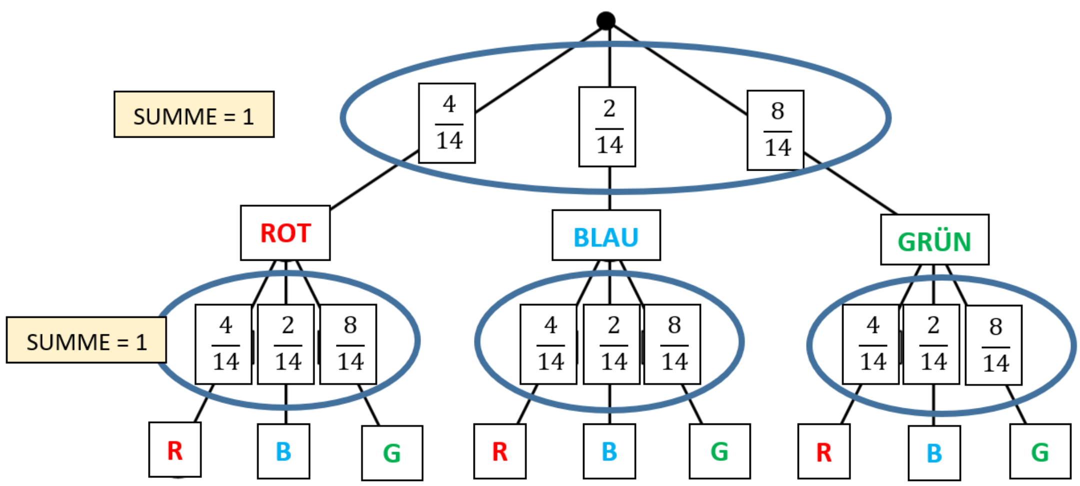
WS2 Wahrscheinlichkeitsrechnung - Grundlagen

Maturaskript AHS (16 Seiten)

Grundkompetenzen:

- **WS 2.1** Grundraum (Menge der möglichen Versuchsausgänge) und Ereignisse in angemessenen Situationen verbal bzw. formal angeben können
- **WS 2.2** relative Häufigkeit als Schätzwert von Wahrscheinlichkeit verwenden und anwenden können
- **WS 2.3** Wahrscheinlichkeiten unter der Verwendung der Laplace-Annahme (Laplace-Wahrscheinlichkeit) berechnen und interpretieren können, Additionsregel und Multiplikationsregel anwenden und interpretieren können
- **Info: WS2.4** Binomialkoeffizient ist im Skript WS3 enthalten!



Prof. Tegischer

Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

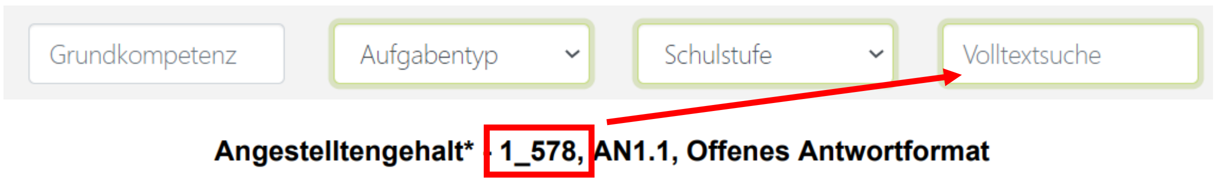
Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=M
2) Gib im Feld „**Volltextsuche**" die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.



Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. 1_578) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**" und „**GeoGebra**" erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**" erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln	**Weitere Regeln für Lehrpersonen**
▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen. ▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen. ▪ Sie dürfen mein Materialen **NICHT** gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden. ▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden. ▪ Bei einem **Missbrauch** erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.	**WICHTIGSTE REGEL:** LehrerInnen dürfen die Materialien in **Ihrem eigenen Unterricht** verwenden: ▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen. ▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben. ▪ Es ist **nicht erlaubt**, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben. ▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialie

WS2 - Wahrscheinlichkeitsrechnung (BASICS)

1. Zufallsversuche

Video

Im täglichen Leben spielen Zufallsversuche eine große Rolle. Sei es bei Brettspielen mit einem Würfel oder bei Glücksspielen im Casino wie das Roulette. Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung können nun für alle möglichen Situationen bzw. Ausgänge die Wahrscheinlichkeiten berechnet werden.

Man spricht von einem **Zufallsversuch**, wenn folgende Eigenschaften erfüllt werden:

- Der Versuch kann beliebig oft unter stets gleichen Bedingungen durchgeführt werden.
- Der Ausgang des Versuchs ist zufällig und kann nicht vorhergesagt werden (wie z.B. beim Würfeln).
- Alle möglichen Ausgänge (= Elementarereignisse) sind zu Beginn des Versuchs klar (Beispiel Würfel: Es sind folgende sechs Zahlen möglich: 1, 2, 3, 4, 5, 6)

Weitere Begriffe:

- Alle möglichen Ausgänge des Versuchs werden **Elementarereignisse** genannt. Die **Grundmenge Ω** fasst **alle Elementarereignisse** zusammen.

Zufallsversuch	Grundmenge Ω
Würfel: Welche Augenzahl wird geworfen?	$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Münze: Welche Ausgänge sind beim Werfen einer Münze möglich?	$\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$
Roulette: Welche Zahl wird beim Roulette gewählt?	$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 36\}$

- Ein **Ereignis** E muss stets eine Teilmenge der Grundmenge sein: $E \subseteq \Omega$. Diese Menge bezeichnet man als Ereignismenge.
  <u>Bemerkung:</u> Ereignisse mit nur einem Element heißen Elementarereignisse. Ereignisse können jedoch auch aus mehreren Elementen bestehen. Dies zeige ich dir anhand des Würfels:

1) Ereignis E_1: Würfeln der Zahl 3 -> Ereignismenge $E_1 = \{3\}$
2) Ereignis E_2: Würfeln einer geraden Zahl -> Ereignismenge $E_2 = \{2,4,6\}$
3) Ereignis E_3: Würfeln einer Zahl, die größer als 2 ist -> Ereignismenge $E_3 = \{3,4,5,6\}$

- Ereignisse können beim Zufallsversuch eintreten bzw. nicht eintreten.
- Zu einem Ereignis E gibt es ein Gegenereignis $\neg E$. Dies entspricht dem logischen Gegenteil.

Würfel	
Ereignis	Gegenereignis
Die Zahl 3 wird gewürfelt. $E_1 = \{3\}$	Die Zahl 3 wird nicht gewürfelt. $\neg E_1 = \{1,2,4,5,6\}$
Eine ungerade Zahl wird gewürfelt. $E_2 = \{1,3,5\}$	Eine gerade Zahl wird gewürfelt. $\neg E_2 = \{2,4,6\}$
Die gewürfelte Zahl ist größer als 2. $E_3 = \{3,4,5,6\}$	Die gewürfelte Zahl ist kleiner als 3 $\neg E_3 = \{1,2\}$

Was fällt dir auf? Die Vereinigungsmenge von der Ereignis-Menge E und Gegenereignis-Menge $\neg E$ ergibt stets die Grundmenge. Es gilt:

$$E \cup \neg E = \Omega$$

Bsp. 1) Ein Würfel wird zweimal geworfen. Der Grundraum Ω besteht aus allen Augenzahlenpaaren. Beschreibe das Ereignis E in Worten.

$E = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$	
$E = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$	
$E = \{(1,3), (3,1)\}$	

Bsp. 2) In einer weiteren Urne befinden sich blaue, grüne und rote Kugeln. Bestimme zuerst den Grundraum Ω bei zweimaligem Ziehen mit Zurücklegen. Modelliere anschließend die Ereignismenge für die gegebenen Ereignisse (bei zwei gezogenen Kugeln mit Zurücklegen):

a. E_1: Es wird mindestens einmal die blaue Kugel gezogen.
b. E_2: Beim zweiten Mal Ziehen soll die grüne Kugel gezogen werden.
c. E_3: Die erst gezogene Kugel ist rot.
d. E_4: Es wird keine rote Kugel gezogen.
e. E_5: Beide Kugeln besitzen dieselbe Farbe.

Beschreibe jeweils das **Gegenereignis** zu den Ereignissen $E_1 - E_5$ zuerst in **Worten**, dann in **Mengenschreibweise**.

Grundraum eines Zufallsversuchs* - 1_377, WS2.1, Offenes Antwortformat

In einer Urne befinden sich zwei Kugeln, die mit den Zahlen 0 bzw. 1 beschriftet sind. Die Kugeln sind – abgesehen von ihrer Beschriftung – nicht unterscheidbar. Aus dieser Urne wird dreimal zufällig eine Kugel gezogen, wobei diese nach jedem Zug wieder in die Urne zurückgelegt wird.
Geben Sie den Grundraum dieses Zufallsversuchs vollständig durch Zahlentripel (x; y; z) an! x, y und z nehmen dabei jeweils die Werte 0 oder 1 an.

Münzwurf* - 1_522, WS2.1, Offenes Antwortformat

Bei einem Zufallsversuch wird eine Münze, die auf einer Seite eine Zahl und auf der anderen Seite ein Wappen zeigt, zweimal geworfen.
Geben Sie alle möglichen Ausfälle (Ausgänge) dieses Zufallsversuchs an! *Wappen* kann dabei mit *W*, *Zahl* mit *Z* abgekürzt werden.

Rote und blaue Kugeln* - 1_425, WS2.1, Lückentext

In einem Behälter befinden sich 15 rote Kugeln und 18 blaue Kugeln. Die Kugeln sind bis auf ihre Farbe nicht unterscheidbar. Es sollen nun in einem Zufallsexperiment zwei Kugeln nacheinander gezogen werden, wobei die erste Kugel nach dem Ziehen nicht zurückgelegt wird und es auf die Reihenfolge der Ziehung ankommt.

Die Buchstaben *r* und *b* haben folgende Bedeutung:

r ... das Ziehen einer roten Kugel
b ... das Ziehen einer blauen Kugel
Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Ein Grundraum *G* für dieses Zufallsexperiment lautet ____①____, und ____②____ ist ein Ereignis.

①		②	
$G = \{r, b\}$	☐	die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine blaue Kugel gezogen wird,	☐
$G = \{(r, r), (r, b), (b, b)\}$	☐	jede Teilmenge des Grundraumes	☐
$G = \{(r, r), (r, b), (b, r), (b, b)\}$	☐	b	☐

Video

2. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff und die Laplace-Wahrscheinlichkeit

In diesem Teil lernst du, wie du die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmen kannst, mit welcher es eintritt.

$P(E)$ ... beschreibt die Wahrscheinlichkeit, mit der das Ereignis E eintritt. Es gilt:

$$\mathbf{0 \leq P(E) \leq 1}$$

Die Wahrscheinlichkeit nimmt stets einen reellen Wert zwischen 0 und 1 an.

- $P(E) = 0$ ... unmögliches Ereignis – das Ereignis tritt nicht ein.
- $P(E) = 1$ ... sicheres Ereignis – das Ereignis tritt immer ein (Ereignismenge = Grundraum)

Laplace-Wahrscheinlichkeit

Voraussetzung im Grundraum Ω:

- **endlich viele Elementarereignisse**
- **alle Elementarereignisse** treten mit **gleicher Wahrscheinlichkeit** ein
  (z.B.: Beim Würfeln ist die Chance eine Augenzahl zu bekommen für alle gleich)

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses wird mit der Laplace-Wahrscheinlichkeit berechnet:

$$P(E) = \frac{Anzahl\ der\ Elemente\ von\ E}{Anzahl\ der\ Elemente\ von\ \Omega} = \frac{Anzahl\ aller\ für\ E\ günstigen\ Fälle}{Anzahl\ aller\ möglichen\ Fälle}$$

Für die Wahrscheinlichkeit $P(\neg E)$ des **Gegenereignisses** $\neg E$ gilt: $$P(\neg E) = 1 - P(E)$$
Bemerkung: Möchtest du die Wahrscheinlichkeit in % angegeben, so musst du das **Ergebnis mit 100 multiplizieren**. z.B. $P(E) = 0{,}3167 = 31{,}67\ \%$

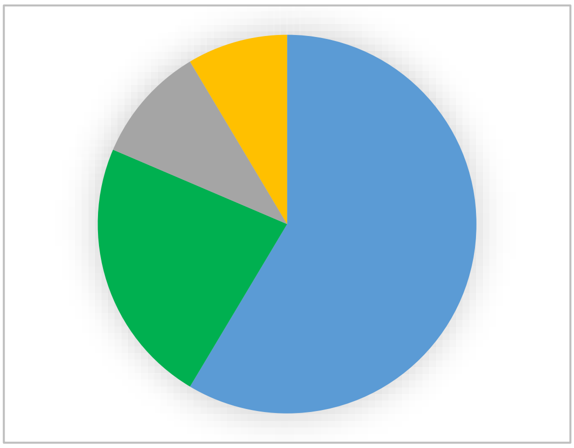
Bsp. 3) Ein Würfel wird einmal geworfen. Berechne jeweils die Wahrscheinlichkeit des gegebenen Ereignisses.

a. E_1: Die Zahl 2 wird gewürfelt.	b. E_2: Eine gerade Zahl wird gewürfelt.
c. E_3: Eine Primzahl wird gewürfelt.	d. E_4: Die Zahl ist größer als 2.

Bsp. 4) Ein Würfel wird zweimal geworfen. Berechne jeweils die Wahrscheinlichkeit des gegebenen Ereignisses. Bestimme zuerst den Grundraum:

a. E_1: Die Summe der Augenzahlen beträgt 7.	b. E_2: Beim ersten Wurf kommt eine 3.
c. E_3: Die Summe der Augenzahlen ist kleiner als 6.	d. E_4: Die beiden Augenzahlen sind gleich.
e. E_5: Es kommt bei den Würfen mindestens einmal die Zahl 3 vor.	f. E_6: Es werden nur Primzahlen gewürfelt.

Bsp. 5) Kann die Wahrscheinlichkeit des gegebenen Glücksrades der grünen Fläche mit Hilfe der Laplace-Wahrscheinlichkeit berechnet werden? Begründe anhand der Definition.



Bsp. 6) In einer Urne befinden sich drei blaue, fünf gelbe, acht schwarze und zwei rote Kugeln.

Verschiedene Ereignisse sind gegeben. Berechne jeweils die Gegenwahrscheinlichkeit.

a. E_1: Es wird eine blaue Kugel gezogen.	b. E_2: Es wird eine gelbe oder rote Kugel gezogen.
c. E_3: Es wird keine schwarze Kugel gezogen.	d. E_4: Es wird keine gelbe oder schwarze Kugel gezogen.

Bsp. 7) Berechne die Wahrscheinlichkeit möglichst intelligent (Tipp: Gegenwahrscheinlichkeit).

a. Ein 6-seitiger Würfel (Augenzahlen 1-6) wird zweimal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der beiden Augenzahlen größer als 3 ist.

b. Ein Würfel (1-6) wird dreimal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe aller Augenzahlen größer als 3 ist. (Bemerkung: Es gibt **216** mögliche Fälle)

Augensumme* - 1_449, WS2.1, Offenes Antwortformat

Zwei unterscheidbare, faire Spielwürfel mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 werden geworfen und die Augensumme wird ermittelt. (Ein Würfel ist „fair“, wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle sechs Seitenflächen gleich groß ist.)
Jemand behauptet, dass die Ereignisse „Augensumme 5“ und „Augensumme 9“ gleichwahrscheinlich sind. Geben Sie an, ob es sich hierbei um eine wahre oder eine falsche Aussage handelt, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Online-Glücksspiel* - 1_521, WS2.2, 1 aus 6

Ein Mann spielt über einen längeren Zeitraum regelmäßig dasselbe Online-Glücksspiel mit konstanter Gewinnwahrscheinlichkeit. Von 768 Spielen gewinnt er 162.
Mit welcher ungefähren Wahrscheinlichkeit wird er das nächste Spiel gewinnen?
Kreuzen Sie den zutreffenden Schätzwert für diese Wahrscheinlichkeit an!

0,162 %	☐
4,74 %	☐
16,2 %	☐
21,1 %	☐
7,68 %	☐
76,6 %	☐

Schätzwert für eine Wahrscheinlichkeit* - 1_801, WS2.2, Halboffenes Antwortformat

Bei einem Würfel mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 ist eine Ecke beschädigt. Deswegen wird angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Augenzahl zu werfen, nicht für alle Augenzahlen gleich hoch ist.
Jemand hat mit dem Würfel zwei Wurfserien mit jeweils 50 Würfen durchgeführt und die absoluten Häufigkeiten der auftretenden Augenzahlen aufgezeichnet. In der nachstehenden Tabelle sind diese Aufzeichnungen zusammengefasst.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit in Wurfserie 1	7	8	7	10	8	10
Häufigkeit in Wurfserie 2	6	9	7	9	10	9

Geben Sie anhand der Ergebnisse der beiden Wurfserien einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit p (in %) an, mit diesem Würfel die Augenzahl 6 zu werfen.

$p =$ ________________________________ %

Schätzwert* - 1_825, WS2.2, Halboffenes Antwortformat

Bei einem bestimmten Zufallsversuch tritt das Ereignis E mit der Wahrscheinlichkeit $P(E)$ auf.
Im Rahmen einer Versuchsreihe wird dieser Zufallsversuch a-mal durchgeführt ($a \in \mathbb{N}$ und $a > 1$). Dabei tritt das Ereignis E insgesamt b-mal auf ($b \in \mathbb{N}$).
Für die unbekannte Wahrscheinlichkeit $P(E)$ soll ein Schätzwert p bestimmt werden.

Geben Sie eine Formel an, mit der p unter Verwendung von a und b berechnet werden kann.

$p =$ ______________________________

Wahrscheinlichkeit für eine Mädchengeburt* - 1_498, WS2.2, Offenes Antwortformat

Im Jahr 2014 wurden in Österreich 42 162 Buben und 39 560 Mädchen geboren.
Geben Sie anhand dieser Daten einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit an, dass ein in Österreich geborenes Kind ein Mädchen ist!

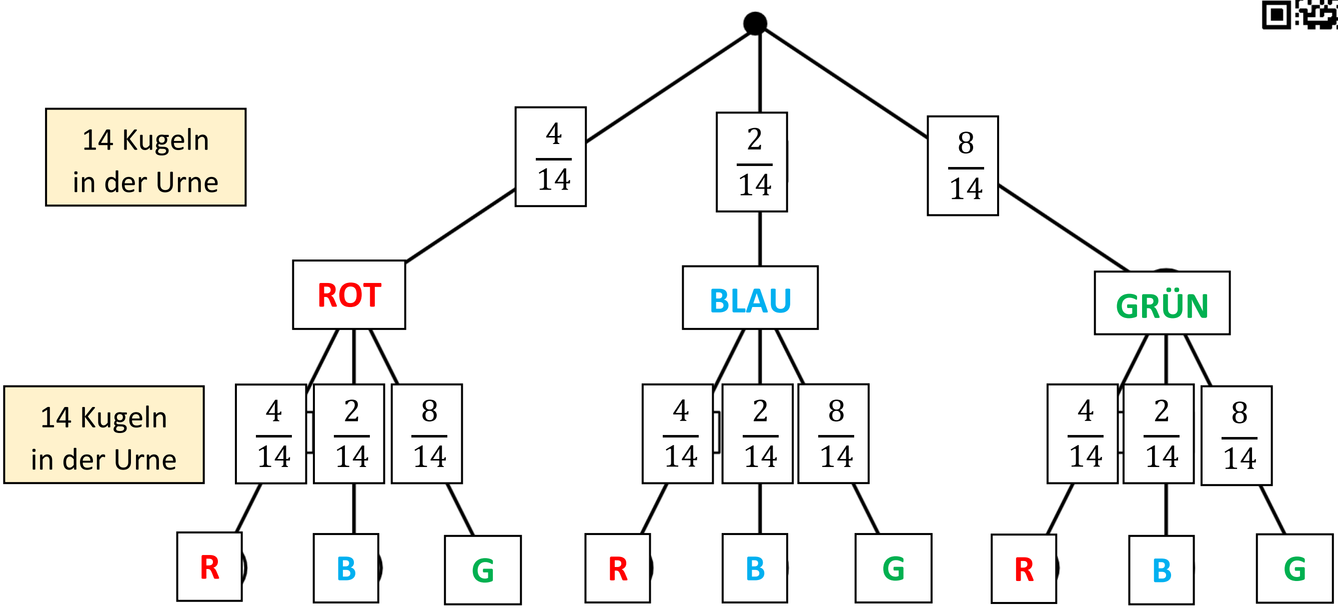
3. Mehrstufige Zufallsversuche mit Baumdiagrammen modellieren

Video

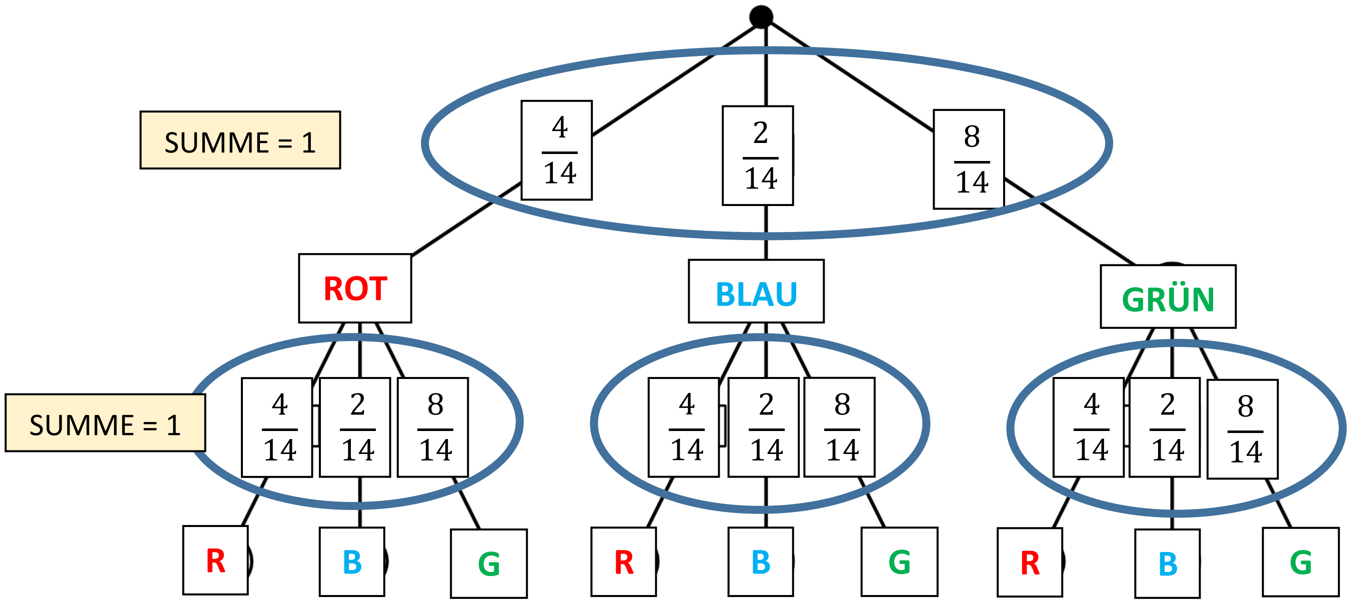
Beispiel: In einer Urne sind vier rote Kugeln, zwei blaue Kugeln und 8 grüne Kugeln.

a. Skizziere ein Baumdiagramm beim Ziehen von zwei Kugeln **mit Zurücklegen** (Wahrscheinlichkeiten bleiben gleich).

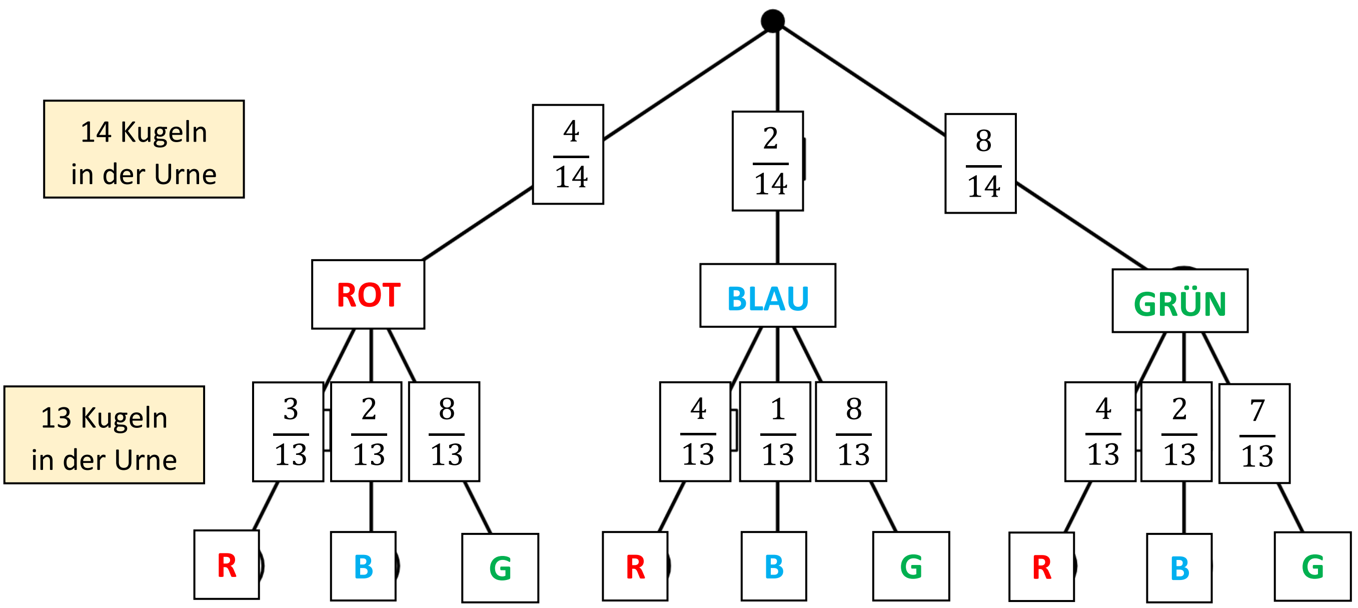
SCAN MICH



Bemerkung: Die Summe aller Verzweigungen jedes einzelnen Zweigs muss stets 1 ergeben:



b. Skizziere ein Baumdiagramm beim Ziehen von zwei Kugeln **ohne Zurücklegen** (Wahrscheinlichkeiten ändern sich, da beim zweiten Ziehen weniger Kugeln sind).

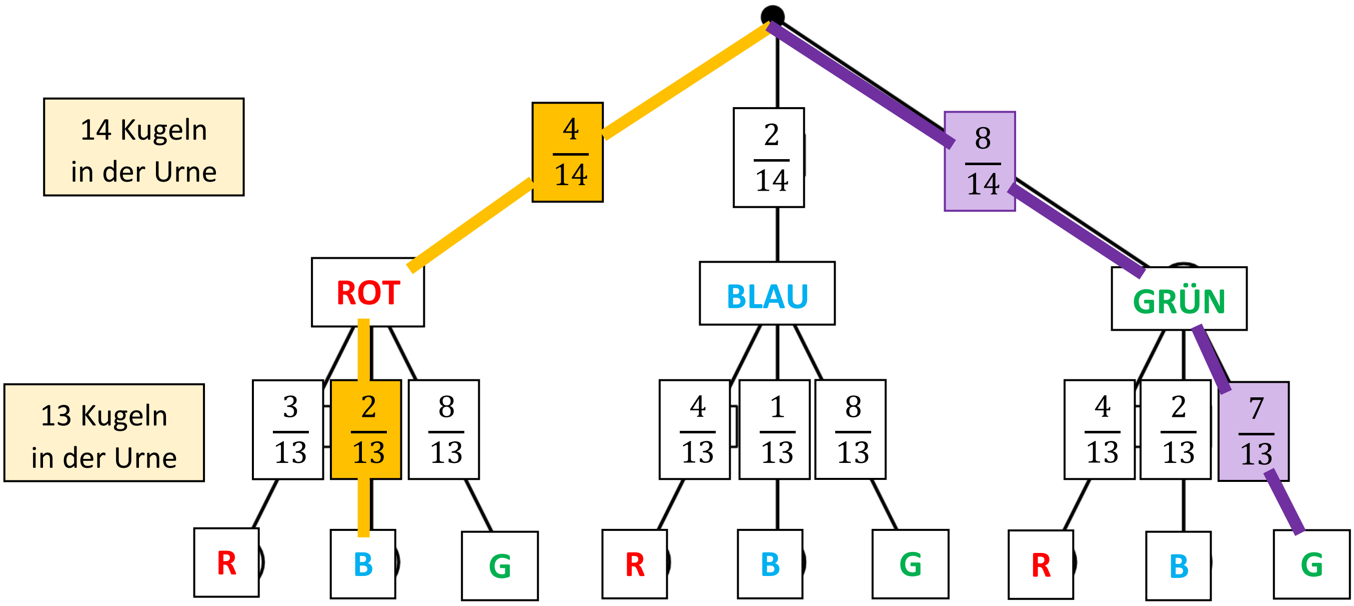


a. Produktregel

Wahrscheinlichkeit eines mehrstufigen Zufallsversuchs = Produkt der Wahrscheinlichkeiten des Pfades

Frage 1: Berechne die Wahrscheinlichkeit, zuerst eine rote Kugel und dann eine blaue Kugel zu ziehen (ohne Zurücklegen).

Frage 2: Berechne die Wahrscheinlichkeit, zwei Mal eine grüne Kugel zu ziehen (ohne Zurücklegen).



Frage 1: $P(rot, blau) = \frac{4}{14} \cdot \frac{2}{13} = \frac{8}{182} \approx 0{,}0439 \approx 4{,}39\ \%$

Frage 2: $P(grün, grün) = \frac{8}{14} \cdot \frac{7}{13} = \frac{56}{182} \approx 0{,}3077 \approx 30{,}77\ \%$

Bsp. 8) In einer Urne befinden sich 8 gelbe Kugeln und 5 rote Kugeln. Es wird dreimal aus der Urne gezogen.

Teil 1: Zeichne zwei Baumdiagramme: Ein Baumdiagramm soll das Ziehen der Kugeln **MIT Zurücklegen** darstellen, eines das Ziehen **OHNE Zurücklegen**.

Teil 2: Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten. Führe stets zwei Berechnungen durch (mit/ohne Zurücklegen).

a. Es wird zuerst eine gelbe, dann eine rote & schließlich noch eine rote Kugel gezogen.
b. Es werden nur rote Kugeln gezogen.
c. Es werden keine roten Kugeln gezogen.

Bsp. 9) In einer Urne befinden sich 12 braune Murmeln, 23 rote Murmeln und 10 violette Murmeln. Es wird zweimal aus der Urne gezogen.

Teil 1: Zeichne zwei Baumdiagramme: Ein Baumdiagramm soll das Ziehen der Murmeln **MIT Zurücklegen** darstellen, eines das Ziehen **OHNE Zurücklegen**.

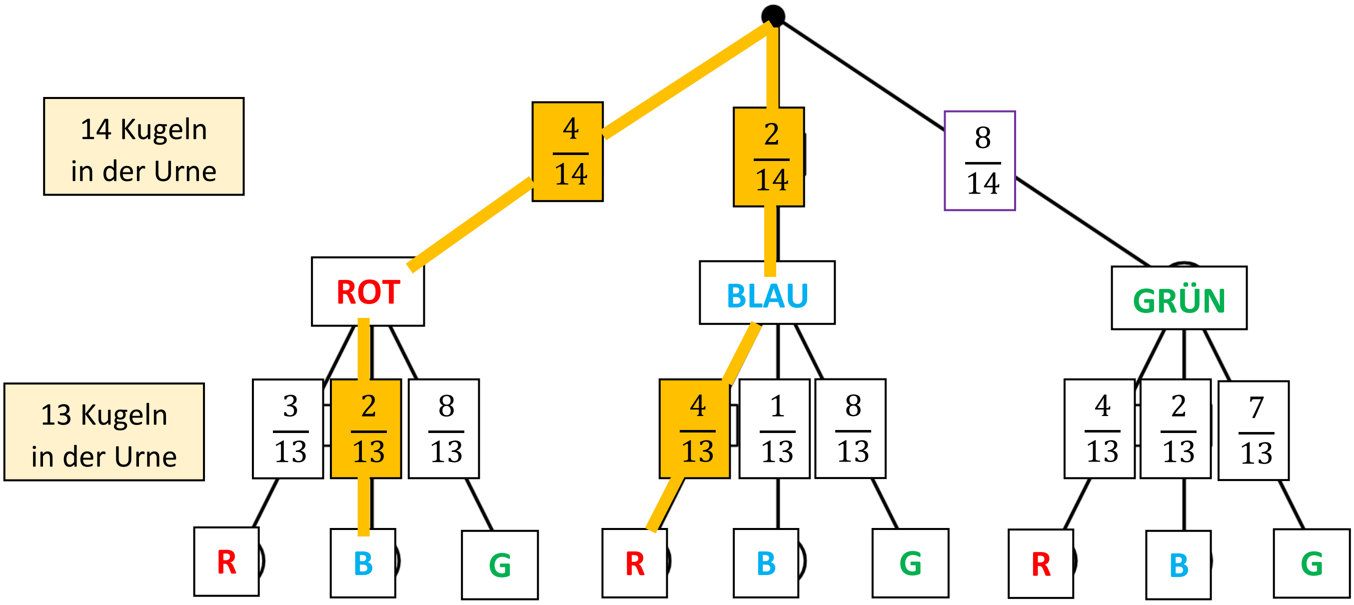
Teil 2: Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten. Führe stets zwei Berechnungen durch (mit/ohne Zurücklegen).

a. Es wird zuerst eine braune & dann eine violette Murmel gezogen.
b. Es werden nur violette gezogen.
c. Es werden keine braunen und keine violetten Kugeln gezogen.

b. Summenregel

Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses eines mehrstufigen Zufallsversuchs
= Summe der Wahrscheinlichkeiten aller passenden Pfade im Baumdiagramm

Frage: Berechne die Wahrscheinlichkeit, genau eine blaue und eine rote Kugel zu ziehen (ohne Zurücklegen).



Bemerkung: Das Ereignis gibt vor, bei zwei Mal Ziehen genau eine rote und eine blaue zu bekommen. Betrachtet man das Baumdiagramm, so gibt es zwei mögliche Pfade, die uns dieses Ereignis liefern. Warum gibt es zwei Pfade? Man kann zuerst rot und dann blau ziehen, aber auch umgekehrt (zuerst blau, dann rot).

Zur Berechnung muss man die Rechenregeln für Baumdiagramme anwenden. Zuerst die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Pfade durch Multiplizieren berechnen (**Produktregel**). Anschließend werden die **erhaltenen Wahrscheinlichkeiten addiert**.

$$P(eine\ rote\ Kugel, eine\ blaue\ Kugel) = P(rot, blau) + P(blau, rot)$$

- $P(rot, blau) = \frac{4}{14} \cdot \frac{2}{13} = \frac{8}{182} \approx 0{,}0439$
- $P(blau, rot) = \frac{2}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{8}{182} \approx 0{,}0439$

$$\rightarrow P(eine\ rote\ Kugel, eine\ blaue\ Kugel) = 0{,}0439 + 0{,}0439 = 0{,}0878 = 8{,}78\%$$

Bsp. 10) In einer Urne befinden sich 4 gelbe Kugeln und 6 rote Kugeln. Es wird dreimal aus der Urne gezogen.

Teil 1: Zeichne zwei Baumdiagramme: Ein Baumdiagramm soll das Ziehen der Kugeln MIT Zurücklegen darstellen, eines das Ziehen OHNE Zurücklegen.

Teil 2: Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten. Führe stets zwei Berechnungen durch (mit/ohne Zurücklegen).

a. Es werden zwei gelbe und eine rote Kugel gezogen.
b. Es werden mindestens zwei gelbe Kugeln gezogen.
c. Es wird maximal eine gelbe Kugel gezogen.

Bsp. 11) In einer Klasse mit 18 Schülern sind 6 Mädchen und 12 Jungen. Bei einer Stundenwiederholung wählt der Lehrer nach dem Zufallsprinzip drei verschiedene SchülerInnen aus (Bemerkung: bei der zweiten Wiederholung kann die erste Person nicht mehr drankommen).

Stelle diese Situation mit Hilfe eines **Baumdiagramms** dar.

Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:

a. Von drei SchülerInnen ist genau ein Junge dabei.
b. Es kommenden mindestens zwei Jungen dran.
c. Es kommt genau ein Mädchen dran.

Bsp. 12) Bei einer Prüfung werden vier Multiple-Choice Fragen gestellt. Bei jeder Frage gibt es drei Antwortmöglichkeiten. Lorenz hat nichts gelernt und markiert jede Antwort nach Zufall.

Stelle diesen Sachverhalt mit Hilfe eines vierstufigen Baumdiagramms dar. Pro Stufe soll es je zwei Äste mit „RICHTIG“ oder „FALSCH“ geben.

Lorenz besteht, wenn er mehr als die Hälfte der Fragen richtig beantwortet. Berechne die Wahrscheinlichkeit für eine positive Note.

Bsp. 13) Beim Nachtfahrzug von Graz nach St. Anton am Arlberg fahren erfahrungsgemäßig ca. ein Achtel aller Fahrgäste ohne gültigem Fahrschein. Drei zufällig gewählte Fahrgäste werden nacheinander kontrolliert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (unter dieser Annahme!), dass

a. alle Fahrgäste einen gültigen Fahrschein haben?
b. nur ein Fahrgast einen gültigen Fahrschein besitzt?
c. maximal eine Person schwarz fährt?

Bsp. 14) Beim Spiel Mensch-Ärgere-Dich-Nicht möchte Marie wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit sie ihre Spielfigur auf das Spielfeld stellen darf. Beachte dazu die Spielregeln: Beim Einwürfeln hat man drei Versuche, um mit einem Würfel einen Sechser zu bekommen. Bemerkung: Gelingt dir ein Sechser bereits im ersten oder zweiten Versuch, so brauchst du nicht mehr weiterwürfeln. Skizziere die Pfade in einem Baumdiagramm und berechne die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Video

SCAN MICH

4. Mehrstufige Zufallsversuche ohne bzw. mit vereinfachten Baumdiagrammen lösen

Wird der Zufallsversuch oft wiederholt, so ist die Darstellung mit Hilfe eines Baumdiagramms sehr aufwendig. In diesen Fällen ist es sinnvoll, die Aufgabe sich in einem vereinfachten Baumdiagramm zu skizzieren oder die Schritte/Wahrscheinlichkeiten sich im Kopf zu überlegen. Die Rechenregeln für Baumdiagramme werden dabei intuitiv angewendet.

Beispiel: Ein Würfel wird sechs Mal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sechs Mal ein Fünfer kommt.

Lösung: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mal ein Fünfer kommt ist $\frac{1}{6}$. Bei sechs Würfen würde dies einem Baumdiagramm mit sechs Stufen entsprechen, wobei wir bei jeder Stufe mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$ einen Fünfer erhalten. Mit Hilfe der Produktregel können wir die Wahrscheinlichkeit berechnen:

$$P(6\,Fünfer) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^6 = 0{,}0000214 = 0{,}00214\,\%$$

Bsp. 15) In einem Kindergarten wird das Spiel „Mensch-Ärgere-Dich-Nicht“ gespielt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Robin in den ersten fünf Versuchen keinen Sechser würfelt. Im sechsten Versuch gelingt es ihm. Zeichne ein vereinfachtes Baumdiagramm auf (nur einen Pfad!).

Bsp. 16) Ein Würfel wird fünf Mal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass

a. fünf Mal ein Zweier gewürfelt wird.
b. Kein einziges Mal eine Primzahl gewürfelt wird.

Bsp. 17) In einer großen Taschenrechner-Lieferung sind von 200 Geräten 10 defekt. Es werden zufällig zehn verschiedene Taschenrechner ausgewählt. Berechne die Wahrscheinlichkeit,

a. dass alle ausgewählten Taschenrechner in Ordnung sind.
b. dass mindestens ein Taschenrechner defekt ist.

Bsp. 18) In einem Aufgabenpool sind 124 Fragen enthalten. Sarah kann davon aber nur 27 beantworten. Zu einer Prüfung kommen 11 Aufgaben. Berechne die Wahrscheinlichkeit,

a. dass Sarah keine Frage bei der Prüfung beantworten kann.
b. dass Sarah mindestens eine Frage nicht beantworten kann.

Adventkalender* - 1_353, WS2.3, Offenes Antwortformat

In einem Adventkalender wurden versehentlich 4 der 24 vorhandenen Fenster nicht befüllt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie beim Öffnen des dritten Fensters das erste leere Fenster vorfinden!

Alarmanlagen* - 1_546, WS2.3, Offenes Antwortformat

Eine bestimmte Alarmanlage löst jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 0,9 im Einbruchsfall Alarm aus.
Eine Familie lässt zwei dieser Anlagen in ihr Haus so einbauen, dass sie unabhängig voneinander Alarm auslösen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass im Einbruchsfall mindestens eine der beiden Anlagen Alarm auslöst!

Augensumme beim Würfeln* - 1_424, WS2.3, Halboffenes Antwortformat

Zwei unterscheidbare, faire Würfel mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 werden gleichzeitig geworfen und die Augensumme wird ermittelt. Das Ereignis, dass die Augensumme durch 5 teilbar ist, wird mit E bezeichnet. (Ein Würfel ist „fair“, wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle sechs Seitenflächen gleich groß ist.)
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E!

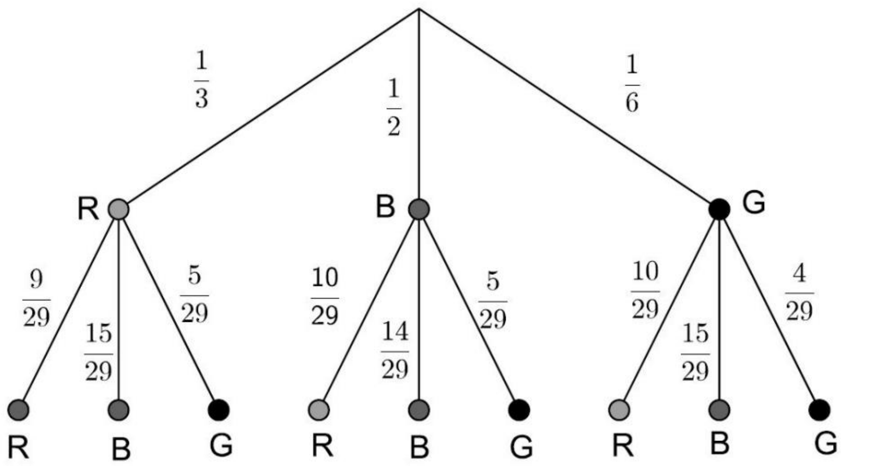
$P(E) =$ ___________________________

Basketball* - 1_755, WS2.3, Offenes Antwortformat

Martin und Sebastian werfen beim Basketball nacheinander je einmal in Richtung des Korbes. Martin trifft mit der Wahrscheinlichkeit 0,7 in den Korb und Sebastian trifft mit der Wahrscheinlichkeit 0,8 (unabhängig davon, ob Martin getroffen hat) in den Korb.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei genau einer der beiden Spieler in den Korb trifft.

Baumdiagramm* - 1_376, WS2.3, Offenes Antwortformat

In einem Gefäß befinden sich rote, blaue und grüne Kugeln. Es werden zwei Kugeln gezogen. Das folgende Baumdiagramm veranschaulicht die möglichen Ergebnisse des Zufallsversuchs:



R = rote Kugel
B = blaue Kugel
G = grüne Kugel
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Kugeln gleicher Farbe gezogen werden!

Gummibären* - 1_634, WS2.3, Offenes Antwortformat

In einer Packung befinden sich 50 Gummibären. Von diesen sind 20 rot, 16 weiß und 14 grün. Ein Kind entnimmt mit einem Griff drei Gummibären, ohne dabei auf die Farbe zu achten. Geben Sie unter der Voraussetzung, dass jeder Gummibär mit der gleichen Wahrscheinlichkeit entnommen wird, die Wahrscheinlichkeit an, dass mindestens einer der drei entnommenen Gummibären rot ist!

Hausübungskontrolle* - 1_328, WS2.3, Offenes Antwortformat

Eine Lehrerin wählt am Beginn der Mathematikstunde nach dem Zufallsprinzip 3 Schüler/innen aus, die an der Tafel die Lösungsansätze der Hausübungsaufgaben erklären müssen. Es sind 12 Burschen und 8 Mädchen anwesend.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass für das Erklären der Lösungsansätze 2 Burschen und 1 Mädchen ausgewählt werden!

Jetons* - 1_682, WS2.3, Offenes Antwortformat

In zwei Schachteln befindet sich Spielgeld.
In Schachtel I sind fünf 2-Euro-Jetons und zwei 1-Euro-Jetons.
In Schachtel II sind vier 2-Euro-Jetons und fünf 1-Euro-Jetons.
Aus jeder der beiden Schachteln wird unabhängig voneinander je ein Jeton entnommen.
Dabei hat pro Schachtel jeder Jeton die gleiche Wahrscheinlichkeit, entnommen zu werden.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass nach der Entnahme der beiden Jetons in beiden Schachteln der gleiche Geldbetrag vorhanden ist!

Mehrere Wahrscheinlichkeiten* - 1_401, WS2.3, 2 aus 5

In einer Unterrichtsstunde sind 15 Schülerinnen und 10 Schüler anwesend. Die Lehrperson wählt für Überprüfungen nacheinander zufällig drei verschiedene Personen aus dieser Schulklasse aus. Jeder Prüfling wird nur einmal befragt.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Lehrperson drei Schülerinnen auswählt, kann mittels $\frac{15}{25} \cdot \frac{14}{25} \cdot \frac{13}{25}$ berechnet werden.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Lehrperson als erste Person einen Schüler auswählt, ist $\frac{10}{25}$.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Lehrperson bei der Wahl von drei Prüflingen als zweite Person eine Schülerin auswählt, ist $\frac{24}{25}$.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Lehrperson drei Schüler auswählt, kann mittels $\frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} \cdot \frac{8}{23}$ berechnet werden.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den von der Lehrperson ausgewählten Personen genau zwei Schülerinnen befinden, kann mittels $\frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} \cdot \frac{23}{23}$ berechnet werden.	☐

Gewitter (a) - 2_065, WS2.3, Offenes Antwortformat

a) In drei verschiedenen Städten – *A*, *B* und *C* – werden am Nachmittag laut Wetterprognose unabhängig voneinander mit folgenden Wahrscheinlichkeiten Gewitter auftreten:

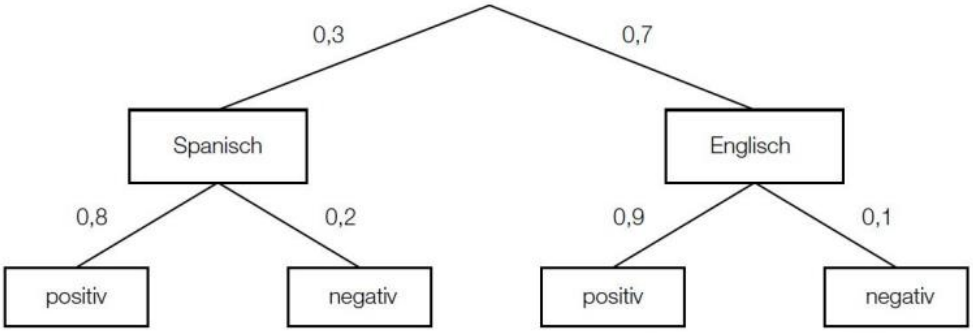
Stadt	*A*	*B*	*C*
Wahrscheinlichkeit für ein Gewitter	50 %	80 %	80 %

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in mindestens einer der drei Städte kein Gewitter auftreten wird.

Prüfung* - 1_610, WS2.3, Offenes Antwortformat

Um ein Stipendium für einen Auslandsaufenthalt zu erhalten, mussten Studierende entweder in Spanisch oder in Englisch eine Prüfung ablegen.

Im nachstehenden Baumdiagramm sind die Anteile der Studierenden, die sich dieser Prüfung in der jeweiligen Sprache unterzogen haben, angeführt. Zudem gibt das Baumdiagramm Auskunft über die Anteile der positiven bzw. negativen Prüfungsergebnisse.



Der Prüfungsakt einer/eines angetretenen Studierenden wird zufällig ausgewählt.

Deuten Sie den Ausdruck $0{,}7 \cdot 0{,}9 + (1 - 0{,}7) \cdot 0{,}8$ im gegebenen Kontext!

Rot-Grün-Sehschwäche* - 1_658, WS2.3, Offenes Antwortformat

Eine der bekanntesten Farbfehlsichtigkeiten ist die Rot-Grün-Sehschwäche. Wenn jemand davon betroffen ist, dann ist diese Fehlsichtigkeit immer angeboren und verstärkt oder vermindert sich nicht im Laufe der Zeit. Von ihr sind weltweit etwa 9 % aller Männer und etwa 0,8 % aller Frauen betroffen. Der Anteil von Frauen an der Weltbevölkerung liegt bei 50,5 %.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass eine nach dem Zufallsprinzip ausgewählte Person eine Rot-Grün-Sehschwäche hat!

Sektoren eines Glücksrads* - 1_899, WS2.3, Offenes Antwortformat

Ein bestimmtes Glücksrad hat drei unterschiedlich große Sektoren. Einer dieser Sektoren ist grün markiert, einer ist rot markiert und einer ist gelb markiert.
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger des Glücksrads nach einer Drehung auf den gelben Sektor zeigt, beträgt für jede Drehung des Glücksrads (unabhängig von den vorangegangenen Drehungen) konstant p.

Beschreiben Sie ein mögliches Ereignis im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit durch $(1 - p)^3$ berechnet werden kann.

Spielwürfel* - 1_706, WS2.3, Halboffenes Antwortformat

Bei einem Spiel kommt ein Würfel mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 zum Einsatz. Der Würfel wird dreimal geworfen. Für jeden Wurf gilt: Jede der Augenzahlen tritt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf wie jede der anderen Augenzahlen.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit p dafür an, dass man beim dritten Wurf eine durch 3 teilbare Augenzahl würfelt!

$p =$ ______________________________

Würfeln* - 1_144, WS2.3, Zuordnungsformat

Ein idealer sechsseitiger Würfel mit den Augenzahlen 1 bis 6 wird einmal geworfen.

Ordnen Sie den Fragestellungen in der linken Spalte die passenden Wahrscheinlichkeiten in der rechten Spalte zu!

Fragestellung	
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine gerade Zahl gewürfelt wird?	
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl größer als 4 gewürfelt wird?	
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl kleiner als 2 gewürfelt wird.	
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl größer als 1 und kleiner als 6 gewürfelt wird?	

Wahrscheinlichkeit	
A	$\frac{1}{3}$
B	$\frac{1}{6}$
C	$\frac{1}{2}$
D	1
E	$\frac{5}{6}$
F	$\frac{2}{3}$

Ziehungswahrscheinlichkeit* - 1_730, WS2.3, Halboffenes Antwortformat

In einem Behälter befinden sich fünf Kugeln. Zwei Kugeln werden nacheinander ohne Zurücklegen gezogen (dabei wird angenommen, dass jede Ziehung von zwei Kugeln die gleiche Wahrscheinlichkeit hat). Zwei der fünf Kugeln im Behälter sind blau, die anderen Kugeln sind rot. Mit p wird die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, beim zweiten Zug eine blaue Kugel zu ziehen.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit p an.

$p =$ ______________________________