{8}{3{,}4} = \underline{\underline{2{,}4\,GE/ME}}$

$K_v(3{,}4)=38-30=8\,GE$

b) ① Betriebsoptimum: $x_{OPT}=4{,}8\,ME \Rightarrow L.P.U = \frac{41{,}5}{4{,}8} = \underline{\underline{8{,}6\,GE/ME}}$

$K(4{,}8)\approx 41{,}5\,GE$

② Betriebsminimum: $x_{MIN}\approx 3{,}7\,ME \Rightarrow K.PU. = \frac{16}{3{,}7} = \underline{\underline{4{,}3\,GE/ME}}$

$K_v(3{,}7)\approx 34-18=16\,GE$

⑥

15) $K(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$\overline{K}(x)=ax^2+bx+c+\frac{d}{x}$

$\rightarrow$ BO $\overline{K}(x)=ax^2+bx+c+\frac{d}{x}$

MINIMUM $\overline{K}'(x)=2ax+b+\frac{d}{-x^2}$

$\rightarrow \underline{\underline{2ax+b-\frac{d}{x^2}=0}}$

$x=x_{OPT}$

17) $p(90)=170$ €

$p(110)=150$ €

$\Rightarrow k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{150-170}{110-90}=\frac{-20}{20}=-1$

$p(x)=-x+d$

$170=-90+d \quad |+90$

$\underline{260=d}$

$\rightarrow \underline{\underline{p(x)=-x+260}}$

18a) • $p(50)=300$ GE/ME

• $p(75)=225$ GE/ME

• $p(100)=150$ GE/ME

b) $p(0)=\underline{450\text{ GE}}$

c) $p(x)=0 \Leftrightarrow -3x+450=0 \quad |-450$

$-3x=-450 \quad |:(-3)$

$\underline{\underline{x=150}}$

A: Maximal 150 Personen können das Camp besuchen.

d) $E(x)=p(x)\cdot x=(-3x+450)\cdot x=-3x^2+450x$

Maximaler Erlös: $E'(x)=-6x+450$

$E''(x)=-6$

$\rightarrow E'(x)=0 \Leftrightarrow -6x+450=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=75}}$

$E''(75)=-6<0$ ✓ MAXIMUM

Bei 75 Personen wird der maximale Erlös erzielt.

$\underline{\underline{E(75)=16875\text{ GE}}}$

20) a) $E(10) = \underline{\underline{50\ GE}}$

b) $E'(x) = -x+10$

$E'(20) = \underline{\underline{-10\ GE/ME}}$

Würde man bei 20 ME eine weitere ME produzieren / verkaufen, so würde der Erlös um ca. 10 GE sinken.

c) $E'(7)$ ... gibt ungefähr die Veränderung des Erlöses an, wenn man bei 7 ME eine weitere ME verkaufen würde.

22) a) $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{10}{5} = -2$

$E'(x) = -2x+10$

b) $\int_0^3 E'(x)\,dx = \int_0^3 (-2x+10)\,dx = -x^2+10x \Big|_0^3 = -9+30-0+0$

$= \underline{\underline{21\ GE}}$

c) Fläche von einem Trapez

$A = \frac{(10+4)\,3}{2} = \underline{\underline{21}}$

Der Erlös bei 3 verkauften ME beträgt 21 GE.

d) Nullstelle $\rightarrow E'(x) = 0$

↳ Stelle beim <u>maximalen</u> Erlös (in ME!)

8

24a) Fixkosten $= 3800$ €

b) $p(x) = 130 \rightarrow E(x) = 130x$

c) $G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}02x^2 + 90x - 3800$

d) $G(x) = 0 \rightsquigarrow x = 42{,}6$ Personen

$\rightsquigarrow$ ab 43 Personen!

26) a) $G(x) = ax^2 + bx + c$

$G'(x) = 2ax + b$

$\rightarrow G'(x) = 0 \Leftrightarrow 2ax + b = 0 \quad | -b$

$2ax = -b \quad | :2a$

$x = -\frac{b}{2a}$

b) $G''(x) = 2a < 0 \quad | :2$

$a < 0$

$\rightsquigarrow$ a muss negativ sein!

27) a) Graphik – Angabe

b) $p(x) = -0{,}1x + 100 \xrightarrow{\cdot x} E(x) = -0{,}1x^2 + 100x$

$S = (1000 | 100\,000)$

$\rightarrow$ Bei 1000 Personen tritt der maximale Erlös von 100 000 € auf.

c) $G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}15x^2 + 187x - 5000$

① $G(x) = 0 \rightarrow x_1 = 27{,}33$ ME (Personen) $\rightarrow K(27{,}33) = 5393$ GE (€) $\rightarrow BEP_1 = (27{,}3 | 5393)$

$x_2 = 1219{,}3$ ME $\rightarrow K(1219{,}3) = 95\,186$ GE (€) $\rightarrow BEP_2 = (1219{,}3 | 95\,186)$

Verlustzone: (i) $[0; 27{,}3)$ (ii) $(1219{,}3; +\infty)$ Gewinnzone: $(27{,}3; 1219{,}3)$

② $G'(x) = 0 \Rightarrow x \approx 623{,}3$ Personen $\Rightarrow G(623) = 53\,281{,}65$ €

$G(624) = 53\,281{,}60$ €

maximaler Gewinn bei 623 Pe.

(623,3 in der Realität nicht möglich!)

③ NEIN! $G(x) = ..x^2 + ..x -$ ZAHL

Fixkosten

max. Gewinn: $G'(x) = 0$

LEITET man G ab, fallen die Fixkosten weg!!

30a) $K(x)=5x+100$
$p(x)=-0{,}05x+10$

① $E(x)=-0{,}05x^2+10x$
$G(x)=-0{,}05x^2+5x-100$

② Maximaler Gewinn
$G'(x)=0$
$x=50$ ME
$G(50)=25$ GE

③ Cournot'sche Menge
$x=50$ ME

④ $p(50)=7{,}5$ GE/ME

Cournot'scher Punkt
$P=(50|7{,}5)$

b) $K(x)=3x^2+0{,}5x+100$
$p(x)=-0{,}1x+50$

① $E(x)=-0{,}1x^2+50x$
$G(x)=-3{,}1x^2+49{,}5x-100$

② Max. Gewinn:
$G'(x)=0$
$x\approx 7{,}98$ ME
$G(7{,}98)\approx 97{,}6$ GE

③ Cournot'sche Menge $x=7{,}98$ ME

④ $p(7{,}98)\approx 49{,}2$ GE/ME

Cournot'scher Punkt
$P=(7{,}98|49{,}2)$

31) FIXKOSTEN $=200$

K: $+200$
E: keine Auswirkung
G: -200

a) $E(x)=-2x^2+10x$

b) $K(x)=3{,}5x^2+1000$

c) $G(x)=-0{,}25x^2+2x-200$

d) $E(x)=-0{,}0005x^2+30x$

e) $K(x)=0{,}067x^3-0{,}05x^2+2x+350$

f) $G(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-3x-1500$