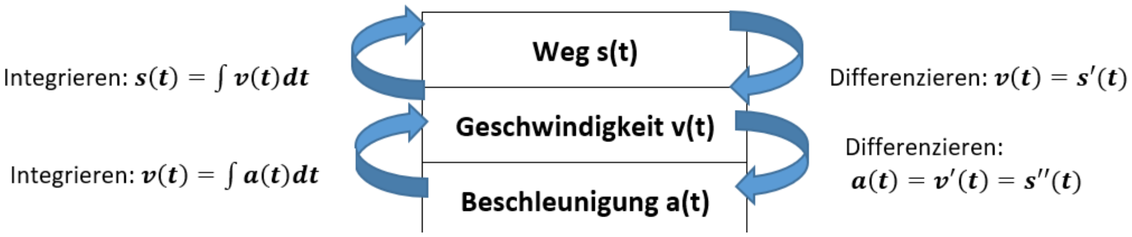
Bewegungsaufgaben

Weg – Geschwindigkeit – Beschleunigung

Maturaskript BHS – Teil A (22 Seiten)



Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Prof. Tegischer

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM
2) Gib im Feld „**Volltextsuche**" die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. A_263) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**" und „**GeoGebra**" erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**" erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln	**Weitere Regeln für Lehrpersonen**
▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen. ▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen. ▪ Sie dürfen mein Materialen **NICHT** gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden. ▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden. ▪ Bei einem **Missbrauch** erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.	**WICHTIGSTE REGEL:** LehrerInnen dürfen die Materialien in **Ihrem eigenen Unterricht** verwenden: ▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen. ▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben. ▪ Es ist **nicht erlaubt**, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben. ▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

Video 1

Weg – Geschwindigkeit – Beschleunigung

Integrieren: $\boldsymbol{s(t) = \int v(t)dt}$

Weg s(t)

Differenzieren: $\boldsymbol{v(t) = s'(t)}$

Geschwindigkeit v(t)

Integrieren: $\boldsymbol{v(t) = \int a(t)dt}$

Differenzieren: $\boldsymbol{a(t) = v'(t) = s''(t)}$

Beschleunigung a(t)

Funktionen:

- $s(t)$ ... gibt den zurückgelegten Weg nach t Sekunden/Minuten/Stunden an!
  $Einheiten: m, km$
- $v(t)$ ... gibt die (momentane) Geschwindigkeit nach t Sekunden/Minuten/Stunden an!
  $Einheiten: \frac{m}{s}; \frac{km}{h}$ Umrechnung: $1\frac{m}{s} = 3{,}6\frac{km}{h}$
- $a(t)$ ... gibt die (momentane) Beschleunigung nach t Sekunden/Minuten/Stunden an!
  $Einheit: \frac{m}{s^2}$

Wiederholung Differentialrechnung	
$\boldsymbol{s(t)}$ ... gibt den **zurückgelegten Weg** nach t Sekunden/Minuten/Stunden an	$s(5) = 100m\ (t\ in\ Sekunden)$ Nach 5 Sekunden wurden 100 Meter zurückgelegt.
$\bar{v}(t_1, t_2) = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$ ... gibt die **mittlere Geschwindigkeit** im Intervall $[t_1; t_2]$ an	$\bar{v}(1{,}4) = \frac{s(4)-s(1)}{4-1} = 10\frac{m}{s}$ Im Zeitintervall $[1; 4]$ (=zwischen erster und vierter Sekunde) beträgt die mittlere Geschwindigkeit $10\frac{m}{s}$
$\boldsymbol{v(t) = s'(t)}$ ... gibt die **momentane Geschwindigkeit** zum Zeitpunkt t an	$v(5) = 12\frac{m}{s}$ Nach 5 Sekunden beträgt die momentane Geschwindigkeit $12\frac{m}{s}$.
$\bar{a}(t_1, t_2) = \frac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1}$ ... gibt die **mittlere Beschleunigung** im Intervall $[t_1; t_2]$ an	$\bar{a}(1{,}4) = \frac{v(4)-v(1)}{4-1} = 3\frac{m}{s^2}$ Im Zeitintervall $[1; 4]$ (=zwischen erster und vierter Sekunde) beträgt die mittlere Beschleunigung $3\frac{m}{s^2}$
$\boldsymbol{a(t) = v'(t) = s''(t)}$ ... gibt die **momentane Beschleunigung** zum Zeitpunkt t an	$a(5) = 3\frac{m}{s^2}$ Nach 5 Sekunden beträgt die momentane Beschleunigung $3\frac{m}{s^2}$

Bsp. 1) Gegeben ist eine Wegfunktion $s(t) = -2t^4 + 8t^3$ eines Körpers $(s\ in\ m, t\ in\ sek), D = [0; 4]$

- **a.** Bestimme die **mittlere Geschwindigkeit** im Intervall [0;1].
- **b.** Bestimme die **momentane Geschwindigkeit** nach 1 Sekunde.
- **c.** Bestimme den **zurückgelegten Weg** nach 3 Sekunden.
- **d.** Bestimme die **maximale Geschwindigkeit** mit Hilfe der Differentialrechnung. Zeige nachweislich, dass es sich um ein Maximum handelt.
- **e.** Berechne die **mittlere Beschleunigung** im Intervall [0;2].
- **f.** Ermittle, nach wie vielen Sekunden der Körper zum ersten Mal die 40 Meter-Marke erreicht.
- **g.** Ermittle, nach wie vielen Sekunden der Körper mit einer Geschwindigkeit von $10\frac{m}{s}$ unterwegs ist.

Integralrechnung:

I. Unbestimmte Integrale:

Video 2

Die unbestimmten Integrale liefern jeweils die Stammfunktionen der Funktionen:

$$v(t) = \int a(t)\,dt \qquad\qquad s(t) = \int v(t)\,dt$$

Dabei ist zu beachten, dass es eine Integrationskonstante gibt. Bei der Geschwindigkeit wird diese mit $\boldsymbol{v_0}$ bezeichnet (=Anfangsgeschwindigkeit). Beim Weg mit $\boldsymbol{s_0}$ (= Anfangsweg, Anfangshöhe).

Beispiel ($\boldsymbol{v_0 = 3\frac{m}{s}, s_0 = 0m}$):

- $a(t) = 5\frac{m}{s^2}$
- $v(t) = \int 5\,dt = 5t + v_0 = 5t + 3$
- $s(t) = \int (5t+3)dt = 5\frac{t^2}{2} + 3t + s_0 = \frac{5}{2}t^2 + 3t$

Bsp. 2) Gegeben ist eine Beschleunigungsfunktion, die Anfangsgeschwindigkeit v_0 & der zurückgelegte Weg s_0 bei $t = 0$. $(a(t)\ in \frac{m}{s^2}, t\ in\ sek)$

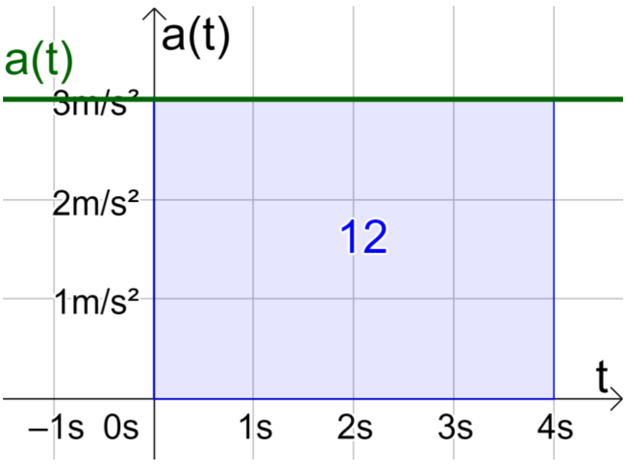
a. Stelle die Funktionsgleichungen $v(t)$ und $s(t)$ auf.
b. Bestimme die mittlere Beschleunigung und mittlere Geschwindigkeit im Intervall $[2; 5]$.

a. $a(t) = 4 \quad v_0 = 5\frac{m}{s}, s_0 = 0\,m$	b. $a(t) = 2t + 1 \quad v_0 = 0\frac{m}{s}, s_0 = 0\,m$
c. $a(t) = 0{,}05t^2 - t + 4 \quad v_0 = 3\frac{m}{s}, s_0 = 0\,m$	d. $a(t) = 10t + 10 \quad v_0 = 10\frac{m}{s}, s_0 = 1\,000\,m$

II. Bestimmte Integrale:

Video 3

Die Fläche (=bestimmtes Integral) unter dem Beschleunigungsgraphen entspricht der Geschwindigkeitsänderung im gegebenen Intervall.



$$a(t) = 3$$

Bestimme $\int_0^4 a(t)\,dt$ auf zwei Arten. Interpretiere im Kontext.

a. Bestimmtes Integral

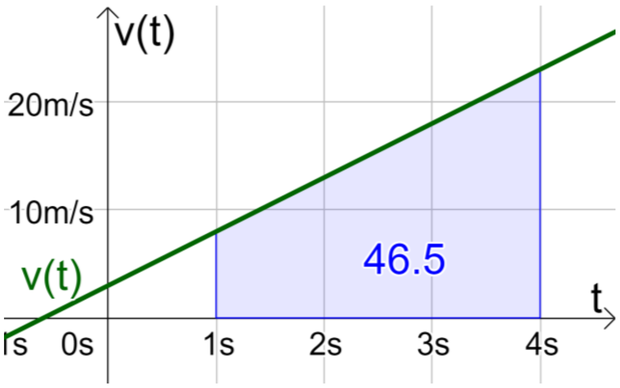
$$\int_0^4 3\,dt = 3t + c\,\Big|_0^4 = 12 + c - (0 + c) = 12\frac{m}{s}$$

b. Flächeninhaltsberechnung (Rechteck)

$$\int_0^4 4\,dt = 4\cancel{s} \cdot 3\frac{m}{s^{\cancel{2}}} = 12\frac{m}{s}$$

Die Geschwindigkeitsänderung in den ersten vier Sekunden beträgt $12\frac{m}{s}$. Um $12\frac{m}{s}$ wird der Körper schneller.

Die Fläche (=bestimmtes Integral) unter dem Geschwindigkeitsgraphen entspricht dem zurückgelegten Weg im gegebenen Intervall.



$$v(t) = 5t + 3$$

Bestimme $\int_1^4 v(t)\,dt$. Interpretiere im Kontext.

$$\int_1^4 v(t)\,dt = \int_1^4 (5t + 3)dt = \left(5\frac{t^2}{2} + 3t\right)\Big|_1^4 =$$

$$= 52 - 5{,}5 = 46{,}5\,m$$

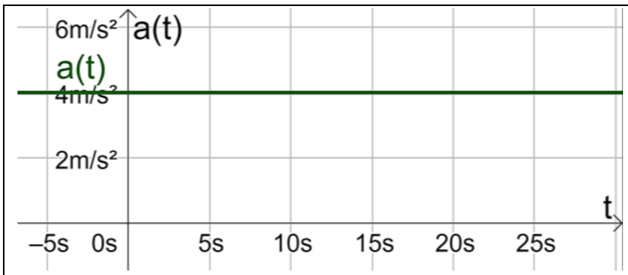
Die Wegänderung im Intervall [1;4] beträgt $46{,}5m$. In diesem Intervall wurden 46,5m zurückgelegt.

Bsp. 3) Interpretiere folgende Ausdrücke ($s(t)$ *in Meter*, t *in Sekunden*)

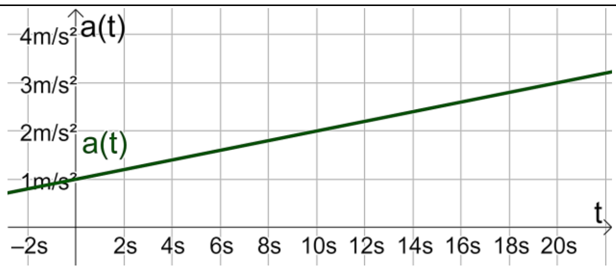
- $a(5)$ …
- $v'(3) = 7\frac{m}{s^2}$
- $\frac{s(7)-s(4)}{7-4}$ …
- $\frac{s'(8)-s'(5)}{3} = 2\frac{m}{s^2}$
- $\int a(t)\,dt$ …
- $\int_2^4 v(t)\,dt$ …
- $\frac{\int_1^4 a(t)\,dt}{4-1}$…

- $s(8) = 100m$
- $s'(8)$ …
- $\frac{\int_1^7 v(t)\,dt}{6}$…
- $\int v(t)\,dt$ …
- $\frac{v(2)-v(1)}{1}$ …
- $v(7)$ …
- $\int_3^4 a(t)\,dt = 12\frac{m}{s}$
- $s(8) - s(5)$ …
- $v(8) - v(5)$ …
- $a(8) - a(5)$ …

Bsp. 4) Gegeben ist der Graph einer Beschleunigungsfunktion. Bestimme das gesuchte bestimmte Integral. Interpretiere den Ausdruck.

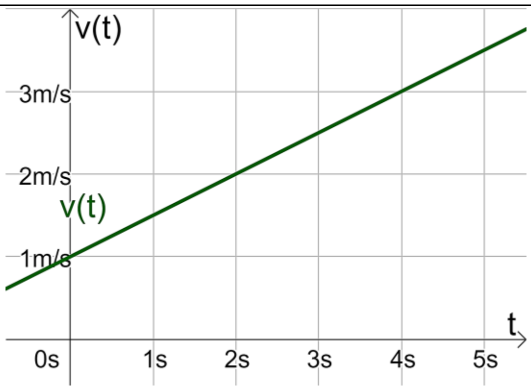


$\int_0^{25} a(t)\,dt$

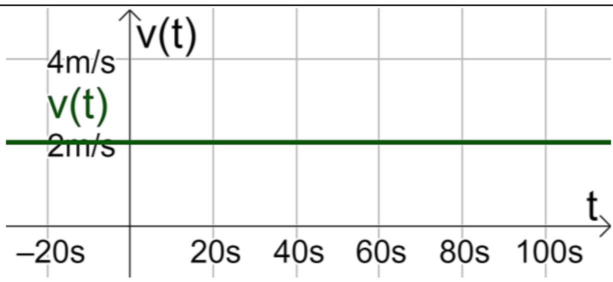


$\int_0^{20} a(t)\,dt$

Bsp. 5) Gegeben ist der Graph einer Geschwindigkeitsfunktion. Bestimme das gesuchte bestimmte Integral. Interpretiere den Ausdruck.

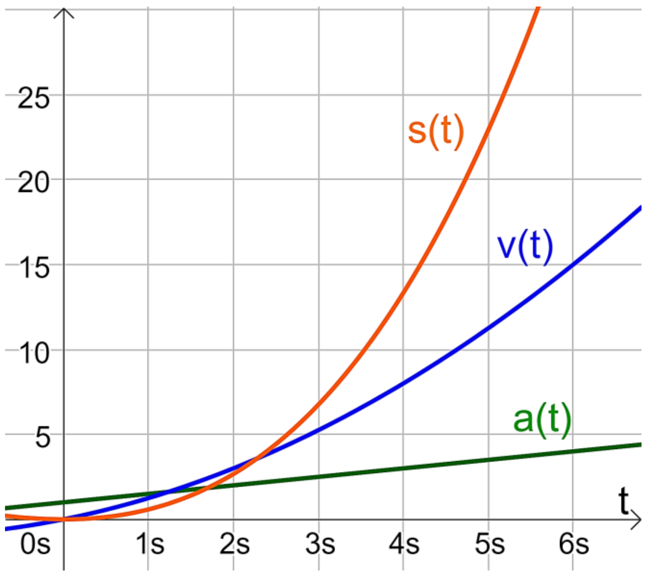


$\int_0^{4} v(t)\,dt$



$\int_0^{100} v(t)\,dt$

Bsp. 6) Gegeben sind die Graphen $s(t), v(t), a(t)$. (Zeit in Sekunden, Weg in Meter)



Bestimme näherungsweise und interpretiere im Kontext.

a. $\int_0^5 v(t)\,dt$

b. $\int_2^6 a(t)\,dt$

c. $\frac{\int_2^3 a(t)\,dt}{3-2}$

d. $\frac{\int_1^4 v(t)\,dt}{4-1}$

Bsp. 7) Die Geschwindigkeit eines bremsenden Autos wird mit Hilfe einer Funktion $v(t)$ im Zeitintervall $[0; t_2]$ modelliert (v(t) in m/s, t in sek). Zum Zeitpunkt t_2 kommt das Auto zum Stehen. Berechne den Bremsweg des Autos.

a. $v(t) = 3t^2 - 19{,}5t + 30 \quad [0; 2{,}5]$	**b.** $v(t) = 0{,}2t^2 - 2t + 4{,}2 \quad [0; 3]$

Bsp. 8) Gegeben ist eine Beschleunigungsfunktion, die Anfangsgeschwindigkeit v_0 & der zurückgelegte Weg s_0 bei $t = 0$ eines Körpers. $(a(t)\ in \frac{m}{s^2}, t\ in\ sek)$

Video 4

i. Bestimme den zurückgelegten Weg des Körpers im Intervall [3,8].
ii. Gib die momentane Geschwindigkeit nach 10 Sekunden an.
iii. Wie lang dauert es, bis der Körper 1000 Meter zurückgelegt hat?
iv. Bestimme die Geschwindigkeitsänderung zwischen der 2. & 5. Sekunde.
v. Wann bewegt sich der Körper mit einer Geschwindigkeit von 100 m/s?

a. $a(t) = 4t + 4 \quad v_0 = 5\frac{m}{s}, s_0 = 0\ m$	**b.** $a(t) = t^2 + 2t \quad v_0 = 0\frac{m}{s}, s_0 = 0\ m$

Bsp. 9) Die Beschleunigungsfunktion $a(t)$ ($a(t)$ in m/s², t in sek) beschreibt das Starten eines Autos aus dem Stand ($v_0 = 0\frac{m}{s}, s_0 = 0m$). Die Funktionen werden bis zum Zeitpunkt des Erreichens der Höchstgeschwindigkeit betrachtet.

Video 5

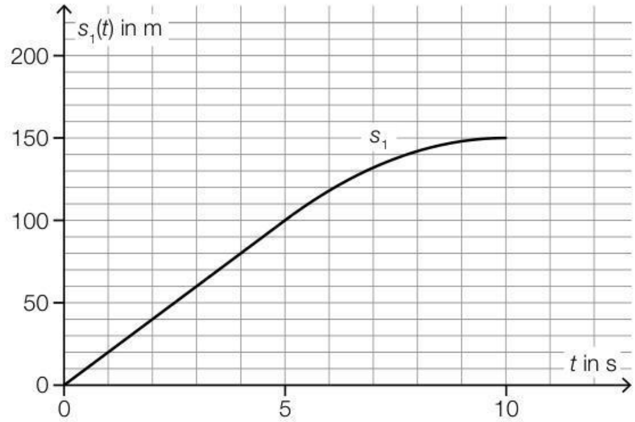
i. Bestimme den Zeitpunkt, wann das Auto die Höchstgeschwindigkeit erreicht. Gib die Höchstgeschwindigkeit an.
ii. Berechne den zurückgelegten Weg bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit.

a. $a(t) = 0{,}4t^2 - 9{,}2t + 52$	**b.** $a(t) = 0{,}005t^2 - 0{,}405t + 8{,}2$

Testfahrten * (A_326)

Auf drei Teststrecken werden Testfahrten mit Autos durchgeführt.

a) Eine bestimmte Testfahrt auf der ersten Teststrecke kann modellhaft durch die nachstehend dargestellte Weg-Zeit-Funktion s_1 beschrieben werden.

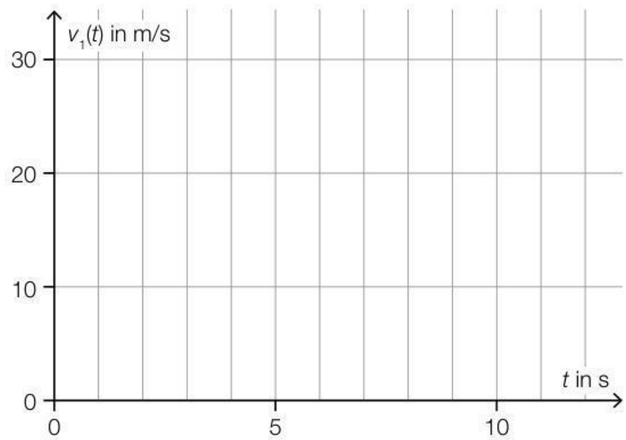


t ... Zeit in s
$s_1(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in m

1) Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit des Autos auf den letzten 70 m der Testfahrt.

Die Weg-Zeit-Funktion s_1 setzt sich aus einer linearen Funktion (im Zeitintervall [0; 5]) und einer quadratischen Funktion (im Zeitintervall [5; 10]) zusammen (siehe obige Abbildung).
An der Stelle $t = 5$ haben die lineare Funktion und die quadratische Funktion die gleiche Steigung.
An der Stelle $t = 10$ hat die quadratische Funktion die Steigung 0.

2) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der zugehörigen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v_1 ein.



Auf dem Laufband (1) * (B_456)

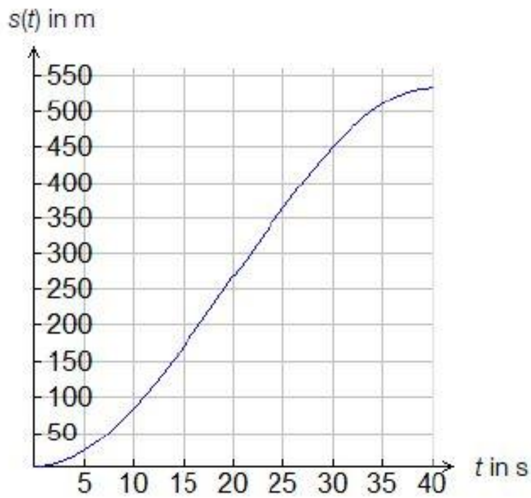
Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft den Verlauf der Geschwindigkeit eines Läufers während einer Trainingseinheit von 25 min. Die abschnittsweise definierte lineare Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v setzt sich aus 8 Abschnitten zusammen.

a) 1) Geben Sie an, in welchem der 8 Abschnitte die Beschleunigung am größten ist.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v für den Abschnitt 5, also für das Zeitintervall [11 min; 13 min].

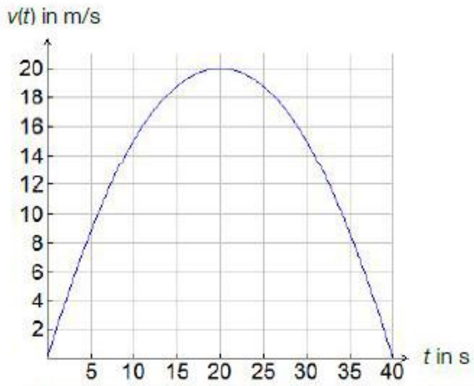
Autofahrt (1) (B_072)

a) Im folgenden Weg-Zeit-Diagramm ist die von einem Auto zurückgelegte Strecke s in Metern (m) in Abhängigkeit von der Zeit t in Sekunden (s) für $0\text{ s} \leq t \leq 40\text{ s}$ dargestellt.



– Lesen Sie aus der Grafik die mittlere Geschwindigkeit des Autos für das Zeitintervall $15\text{ s} \leq t \leq 30\text{ s}$ ab.
– Lesen Sie aus der Grafik die momentane Geschwindigkeit des Autos für den Zeitpunkt $t = 30\text{ s}$ ab.

b) Die nachstehende Grafik zeigt das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm eines Autos für die ersten 40 s seiner Fahrt.

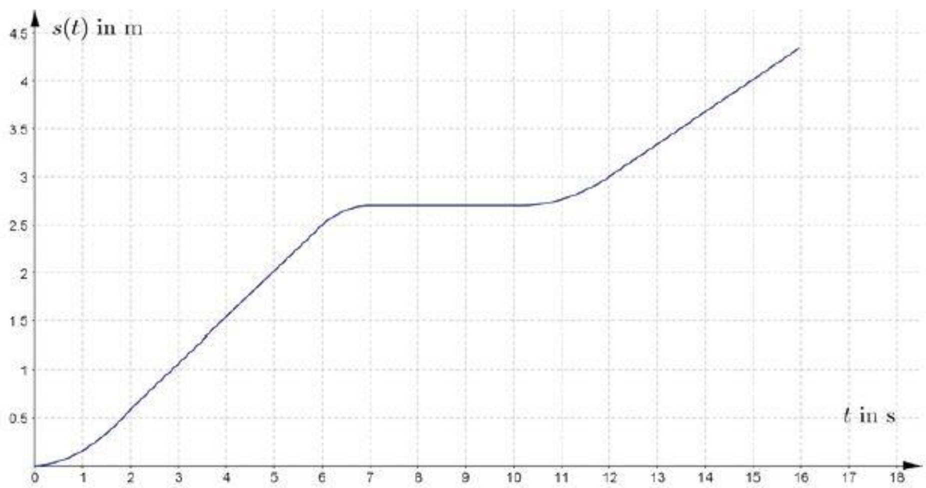


– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage über die Beschleunigungsfunktion an. *[1 aus 5]*

Die Beschleunigung ist nach ungefähr 40 Sekunden gleich null.	☐
Die Beschleunigung ist für 0 s ≤ t ≤ 40 s positiv.	☐
Der Graph der Beschleunigungsfunktion ist für den Bereich 0 s ≤ t ≤ 40 s fallend.	☐
Die Beschleunigung ist nach ungefähr 20 Sekunden maximal.	☐
Die Beschleunigung ist nach 5 Sekunden ungefähr gleich groß wie nach 35 Sekunden.	☐

Roboter (1) (B_108)

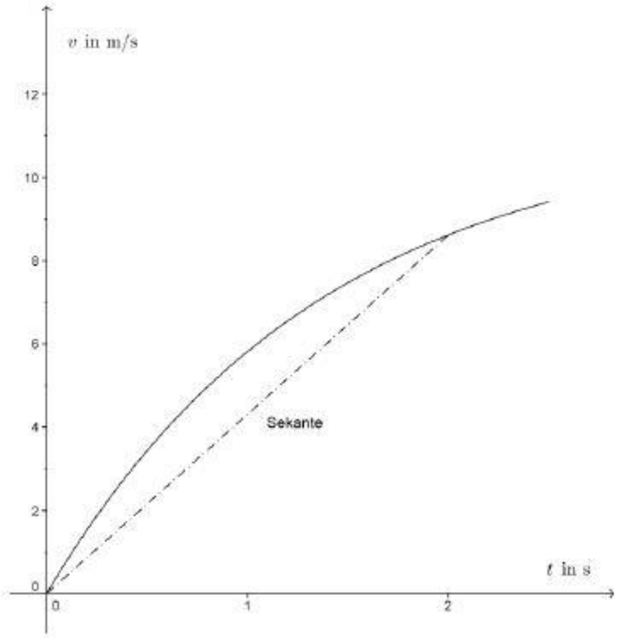
Die nachstehende Grafik stellt in einem Weg-Zeit-Diagramm die Bewegung eines Industrieroboters in einer Produktionshalle dar.



b) – Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate im Intervall [0 s; 15 s].
– Erklären Sie, welche Größe der Bewegung durch diese mittlere Änderungsrate beschrieben wird.

Usain Bolt (B_007)

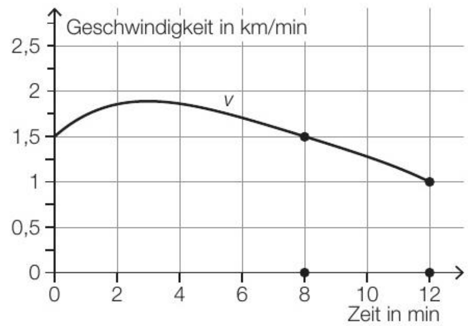
c) Die Laufgeschwindigkeit während der ersten 2 Sekunden des Weltrekordlaufs über 200 m ist in der nachstehenden Grafik dargestellt.



– Lesen Sie die Steigung der eingezeichneten Sekante ab.
– Interpretieren Sie diese Steigung physikalisch.

Bordcomputer * (A_308)

Ein Bordcomputer hat 12 min lang die Geschwindigkeit eines PKW aufgezeichnet. Der Graph der so ermittelten Geschwindigkeit-Zeit-Funktion *v* ist im nachstehenden Diagramm modellhaft dargestellt.



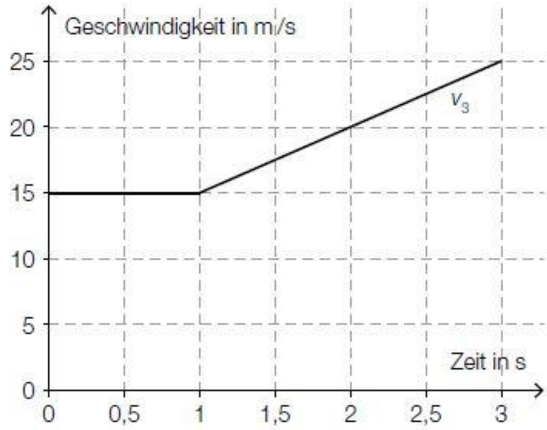
c) 1) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Der vom PKW zurückgelegte Weg nimmt im Intervall [4 min; 8 min] ab.	☐
Die Geschwindigkeit des PKW nimmt im Intervall [4 min; 8 min] zu.	☐
Die Beschleunigung des PKW ist im Intervall [4 min; 8 min] negativ.	☐
Die mittlere Geschwindigkeit des PKW ist im Intervall [4 min; 8 min] geringer als 1,5 km/min.	☐
Es gibt einen Zeitpunkt im Intervall [4 min; 8 min], zu dem der PKW mit 75 km/h fährt.	☐

Erfassen der Geschwindigkeit * (A_196)

Auf einer Teststrecke werden Messungen durchgeführt.

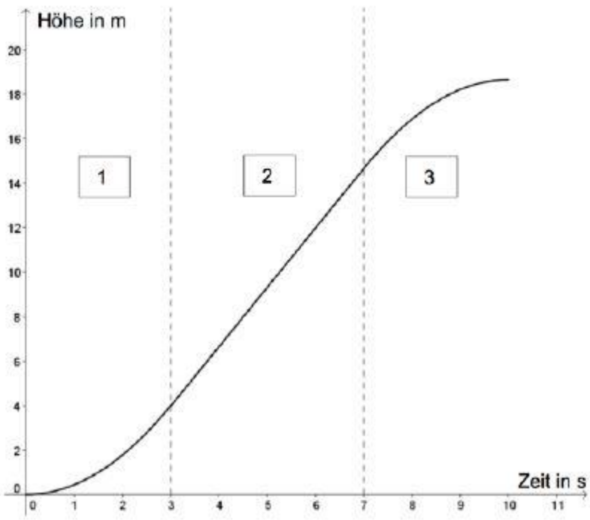
c) Die Geschwindigkeit eines anderen Autos kann im Zeitintervall [0; 3] näherungsweise durch die Funktion v_3 beschrieben werden. Der Graph dieser Funktion v_3 ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Weg-Zeit-Funktion s_3 im Zeitintervall [1; 3] mit $s_3(1) = 15$.

Fahrstuhl im Hochhaus (A_221)

Ein Fahrstuhl fährt in einem Hochhaus nach oben. Die nachstehende Grafik stellt die erreichte Höhe in Metern in Abhängigkeit von der Zeit in Sekunden dar.



c) Während des 3. Abschnitts gilt:

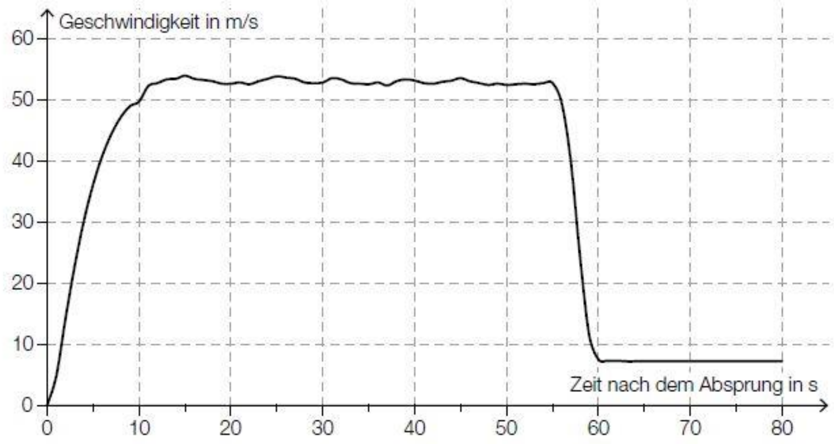
$$h(t) = -\frac{4}{9} \cdot (t - 10)^2 + \frac{56}{3} \quad \text{mit} \quad 7 \leq t \leq 10$$

t … Zeit in s
$h(t)$ … Höhe zur Zeit t in m

– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Beschleunigung-Zeit-Funktion a.
– Beschreiben Sie, wie sich die Geschwindigkeit des Fahrstuhls ändert, wenn die Beschleunigung ein negativer, konstanter Wert ist.

Fallschirmsprung * (A_261)

Bei einem Fallschirmsprung wurde der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit eines Fallschirmspringers aufgezeichnet. Im nachstehenden Diagramm wird diese Geschwindigkeit für die ersten 80 Sekunden nach dem Absprung veranschaulicht.



a) In den ersten Sekunden nach dem Absprung gilt für den Fallschirmspringer annähernd das Fallgesetz:

$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$

t ... Zeit nach dem Absprung in s
$s(t)$ ... Fallstrecke zur Zeit t in m
g ... Erdbeschleunigung, $g = 9{,}81$ m/s²

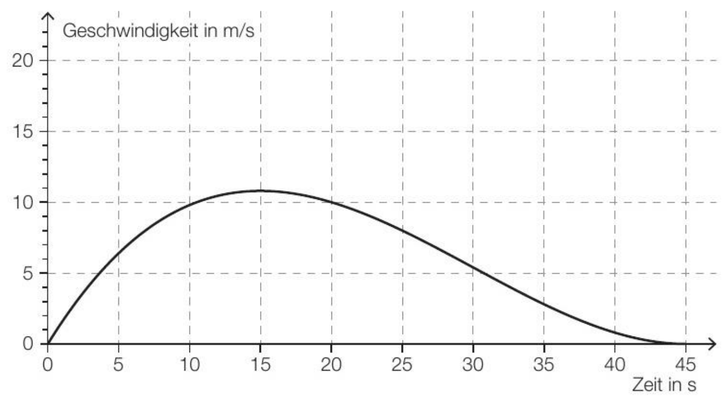
– Berechnen Sie mithilfe des Fallgesetzes die Geschwindigkeit des Fallschirmspringers 1,5 Sekunden nach dem Absprung.

b) 55 Sekunden nach dem Absprung zieht der Fallschirmspringer die Reißleine, der Fallschirm öffnet sich.

– Schätzen Sie den Flächeninhalt zwischen der Geschwindigkeitskurve und der Zeitachse im Intervall [0 s; 55 s] ab.
– Interpretieren Sie die Bedeutung dieses Flächeninhalts im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der entsprechenden Einheit.

Kontrolle der Geschwindigkeit * (A_117)

c) Der nachstehend dargestellte Graph zeigt annähernd den Geschwindigkeitsverlauf eines im Stadtgebiet fahrenden Autos.



1) Ermitteln Sie näherungsweise die Länge des im Zeitintervall [0; 45] zurückgelegten Weges.

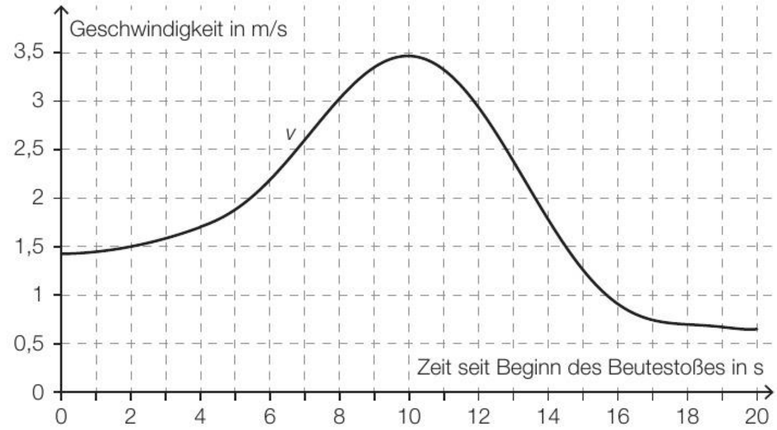
2) Lesen Sie die Höchstgeschwindigkeit des Autos ab. Geben Sie das Ergebnis in km/h an.

Fressverhalten von Furchenwalen * (A_288)

Bei einem Beutestoß nehmen Furchenwale mit weit geöffnetem Maul eine große Menge Meerwasser und die darin enthaltene Beute auf. Forscher/innen beobachteten dieses Fressverhalten. Sie ermittelten mithilfe von Sensoren die Geschwindigkeit des Furchenwals bei einem Beutestoß, die Größe der Maulöffnung und das gesamte Wasservolumen, das dabei aufgenommen wird.

Datenquelle: Goldbogen, Jeremy A.: Schwieriger Krillfang der Wale. In: *Spektrum der Wissenschaft* November 2010, S. 60–67.

a) Die Geschwindigkeit eines Furchenwals bei einem Beutestoß, der insgesamt 20 s dauert, kann näherungsweise durch die Funktion v beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Schätzen Sie die Länge s desjenigen Weges ab, der bei diesem Beutestoß zurückgelegt wird.

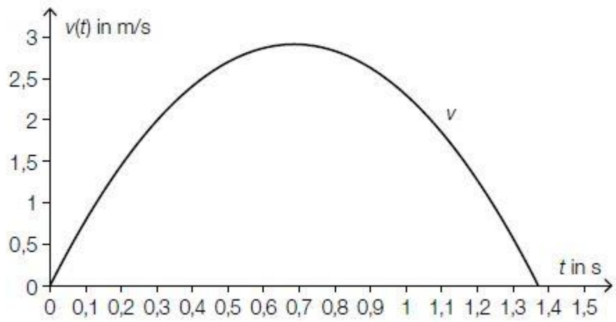
$s \approx$ ______________________ m

Ein Forscher behauptet:
„Der Furchenwal erreicht bei diesem Beutestoß eine maximale Geschwindigkeit von 15 km/h."

2) Weisen Sie nach, dass diese Behauptung falsch ist.

Skatepark (2) * (A_246)

b) Die Geschwindigkeit einer Skaterin in Abhängigkeit von der Zeit lässt sich näherungsweise mithilfe der Funktion v beschreiben. Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.

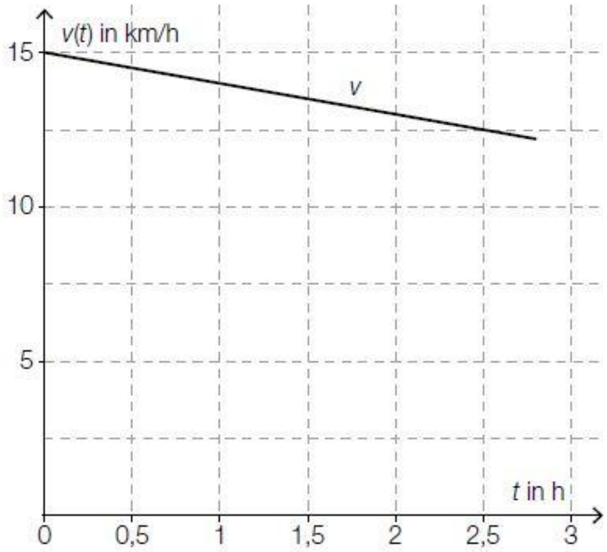


– Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung denjenigen Weg, den die Skaterin zwischen $t = 0{,}5$ s und $t = 1$ s zurücklegt.
– Beschreiben Sie die Bedeutung von $v'(0{,}3)$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Marathon * (A_240)

Die Streckenlänge eines Marathons beträgt 42,195 km.

c) Der Verlauf der Geschwindigkeit einer Marathonläuferin lässt sich näherungsweise durch eine lineare Funktion v beschreiben. Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Ermitteln Sie aus der obigen Abbildung die Steigung dieser linearen Funktion.
– Interpretieren Sie b in der nachstehenden Gleichung im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der entsprechenden Einheit.

$$\int_0^b v(t)\,\mathrm{d}t = 42{,}195 \text{ km}$$

Stau * (A_321)

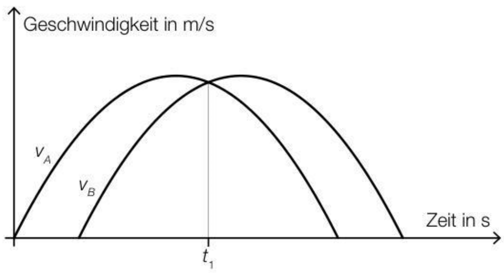
a) Die zwei Autos A und B stehen im Stau hintereinander. Sie beschleunigen und bremsen wieder ab.
Die Weg-Zeit-Funktion des Autos A lautet:

$s_A(t) = -0{,}08 \cdot t^3 + 1{,}2 \cdot t^2$ mit $0 \leq t \leq 10$

t ... Zeit in s
$s_A(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in m

1) Berechnen Sie die maximale Geschwindigkeit des Autos A.

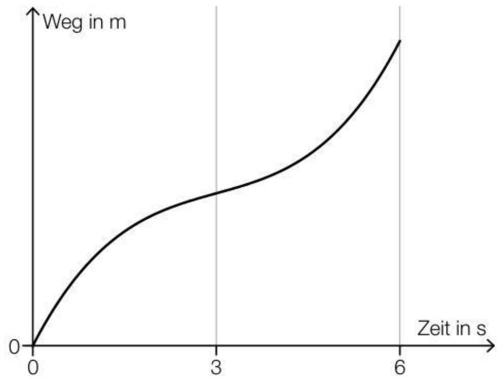
Die Graphen der Geschwindigkeit-Zeit-Funktionen v_A und v_B der beiden Autos sind in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



2) Interpretieren Sie den Schnittpunkt der Graphen im gegebenen Sachzusammenhang.

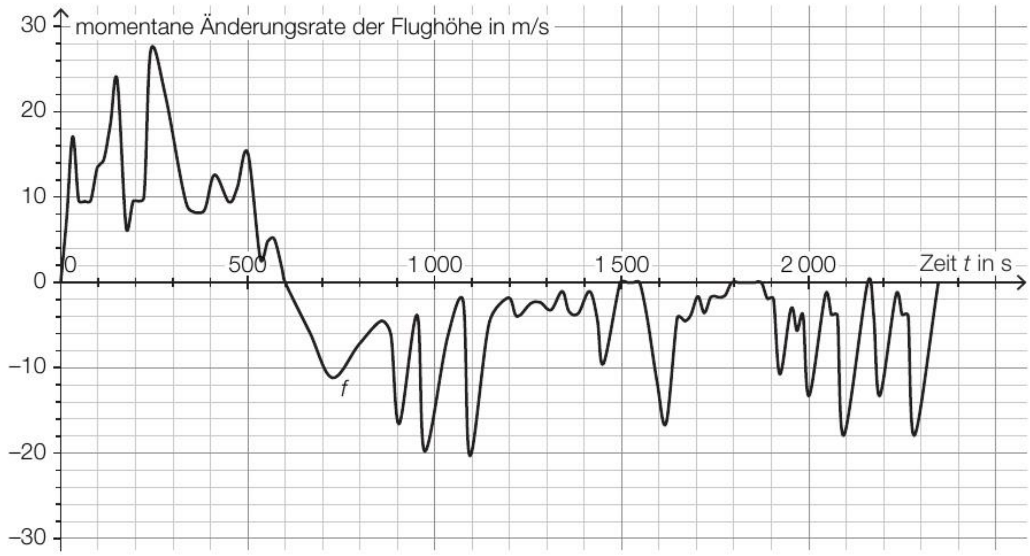
b) Der Bewegungsvorgang eines bestimmten Autos wird über einen Zeitraum von 6 s betrachtet. In den ersten 3 s nimmt die Geschwindigkeit des Autos zu. In den letzten 3 s nimmt die Geschwindigkeit des Autos ab.

1) Begründen Sie, warum der nachstehend dargestellte Graph den beschriebenen Bewegungsvorgang nicht zutreffend wiedergibt.



Steig- bzw. Sinkflug von Flugzeugen * (A_301)

b) Die momentane Änderungsrate der Flughöhe (Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit) eines Flugzeugs auf einem Flug von München nach Frankfurt am Main kann näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



Datenquelle: https://de.flightaware.com/live/flight/DLH99/history/20180905/0710Z/EDDM/EDDF/tracklog [22.02.2019].

Zur Zeit $t = 0$ hebt das Flugzeug in München ab.

1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung diejenige Zeit t_m ab, zu der das Flugzeug seine maximale Flughöhe erreicht.

t_m = ________________ s

Es wird folgende Berechnung durchgeführt: $\int_{1550}^{1800} f(t)\,dt = -1\,249$ m

2) Interpretieren Sie das Ergebnis dieser Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

Tauchen (2) * (A_193)

b) Eine Taucherin benötigt für einen Notaufstieg 40 Sekunden.

Der zurückgelegte Weg s in Abhängigkeit von der Zeit t lässt sich näherungsweise durch folgende Funktion beschreiben:

$s(t) = 0{,}02 \cdot t^2$

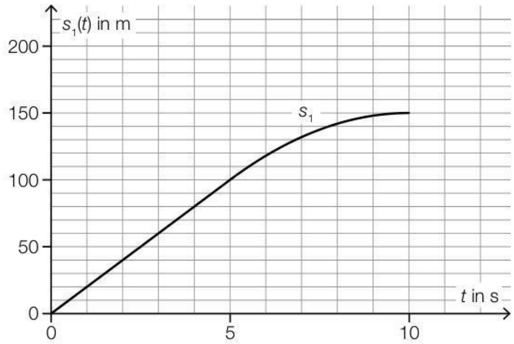
t ... Zeit seit Beginn des Notaufstiegs in Sekunden (s)
$s(t)$ ... zurückgelegter Weg zum Zeitpunkt t in Metern (m)

– Berechnen Sie die momentane Geschwindigkeit der Taucherin 3 Sekunden, bevor sie die Oberfläche erreicht.

Testfahrten * (A_326)

Auf drei Teststrecken werden Testfahrten mit Autos durchgeführt.

a) Eine bestimmte Testfahrt auf der ersten Teststrecke kann modellhaft durch die nachstehend dargestellte Weg-Zeit-Funktion s_1 beschrieben werden.

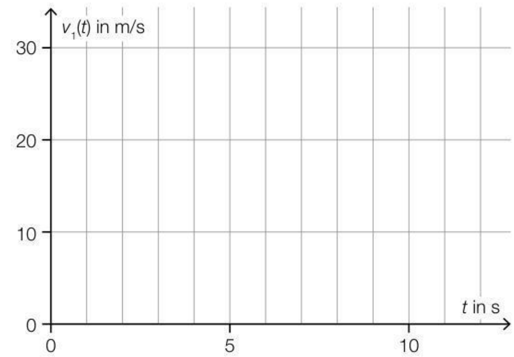


t ... Zeit in s
$s_1(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in m

1) Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit des Autos auf den letzten 70 m der Testfahrt.

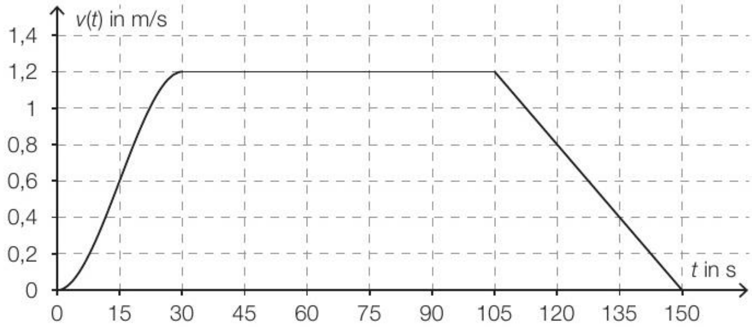
Die Weg-Zeit-Funktion s_1 setzt sich aus einer linearen Funktion (im Zeitintervall [0; 5]) und einer quadratischen Funktion (im Zeitintervall [5; 10]) zusammen (siehe obige Abbildung).
An der Stelle $t = 5$ haben die lineare Funktion und die quadratische Funktion die gleiche Steigung.
An der Stelle $t = 10$ hat die quadratische Funktion die Steigung 0.

2) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der zugehörigen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v_1 ein.



Torre de Collserola * (A_296)

Vom Fußpunkt des *Torre de Collserola* (Fernsehturm in Barcelona) bis zu dessen Aussichtsplattform führt ein Aufzug senkrecht nach oben.
In der nachstehenden Abbildung ist die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v bei einer Aufzugsfahrt modellhaft dargestellt.



t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

c) Im Zeitintervall [0; 30] gilt für die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v:

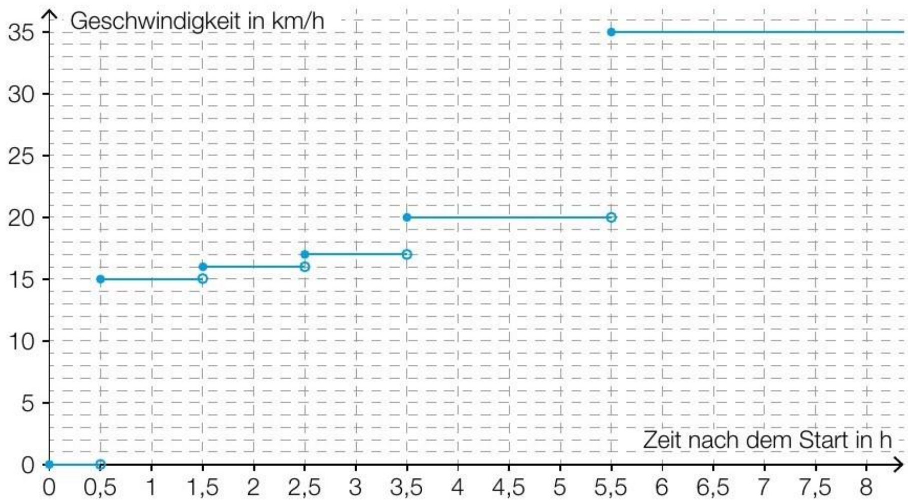
$$v(t) = -\frac{1}{11\,250} \cdot t^3 + \frac{1}{250} \cdot t^2 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 30$$

Die Aufzugsfahrt dauert insgesamt 150 Sekunden.

1) Berechnen Sie die Länge des Weges, der bei dieser Aufzugsfahrt insgesamt zurückgelegt wird.

Wings for Life (A_217)

Der *Wings for Life World Run* ist ein Lauf, bei dem der Start in vielen Städten auf der ganzen Welt genau zur selben Zeit erfolgt. Die Läufer/innen laufen jeweils solange, bis sie vom sogenannten Catcher-Car überholt werden. Die nachstehende Grafik beschreibt die Fahrt des Catcher-Cars während des Rennens. (Die Zeiten, die das Auto zur Beschleunigung benötigt, werden vernachlässigt.)

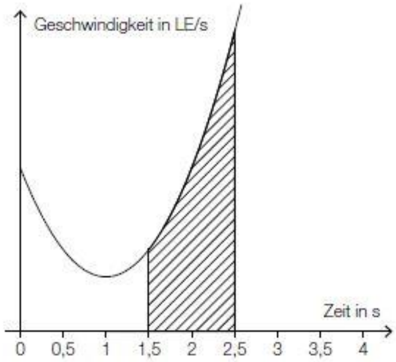


a) – Berechnen Sie, welchen Weg das Auto nach 2 Stunden zurückgelegt hat.
– Erklären Sie, mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit Sie laufen müssen, damit Sie genau nach 15 km vom Catcher-Car eingeholt werden.

Angry Birds (1) * (B_377)

Im Computerspiel *Angry Birds* muss man mithilfe einer Schleuder Schweine treffen. Als Wurfgeschoße stehen verschiedene Vögel zur Verfügung. Einige dieser Vögel haben besondere Funktionen, die durch einen Mausklick ausgelöst werden können. Koordinaten bzw. Abstände sind im Folgenden in Längeneinheiten (LE) angegeben.

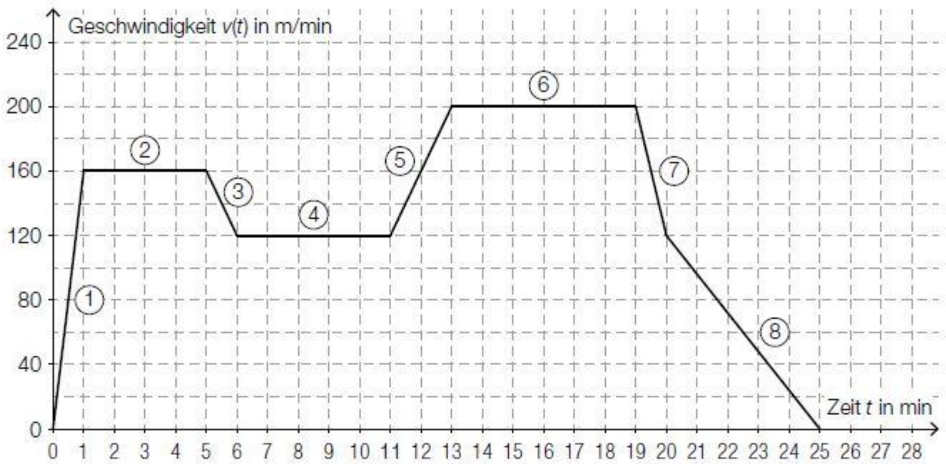
e) Die nachstehende Grafik stellt das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines Vogels bei einem Wurf dar.



– Beschreiben Sie die Bedeutung der in der Grafik eingezeichneten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.

Auf dem Laufband (1) * (B_456)

Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft den Verlauf der Geschwindigkeit eines Läufers während einer Trainingseinheit von 25 min. Die abschnittsweise definierte lineare Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v setzt sich aus 8 Abschnitten zusammen.



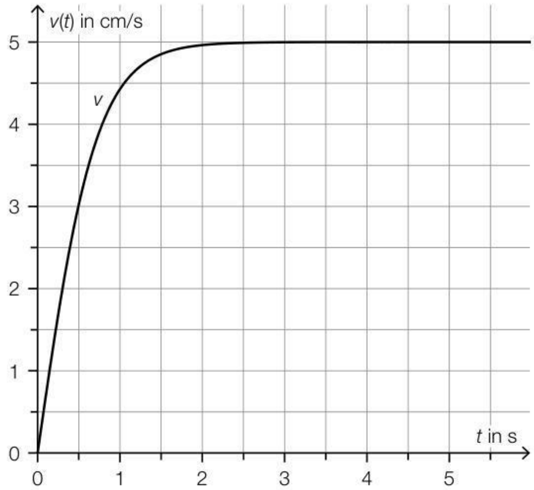
b) 1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Länge desjenigen Weges, den der Läufer in den ersten 11 min zurücklegt.

2) Ermitteln Sie die Länge dieses Weges in Kilometern.

Distelsamen * (B_552)

Im Rahmen eines Projekts zum Thema *Verbreitung von Unkrautsamen* untersucht eine Gruppe von Schülerinnen das Fallverhalten von Distelsamen.

c) Ein Samen einer anderen Distelart fällt aus einer bestimmten Höhe senkrecht herab. Die Geschwindigkeit dieses Distelsamens kann in Abhängigkeit von der Zeit t durch die Funktion v modelliert werden. Die Funktion v ist streng monoton steigend und nähert sich asymptotisch dem Wert 5 cm/s. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen dieser Funktion v.



1) Kreuzen Sie die <u>nicht</u> zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Die Beschleunigung des Distelsamens nähert sich dem Wert 0 cm/s².	☐
Die Beschleunigung des Distelsamens zur Zeit $t = 0{,}5$ s ist größer als zur Zeit $t = 1$ s.	☐
Der Distelsamen legt im Zeitintervall [0 s; 0,5 s] rund 0,75 cm zurück.	☐
Die zugehörige Beschleunigung-Zeit-Funktion ist streng monoton steigend.	☐
Die mittlere Beschleunigung des Distelsamens im Zeitintervall [0 s; 0,5 s] beträgt rund 6 cm/s².	☐

Flugzeuge (2) * (B_562)

b) Bevor ein Flugzeug abhebt, beschleunigt es auf der Startbahn. Der bis zum Abheben zurückgelegte Weg eines bestimmten Flugzeugs kann näherungsweise durch die Funktion s beschrieben werden.

$s(t) = t^2 + 5 \cdot t$

t ... Zeit seit Beginn des Startvorgangs in s
$s(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in m

Das Flugzeug hebt bei einer Geschwindigkeit von 90 km/h ab.

1) Berechnen Sie die Länge desjenigen Weges, den dieses Flugzeug auf der Startbahn zurücklegt.

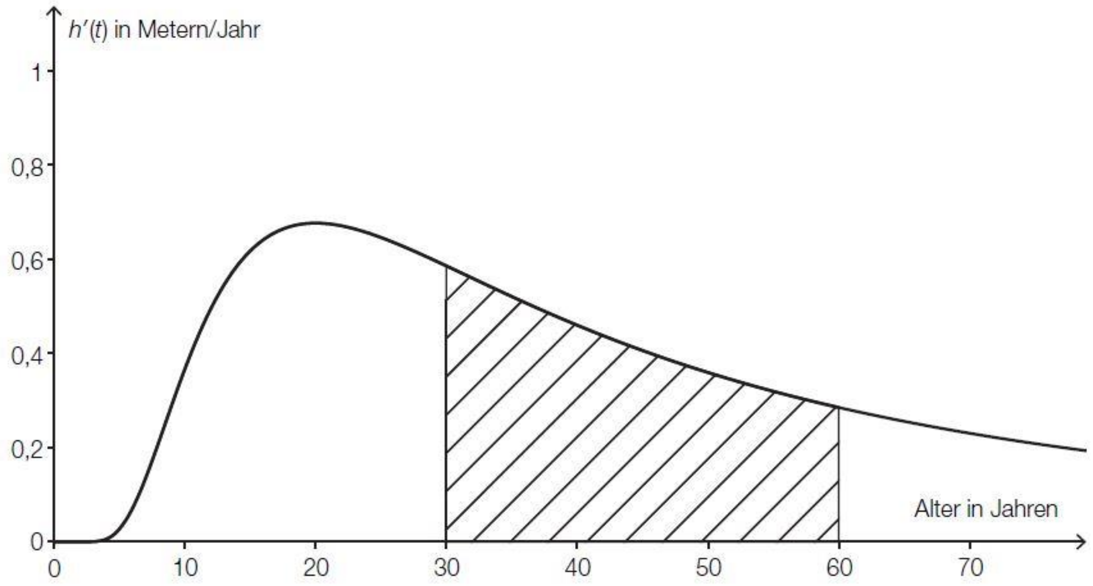
Hoehenwachstum von Fichten * (B_350)

Der Zusammenhang zwischen dem Alter und der durchschnittlichen Höhe von Fichten kann näherungsweise mithilfe einer Funktion h beschrieben werden:

$h(t) = a \cdot e^{-\frac{b}{t}}$

t ... Alter in Jahren
$h(t)$ ... durchschnittliche Höhe im Alter t in Metern (m)
$a > 0$ ... Parameter in m
$b > 0$ ... Parameter in Jahren

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der momentanen Änderungsrate der durchschnittlichen Höhe eines Fichtenbestandes $h'(t)$ dargestellt.

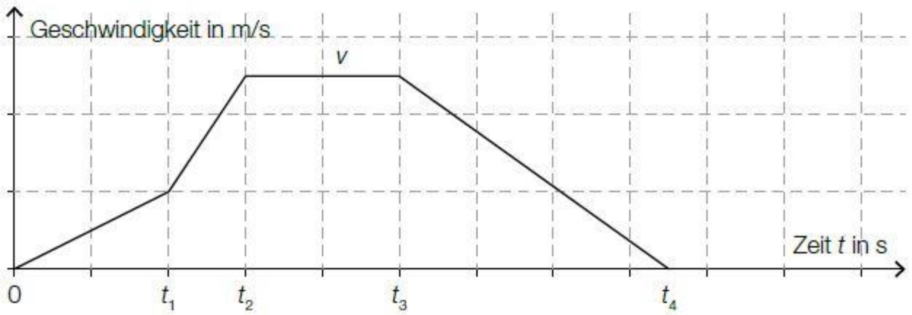


– Interpretieren Sie die Bedeutung des Inhalts der schraffierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.

Programmieren (B_031)

Um bestimmte grafische Objekte zu animieren, muss ein Programmierer über verschiedene mathematische Hintergründe Bescheid wissen.

b) Ein Ball wird animiert. Die nachstehende Abbildung zeigt den Geschwindigkeit-Zeit-Verlauf des rollenden Balles.



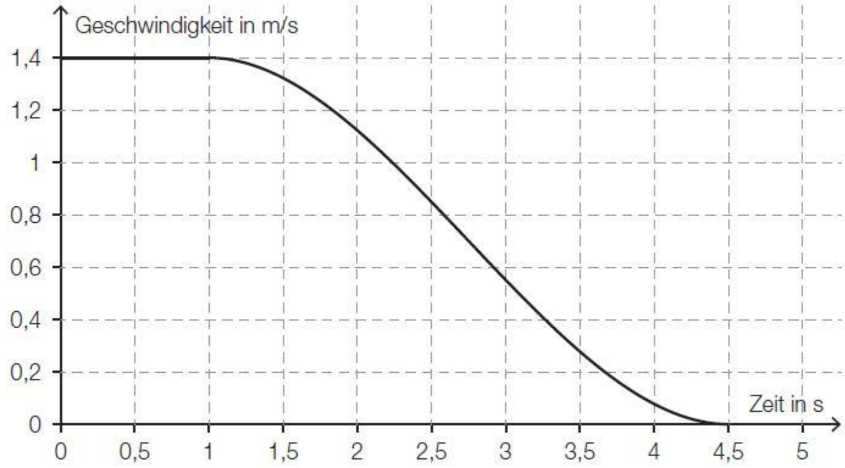
– Skizzieren Sie das dazugehörige Beschleunigung-Zeit-Diagramm.
– Erklären Sie die physikalische Bedeutung derjenigen Fläche, die der Graph der Funktion v mit der Zeitachse einschließt.

Minigolf * (B_323)

b) In der nachstehenden Abbildung ist das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines Balles auf einer Minigolfbahn dargestellt. Während der ersten Sekunde hat der Ball eine konstante Geschwindigkeit. Danach kann die abnehmende Geschwindigkeit näherungsweise durch die Funktion v beschrieben werden:

$v(t) = \frac{1}{245} \cdot (16 \cdot t^3 - 132 \cdot t^2 + 216 \cdot t + 243)$ mit $1 \leq t \leq 4{,}5$

t … Zeit in Sekunden (s)
$v(t)$ … Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in Metern pro Sekunde (m/s)



– Erklären Sie, was die momentane Änderungsrate der Funktion v zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 in diesem Sachzusammenhang angibt.
– Berechnen Sie den zurückgelegten Weg des Balles in den ersten 4,5 Sekunden.

Olympische Sommerspiele 2008 in Peking * (B_508)

a) Bei den Olympischen Sommerspielen 2008 in Peking siegte Usain Bolt im Finale des 100-Meter-Laufes der Männer. Die Silbermedaille ging an Richard Thompson.

Die jeweilige Geschwindigkeit der beiden Läufer bei diesem Lauf kann durch die nachstehenden Funktionen modellhaft beschrieben werden.

$v_B(t) = 12{,}151 \cdot (1 - e^{-0{,}684 \cdot t})$
$v_T(t) = 12{,}15 \cdot (1 - e^{-0{,}601 \cdot t})$

t ... Zeit ab dem Start in s
$v_B(t)$ ... Geschwindigkeit von Usain Bolt zur Zeit t in m/s
$v_T(t)$ ... Geschwindigkeit von Richard Thompson zur Zeit t in m/s

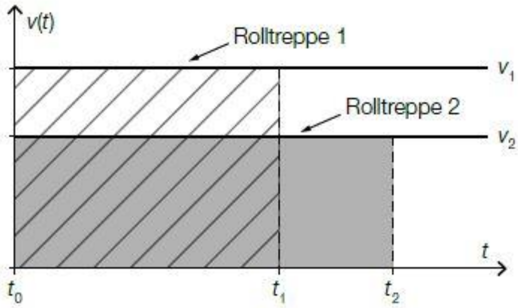
1) Berechnen Sie die Beschleunigung von Usain Bolt 1 s nach dem Start.
2) Beschreiben Sie, was mit dem nachstehenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.
$\frac{1}{8-5} \cdot \int_5^8 v_B(t)\,dt$

Usain Bolt überquerte die Ziellinie 9,69 s nach dem Start.

3) Ermitteln Sie, wie weit Richard Thompson von der Ziellinie entfernt war, als Usain Bolt diese überquerte.

Rolltreppen * (A_259)

c) Im nachstehenden Diagramm sind die Graphen der Geschwindigkeit-Zeit-Funktionen v_1 und v_2 der Stufen zweier Rolltreppen dargestellt.



– Interpretieren Sie, was es im gegebenen Sachzusammenhang bedeutet, dass die beiden gekennzeichneten Flächeninhalte gleich groß sind.

Sinkende Kugeln * (B_407)

Die Sinkgeschwindigkeit einer in einer Flüssigkeit sinkenden Metallkugel kann durch eine Funktion v beschrieben werden:

$v(t) = g \cdot \tau \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit ab Beginn des Sinkens in Sekunden (s)
$v(t)$ ... Sinkgeschwindigkeit zur Zeit t in Metern pro Sekunde (m/s)
τ ... Zeitkonstante in s mit $\tau > 0$
g ... Erdbeschleunigung ($g \approx 9{,}81$ m/s²)

c) Die Sinkgeschwindigkeit einer bestimmten Kugel kann durch die Funktion v beschrieben werden:

$v(t) = g \cdot 0{,}25 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}25}}\right)$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit ab Beginn des Sinkens in s
$v(t)$ ... Sinkgeschwindigkeit zur Zeit t in m/s

– Berechnen Sie denjenigen Weg, den die Kugel in der ersten Sekunde zurücklegt.

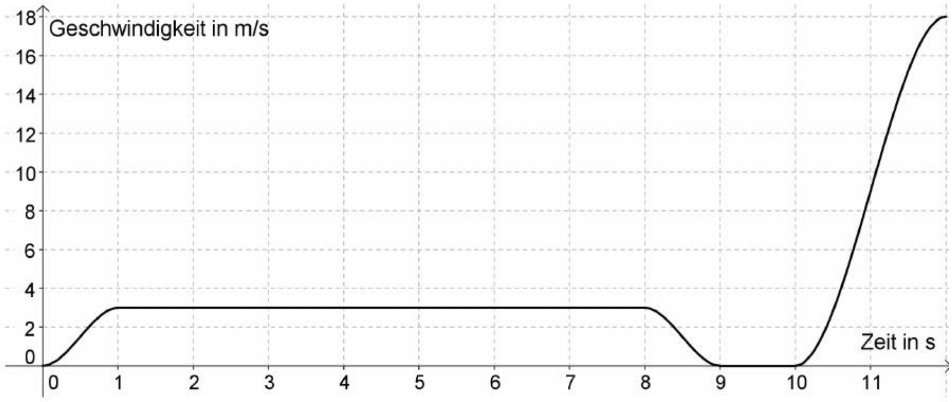
Im Zeitintervall $[0; t_1]$ legt die Kugel einen Weg von 8 m zurück.

– Bestimmen Sie die Zeit t_1.

Vergnuegungspark (4) (B_293)

Ein neuer Vergnügungspark wird geplant.

b) Im Park wird eine Achterbahn gebaut. Das nachstehende Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm zeigt den Verlauf der Geschwindigkeit für die ersten 12 s der Fahrt.



– Interpretieren Sie die Bedeutung der Fläche unter dem Graphen der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion im Zeitintervall [0; 9] im gegebenen Sachzusammenhang.

– Beschreiben Sie die Bedeutung der negativen Steigung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion im Zeitintervall [8; 9].

Im Zeitintervall [10; 12] kann der Verlauf der Geschwindigkeit durch die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v beschrieben werden.

$v(t) = -4{,}5 \cdot t^3 + 148{,}5 \cdot t^2 - 1\,620 \cdot t + 5\,850$

t ... Zeit in s mit $10 \leq t \leq 12$
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

– Berechnen Sie die maximale Beschleunigung in diesem Zeitintervall.