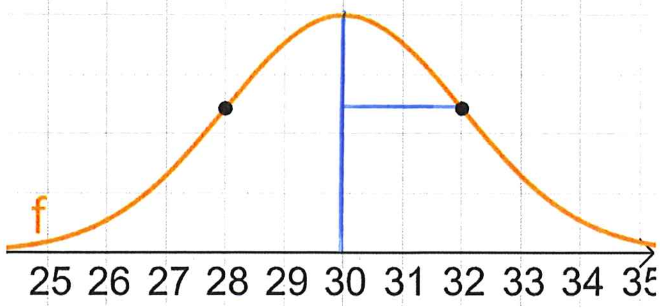
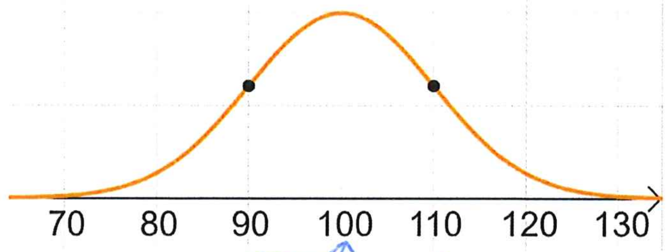
LÖSUNGEN!

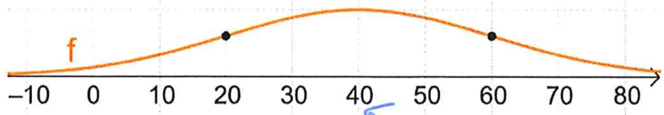
Bsp. 1) Gegeben ist jeweils eine Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsvariable X. Gib die Werte der Parameter μ und σ an. Die Wendepunkte sind markiert.



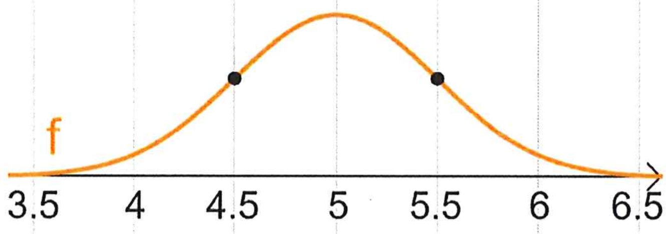
$\mu = 30$ $\sigma = 2$



$\mu = 100$ $\sigma = 10$



$\sigma = 20$ $\mu = 40$

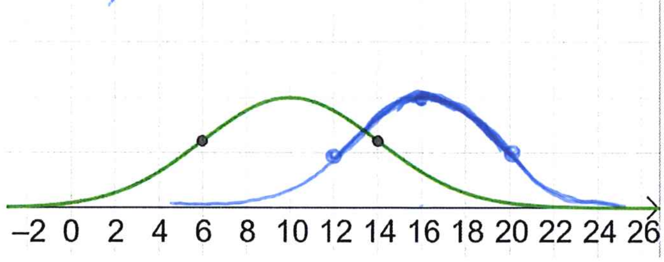


$\mu = 5$ $\sigma = 0{,}5$

Bsp. 2) Gegeben ist eine Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsvariable X. Zeichne einen Funktionsgraphen mit den gewünschten Eigenschaften ein. Die Wendepunkte sind markiert.

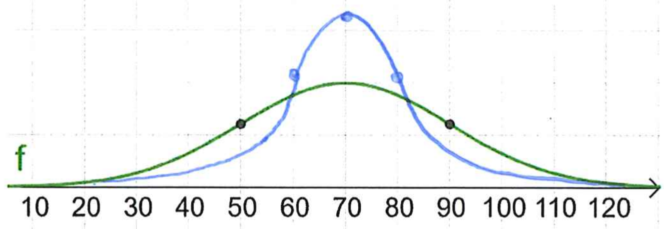
- Erwartungswert μ wird größer
- Standardabweichung σ bleibt gleich

$\mu = 16$ $\sigma = 4$



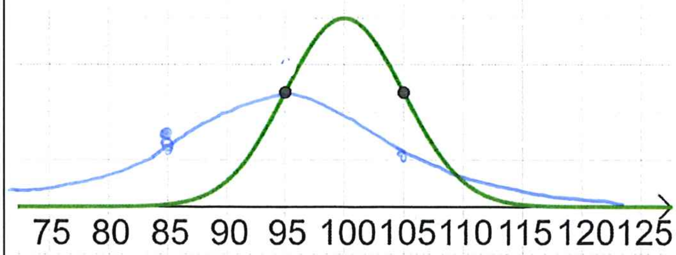
- Erwartungswert μ bleibt gleich
- Standardabweichung σ wird kleiner

$\mu = 70$ $\sigma = 10$



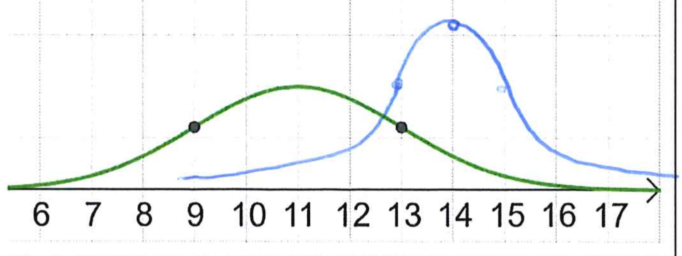
- Erwartungswert μ wird kleiner
- Standardabweichung σ wird größer

$\mu = 95$ $\sigma = 10$



- Erwartungswert μ wird größer
- Standardabweichung σ wird kleiner

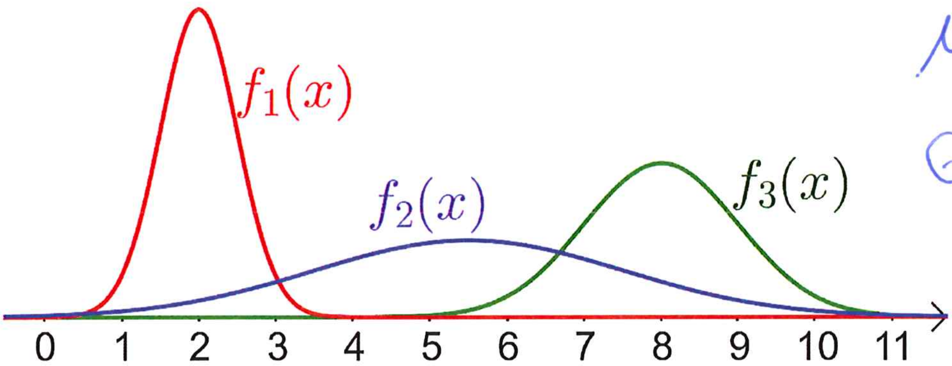
$\mu = 14$ $\sigma = 1$



Bsp. 3) Gegeben ist eine Dichtefunktion f einer normalverteilten Zufallsvariable X mit den Parametern $\mu = 100$ und $\sigma = 20$. Eine zweite Dichtefunktion g ist mit den Parametern $\mu = 120$ und $\sigma = 5$ gegeben. Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an.

Der Funktionswert am lokalen Maximum von g ist größer als jeder Funktionswert von f.	X
Die Fläche zwischen x-Achse und Funktionsgraph f ist größer als 1.	O
Die Stelle des lokalen Maximums von f ist größer als die Stelle des lokalen Maximums von g.	O
Der Graph von g verläuft flacher als der Graph von f.	O
Der Flächeninhalt zwischen x-Achse und Funktionsgraph f ist genauso groß wie der Flächeninhalt zwischen x-Achse und Funktionsgraph g.	X

Bsp. 4) Gegeben sind drei Dichtefunktionen f_1, f_2, f_3 von normalverteilten Zufallsvariablen mit den Parametern μ_1, μ_2, μ_3 und $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Ordne die Erwartungswerte und Standardabweichungen nach der Größe. Beginne jeweils mit dem kleinsten Wert.

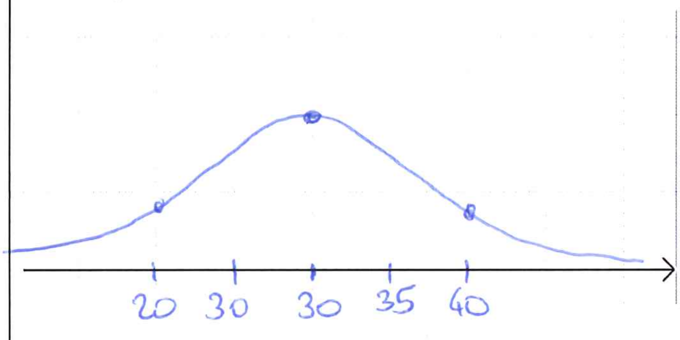


$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$

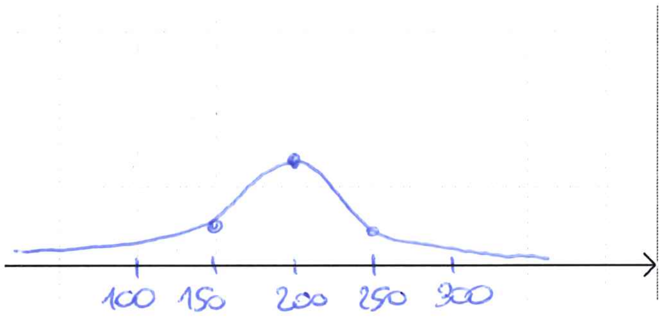
$\sigma_1 < \sigma_3 < \sigma_2$

Bsp. 5) Skizziere einen Graphen einer normalverteilten Zufallsvariable X mit den gegebenen Parametern. Skaliere die Achse passend.

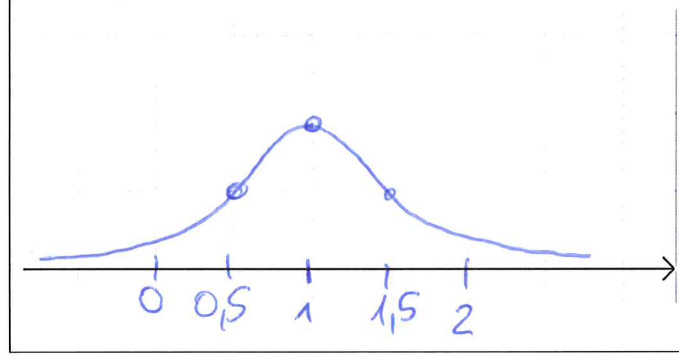
a. $\mu = 30, \sigma = 10$



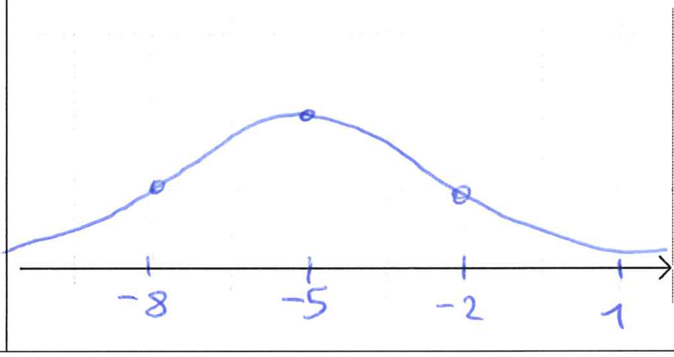
b. $\mu = 200, \sigma = 50$



c. $\mu = 1, \sigma = 0{,}5$

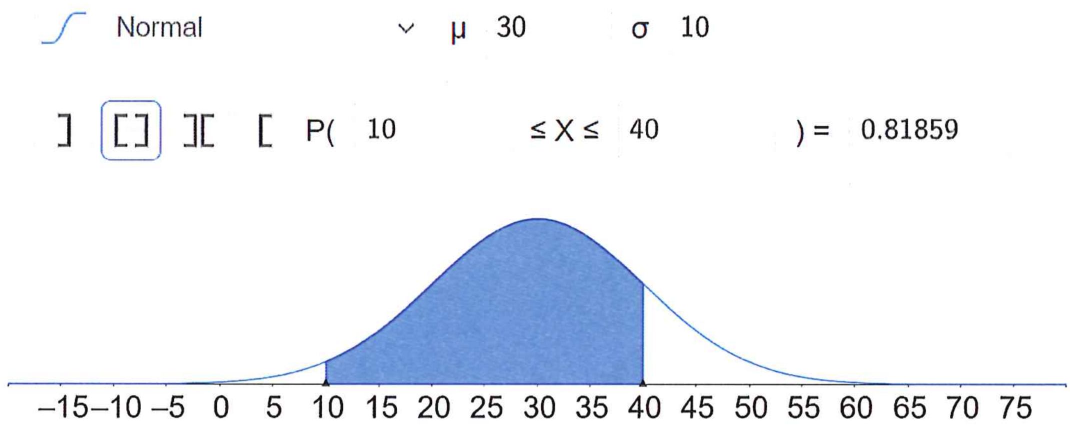


d. $\mu = -5, \sigma = 3$

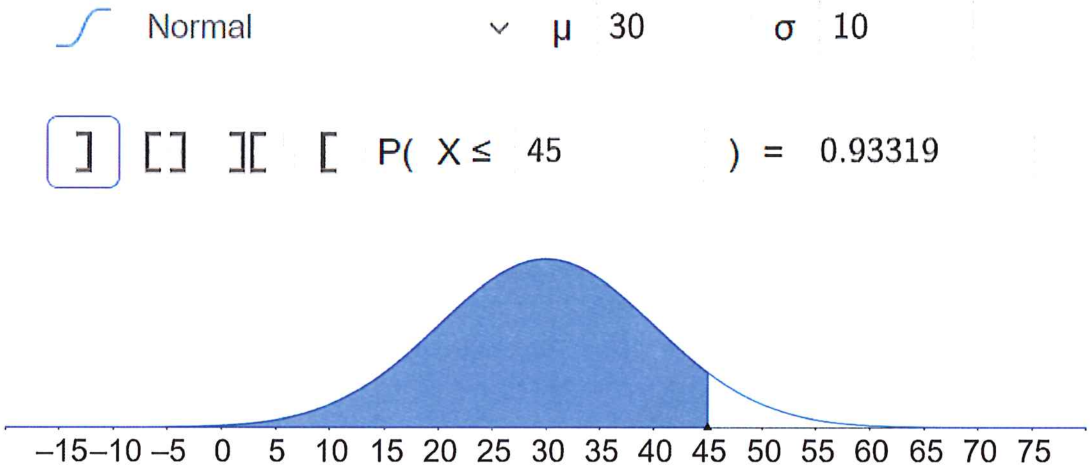


Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von GeoGebra

Eine gute Möglichkeit, Berechnungen mit GeoGebra durchzuführen, ist die Verwendung des **Wahrscheinlichkeitsrechners** (Ansicht -> Wahrscheinlichkeitsrechner -> Normalverteilung auswählen „Normal“)



Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable einen Wert zwischen 10 und 40 annimmt, beträgt 81,86%.

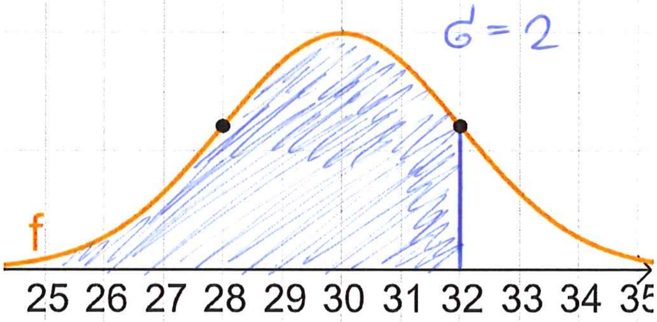


Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable höchstens den Wert 40 annimmt, beträgt 93,32 %.

Bsp. 6) Gegeben ist jeweils eine Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsvariable X. Gib die Werte der Parameter μ und σ an. Markiere graphisch die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Berechne die Wahrscheinlichkeit.

$P(X \leq 32)$

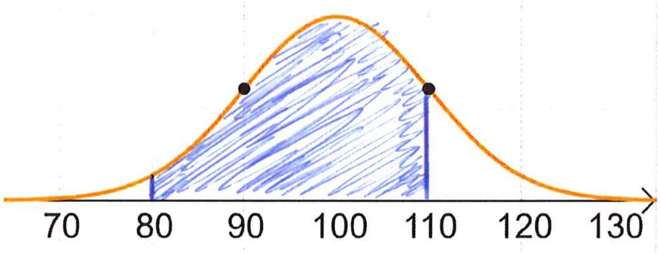
$\mu = 30$
$\sigma = 2$



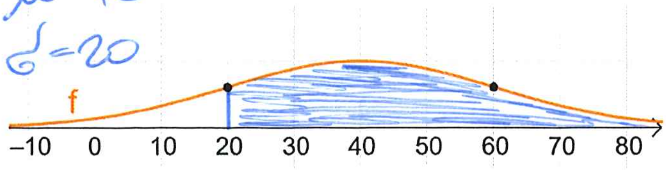
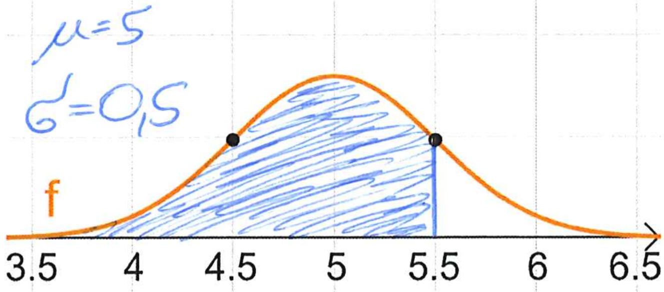
$P(X \leq 32) = 0,841$

$P(80 \leq X \leq 110)$

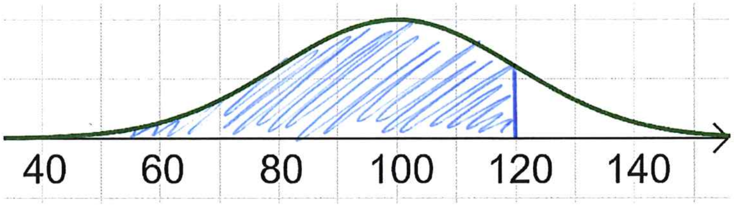
$\mu = 100$
$\sigma = 10$



$P(80 \leq X \leq 110) = 0,819$

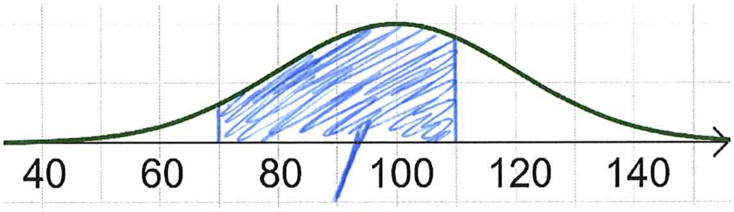
$P(X \geq 20)$	$P(X \leq 5{,}5)$
$\mu = 40$ $\sigma = 20$  $P(X \geq 20) = 0{,}841$	$\mu = 5$ $\sigma = 0{,}5$  $P(X \leq 5{,}5) = 0{,}841$

Bsp. 7) Die Masse von Äpfeln einer bestimmten Baumsorte ist mit den Parametern $\mu = 100g$ und $\sigma = 20g$ annähernd normalverteilt. Die Zufallsvariable X gibt die Masse eines Apfels an.
Die Graphik veranschaulicht die zugehörige Dichtefunktion.



a. Markiere die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Apfel maximal 120g hat. Berechne die Wahrscheinlichkeit. $P(X \leq 120) = 0{,}841$

b. Markiere die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Apfel zwischen 70g und 110g hat. Berechne.



0,625

c. Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten und interpretiere im Kontext.

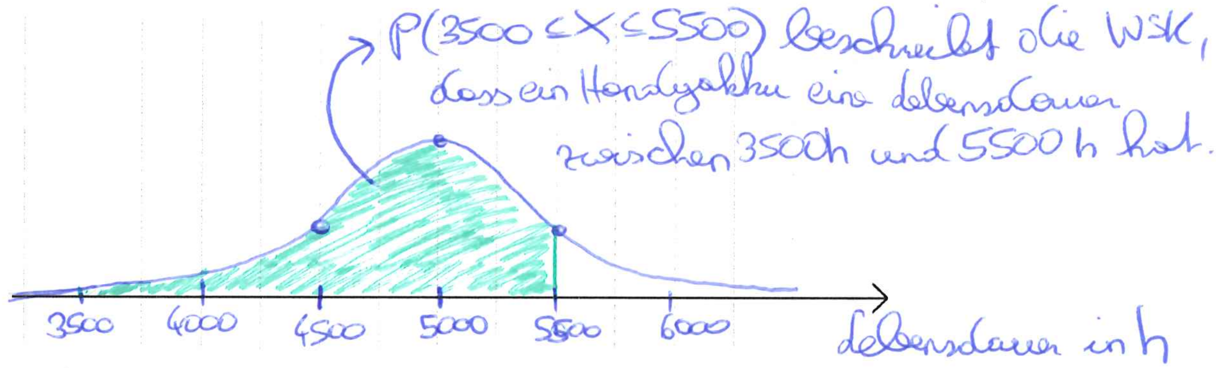
$P(X \leq 40)$	$P(X \geq 110)$
$= 0{,}0013$ Mit einer WSK von 0,13% beträgt die Masse des Apfels maximal 40g.	$\approx 0{,}309$ Zu 30,9% beträgt die Masse eines Apfels mindestens 110g
$P(50 \leq X \leq 80)$	$P(X = 90)$
$\approx 0{,}152$ 15,2% der Äpfel haben eine Masse zwischen 50g & 80g.	$= 0$ 0% der Äpfel haben eine Masse von exakt 90g.

d. Schreibe einen Term auf, mit dem du die gewünschte Wahrscheinlichkeit berechnen kannst.
Tipp: Bestimmtes Integral

$$P(60 \leq X \leq 70) = \int_{60}^{70} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 20} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-100}{20}\right)^2}\right) dx$$

Bsp. 8) Die Zufallsvariable X beschreibt die Lebensdauer in Stunden von Handyakkus. X ist annähernd normalverteilt mit den Parametern $\mu = 5000$ und $\sigma = 1000$.

a. Skizziere einen Graphen der Dichtefunktion f der Zufallsvariablen X. Beschrifte die Achse passend.



b. Kennzeichne folgenden Term in deiner Graphik. Interpretiere die Bedeutung des Terms im Kontext.

$$P(3500 \leq X \leq 5500)$$

c. Ordne folgende Terme ihrer Größe nach. Beginne mit dem kleinsten.

$P(X \leq 5000)$	$P(4000 \leq X \leq 4500)$	$P(3000 \leq X \leq 5000)$	$P(X = 5000)$
$= 0{,}50$		$< 0{,}50$	$= 0$
4	2	3	1

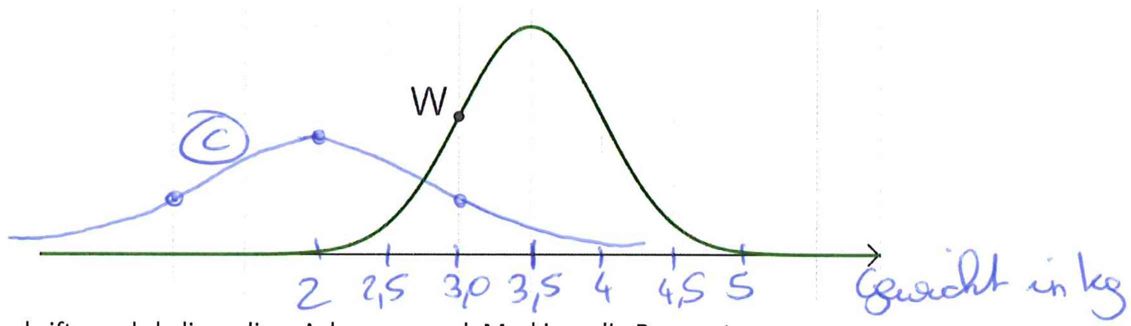
Bsp. 9) Die Zufallsvariable X gibt an, wie viele Kilogramm Tomaten eine Tomatenpflanze der Sorte 1C jährlich bei der Ernte hervorbringt. X ist annähernd normalverteilt mit den Parametern $\mu = 23$ und $\sigma = 4$.

a. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Tomatenpflanze zwischen 20 und 25 kg Tomaten im Jahr hat. $P(20 \leq X \leq 25) = \underline{0{,}465}$

b. Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:

$P(X \leq 20) = 0{,}227$	$P(24 \leq X \leq 26) = 0{,}175$	$P(X = 25) = 0$

Bsp. 10) Das Geburtsgewicht eines Kindes an einer Klink ist annähernd normalverteilt (in kg) mit den Parametern $\mu = 3{,}5\ kg$ und $\sigma = 0{,}5\ kg$.



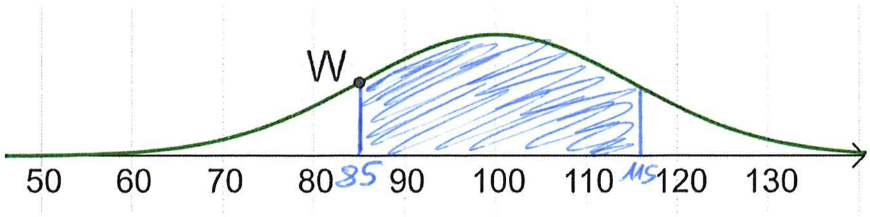
a. Beschrifte und skaliere die x-Achse passend. Markiere die Parameter.

b. Berechne die Wahrscheinlichkeit und interpretiere im Kontext:

$P(X \leq 3) = 0{,}159$ 15,9%: maximal 3kg Geburtsgewicht	$P(2{,}6 \leq X \leq 3{,}1) = 0{,}176$ 17,6%: zwischen 2,6kg und 3,1kg Geburtsgew.	$P(X \geq 3{,}7) = 0{,}345$ 34,5%: mehr als 3,7kg Gewicht bei der Geburt.

c. Eine zweite Kinderklink hat sich auf Frühgeburten spezialisiert. Das Geburtsgewicht eines Kindes an dieser Klink ist auch annähernd normalverteilt mit $\mu = 2\ kg$ und $\sigma = 1\ kg$. Skizziere die Dichtefunktion in die obige Abbildung.

Bsp. 11) Die Zufallsvariable G gibt das Gewicht eines neugeborenen Elefanten-Babys in kg an. G ist annähernd normalverteilt mit den Parametern $\mu = 100\ kg$ und $\sigma = 15\ kg$. Die Abbildung zeigt den Graphen der zugehörigen Dichtefunktion. Ein Wendepunkt ist markiert.



a. Berechne, markiere in der Graphik und interpretiere folgenden Term:

$$P(\mu - \sigma \leq G \leq \mu + \sigma) = P(85 \leq G \leq 115) = 0{,}683$$

68,3% der Elefanten-Babys haben ein Geburtsgew. zw. 85kg und 115kg.

b. Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:

$P(G \leq 90) =$ 0,253	$P(\mu - 2\sigma \leq G \leq \mu + \sigma) =$ 0,819 ($70 \leq G \leq 115$)	$P(G \geq 120) =$ 0,091

c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das Geburtsgewicht eines Elefanten-Baby's (i) höchstens 110 kg, (ii) zwischen 80 kg und 130 kg bzw. (iii) mindestens 70 kg beträgt.

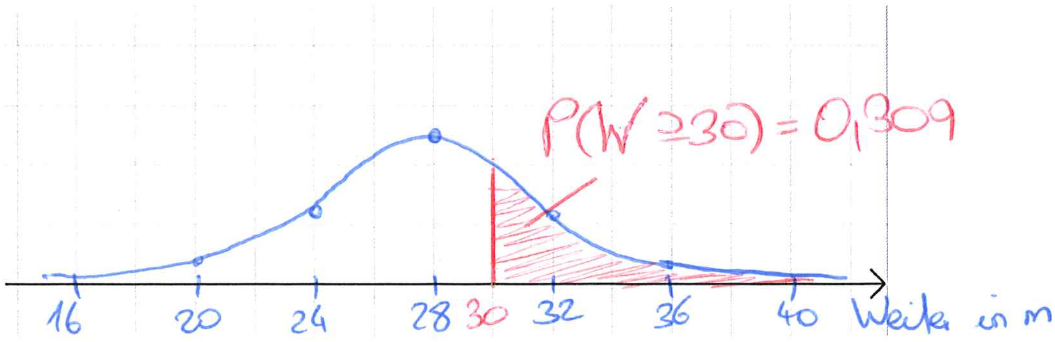
$P(G \leq 110) = 0{,}748$	$P(80 \leq G \leq 130) = 0{,}886$	$P(G \geq 70) = 0{,}978$

d. Schreibe einen Term auf, mit dem du die gewünschte Wahrscheinlichkeit berechnen kannst. (Tipp: bestimmtes Integral)

$$P(80 \leq G \leq 110) = \int_{80}^{110} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 15} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x - 100}{15} \right)^2} \right) dx$$

Bsp. 12) Die Zufallsvariable W gibt die Weite an, die Schüler im Alter von 16 Jahren bei einem Schul-Sportwettkampf im Speerwurf erreichen. W ist annähernd normalverteilt mit den Parametern $\mu = 28\ m$ und $\sigma = 4\ m$.

a. Skizziere einen Graphen der Dichtefunktion f der Zufallsvariablen ~~X~~ W. Beschrifte die Achse passend.



b. Markiere in der Graphik die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler weiter als 30 Meter wirft. Berechne die Wahrscheinlichkeit.

c. Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten.

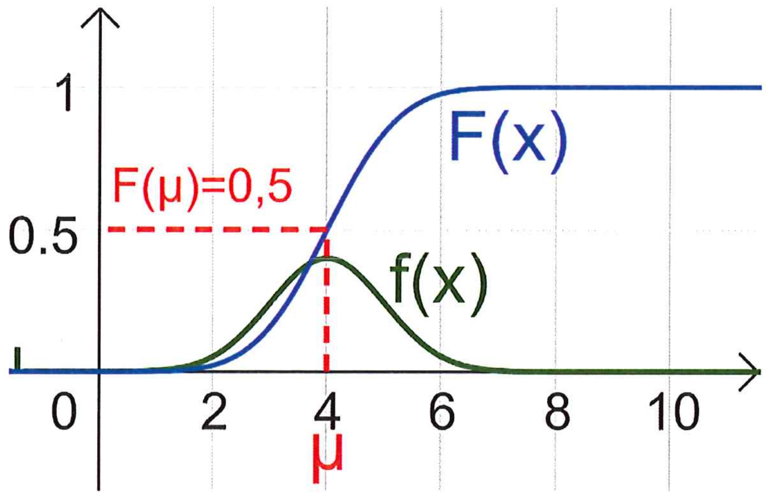
$P(W \leq 20) =$ 0,023	$P(W \geq 40) =$ 0,0013
$P(23 \leq W \leq 29) =$ 0,493	$P(\mu - \sigma \leq G \leq \mu + \sigma) =$ 0,683

$\downarrow$ $24 \leq W \leq 32$

Verteilungsfunktion einer normalverteilten Zufallsvariable:

Sei f(x) eine Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsvariable X mit den Parametern μ und σ.
Die Verteilungsfunktion ist gegeben durch:

$$F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \right) dx$$



$P(X \leq a) = F(a)$

$P(a \leq X \leq b) =$
$P(X \leq b) - P(X \leq a) =$
$F(b) - F(a)$

$P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a) =$
$1 - F(a)$

Bemerkungen zum Graph der Verteilungsfunktion:

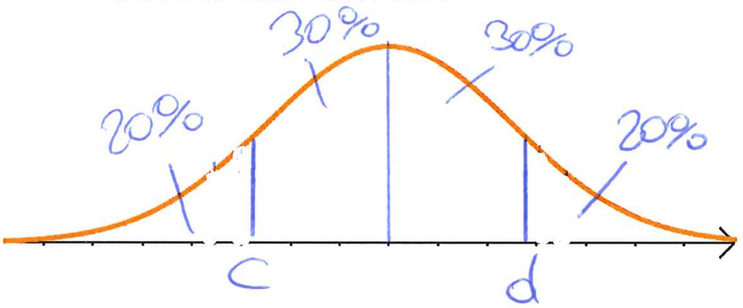
- F nähert sich dem Wert 1 asymptotisch an.
- An der Stelle beim Erwartungswert μ erreicht F den Funktionswert 0,5 (=50 %). Diese Stelle ist zugleich die Wendestelle von F.

Bsp. 13) Die Zufallsvariable X ist normalverteilt. Drücke die angeführte Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Verteilungsfunktion F aus. Es gilt: $c < d$.

a. $P(X \leq 13) =$ F(13)	**b.** $P(X \leq c) =$ F(c	**c.** $P(12 \leq X \leq 18)$ F(18) - F(12)
d. $P(X \geq 20)$ 1 - F(20)	**e.** $P(X \geq d)$ 1 - F(d)	**f.** $P(c \leq X \leq d)$ F(d) - F(c)

Bsp. 14) Die Zufallsvariable X ist normalverteilt. Gegeben ist ein **symmetrisches** Intervall $[c; d]$ um den Erwartungswert ($c < d$). Es gilt $F(d) = 0{,}80$. Berechne den Wert des gegebenen Terms.

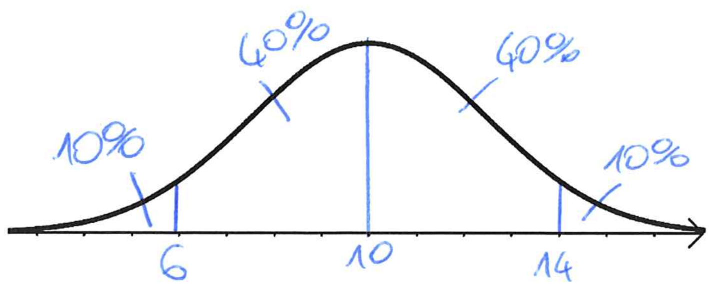
Mache dir zuerst eine **Skizze**:



a. $F(c) =$ 0,2	**b.** $F(d) - F(c) =$ 0,8 - 0,2 0,6
c. $1 - F(c) =$ 0,8	**d.** $1 - F(d) =$ 0,2

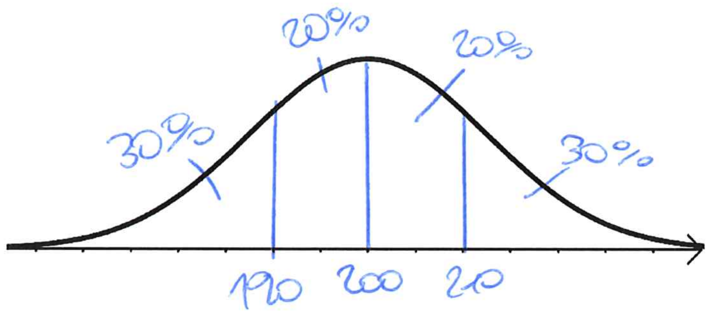
Berechnungen über die Symmetrie der Dichtefunktion

Bsp. 15) Die Zufallsvariable X ist normalverteilt mit $\mu = 10$ und σ (Wert nicht bekannt). Es gilt $P(X \le 6) = 0{,}1$. Veranschauliche graphisch diesen Sachverhalt und berechne mit diesem Wert die Wahrscheinlichkeiten.



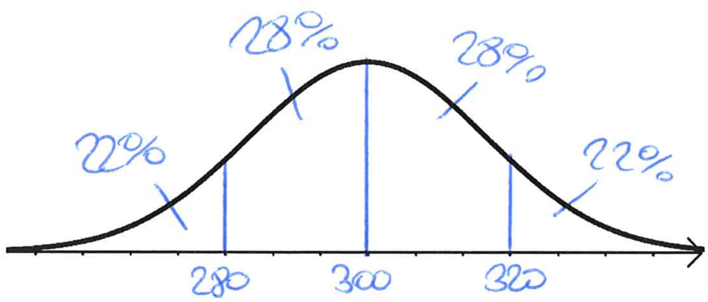
a. $P(X \le 14)$	**b.** $P(6 \le X \le 10)$
$=0{,}9$	$=0{,}4$
c. $1 - P(X \ge 6)$	**d.** $P(10 \le X \le 14)$
$1-0{,}1=0{,}9$	$=0{,}4$

Bsp. 16) Die Zufallsvariable X ist normalverteilt mit $\mu = 200$ und σ (Wert nicht bekannt). Es gilt $P(X \ge 210) = 0{,}3$. Veranschauliche graphisch diesen Sachverhalt und berechne mit diesem Wert die Wahrscheinlichkeiten.



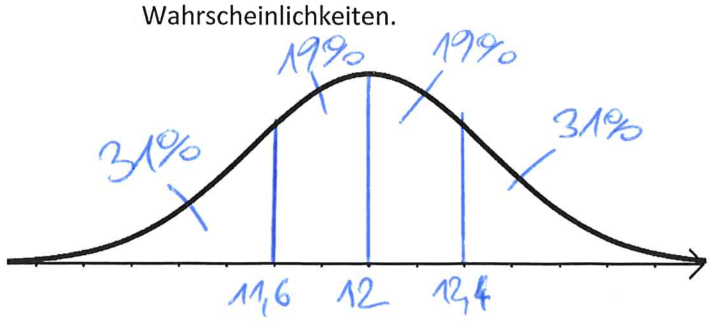
a. $P(X \le 190)$	**b.** $P(190 \le X)$
$=0{,}3$	$=0{,}7$
c. $1 - P(X \le 200)$	**d.** $P(190 \le X \le 200)$
$=0{,}5$	$=0{,}2$

Bsp. 17) Die Zufallsvariable X ist normalverteilt mit $\mu = 300$ und σ (Wert nicht bekannt). Es gilt $P(X \le 280) = 0{,}22$. Veranschauliche graphisch diesen Sachverhalt und berechne mit diesem Wert die Wahrscheinlichkeiten.



a. $P(X \le 320)$	**b.** $1 - P(X \ge 280)$
$=0{,}78$	$1-0{,}78=0{,}22$
c. $P(280 \le X \le 300)$	**d.** $P(300 \le X \le 320)$
$=0{,}28$	$=0{,}28$

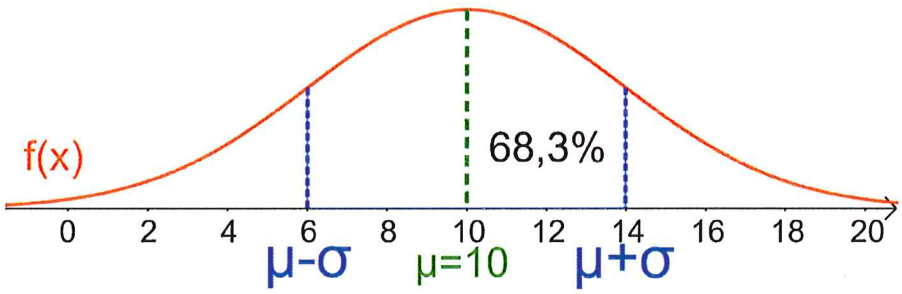
Bsp. 18) Die Zufallsvariable X ist normalverteilt mit $\mu = 12$ und σ (Wert nicht bekannt). Es gilt $P(X \ge 11{,}6) = 0{,}69$. Veranschauliche graphisch diesen Sachverhalt und berechne mit diesem Wert die Wahrscheinlichkeiten.



e. $P(X \ge 12{,}4)$	**f.** $P(12 \le X \le 12{,}4)$
$=0{,}31$	$=0{,}19$
g. $P(X \le 11{,}6)$	**h.** $1 - P(11{,}6 \le X \le 12)$
$=0{,}31$	$1-0{,}19=0{,}81$

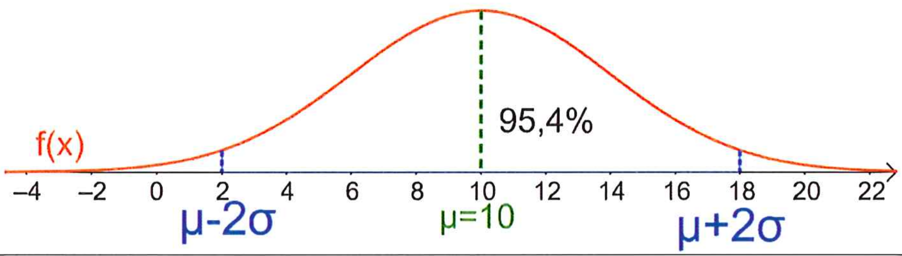
Sigma-Intervalle:

Bei einer normalverteilten Zufallsvariable gibt es die sogenannten **Sigma-Intervalle**, bei denen die Wahrscheinlichkeit stets gleich groß ist. Es gilt:



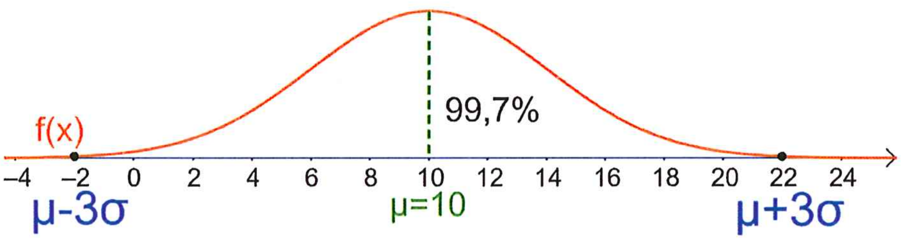
$P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma)$
≈ 0.6827

Es liegen ca. 68,3 % aller Werte im Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$.



$(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma)$
≈ 0.9545

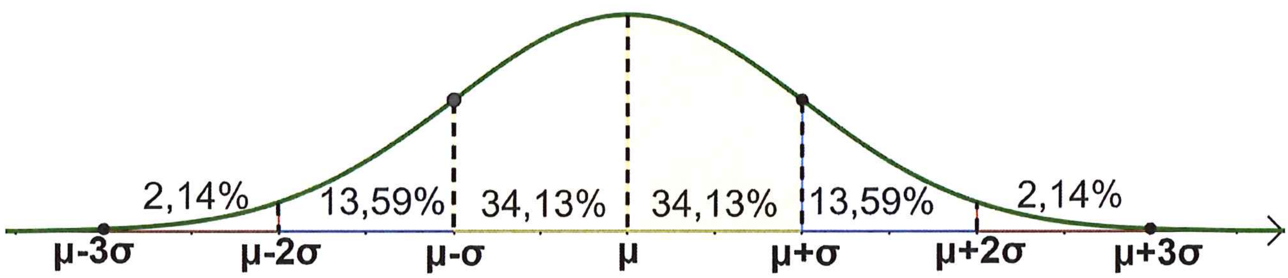
Es liegen ca. 95,5 % aller Werte im Intervall $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$.



$(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma)$
≈ 0.9973

Es liegen ca. 99,7 % aller Werte im Intervall $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$.

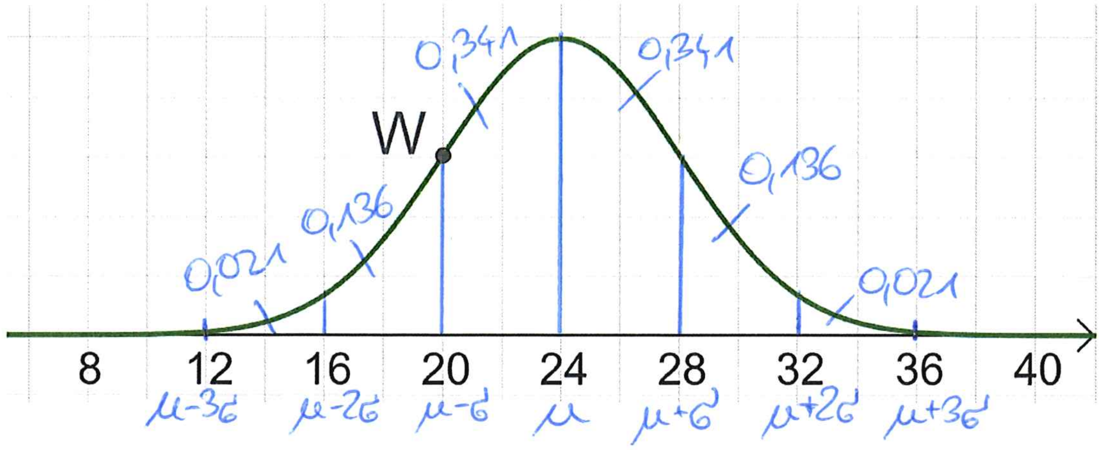
Aufgrund der Symmetrie der Dichtefunktion gilt:



Bsp. 19 Eine Zufallsvariable X ist normalverteilt mit den Parametern μ und σ. Wähle drei verschiedene Werte für die Parameter und berechne damit die Sigma-Intervalle.

μ	σ	$P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma)$	$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma)$	$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma)$
100	10	$P(90 \le X \le 110) = 0{,}683$	$P(80 \le X \le 120) = 0{,}955$	$P(70 \le X \le 130) = 0{,}997$
5	1	$P(4 \le X \le 6) = 0{,}683$	$P(3 \le X \le 7) = 0{,}955$	$P(2 \le X \le 8) = 0{,}997$
1	0,1	$P(0{,}9 \le X \le 1{,}1) = 0{,}683$	$P(0{,}8 \le X \le 1{,}2) = 0{,}955$	$P(0{,}7 \le X \le 1{,}3) = 0{,}997$

Bsp. 20 Die Zufallsvariable L gibt die Haarlänge von zwölfjährigen Mädchen an. L ist annähernd normalverteilt mit den Parametern $\mu = 24\ cm$ und $\sigma = 4\ cm$. Bestimme folgende Aufgaben nur mit Hilfe der Sigma-Intervalle. Denke an die Symmetrieeigenschaften der Dichtefunktion.



a. Markiere $\mu - 3\sigma, \mu - 2\sigma, \mu - \sigma, \mu + \sigma, \mu + 2\sigma, \mu + 3\sigma$ in der Graphik.

b. Gib an, wie viel % in jedem σ-Teilbereich enthalten sind.
Gemeint sind folgende Intervalle: $[\mu - 3\sigma; \mu - 2\sigma]$, $[\mu - 2\sigma; \mu - \sigma]$, $[\mu - \sigma; \mu]$, ...

c. Bestimme die Wahrscheinlichkeit nur mit Hilfe der Sigma-Intervalle, dass die Haare von einem zufällig gewählten Mädchen...

(i) ... zwischen 20 cm und 28 cm lang sind. $P(20 \le L \le 28) \approx 0{,}683$	(ii) ... zwischen 20 cm und 24 cm lang sind. $P(20 \le L \le 24) \approx 0{,}341$	(iii) ... kürzer als 20 cm sind. $P(L \le 20) = 0{,}5 - 0{,}341$ $= 0{,}159$
(iv) ... zwischen 12 cm und 28 cm lang sind. $P(12 \le L \le 28) \approx 0{,}839$	(v) ... länger als 20 cm sind. $P(L \ge 20) = 1 - P(L \le 20)$ $= 0{,}841$	(vi) ... länger als 36 cm sind. $P(L \ge 36) = 0{,}5 - 0{,}341 - 0{,}136 - 0{,}021$ $= 0{,}002$

d. In welchem symmetrischen Intervall um den Erwartungswert liegen 99,7% aller Haarlängen?

[12cm ; 36cm]

Bsp. 21 Die Zufallsvariable X gibt die Zeit in Minuten an, die eine Person A erfahrungsgemäß zu einem ausgemachten Termin zu spät kommt. X ist annähernd normalverteilt mit den Parametern $\mu = 17\ min$ und $\sigma = 3\ min$.

a. In welchem symmetrischen Intervall um den Erwartungswert liegen (i) 68,3 %, (ii) 95,4 % bzw. (iii) 99,7 % der Werte?

(i) [14; 20] (ii) [11; 23] (iii) [8; 26]

b. Berechne mit Hilfe der Sigma-Intervalle: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Person A zu einem zufällig gewählten Termin um (i) maximal 11 Minuten, (ii) zwischen 14 Minuten und 23 Minuten, bzw. (iii) mindestens 26 Minuten zu spät kommt?

(i) $P(X \le 11) = 0{,}5 - 0{,}341 = \underline{0{,}159}$

(ii) $P(14 \le X \le 23) = 0{,}341 + 0{,}341 + 0{,}136 = \underline{0{,}818}$

(iii) $P(X \ge 26) = 0{,}5 - 0{,}341 - 0{,}136 - 0{,}021$
$= \underline{\underline{0{,}002}}$

Bsp. 22: Die Zufallsvariable Z ist standardnormalverteilt mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$. Die Funktion φ ist die Dichtefunktion, die Funktion ϕ ist die Verteilungsfunktion von Z.

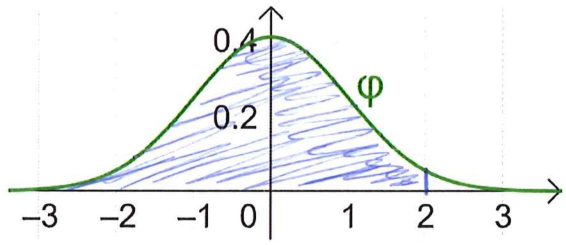
a. Kreuze jeweils die **beiden** zutreffenden Aussagen an.

$\varphi(0) = 0{,}5$	O
$\varphi(-3) = \varphi(3)$	X
$\varphi(0) < \varphi(2)$	O
$\varphi(3) - \varphi(-3) = 0$	X
$\varphi(3) = \varphi(1) + \varphi(2)$	O

$\phi(0) = 0{,}5$	X
$\phi(-1) = \phi(1)$	O
$P(Z \leq 2) = \phi(2)$	X
$P(-2 \leq Z \leq 1) = \phi(1)$	O
$\phi(1) = \phi(0) + \phi(1)$	O

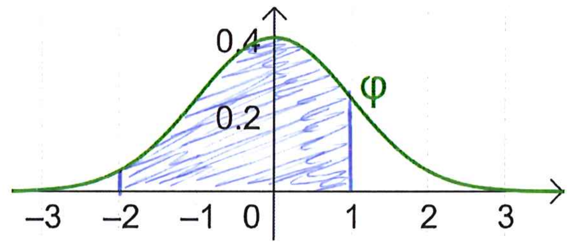
b. Markiere und berechne die Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der ϕ-Tabelle. Kontrolliere durch Technologieeinsatz.

$P(Z \leq 2)$



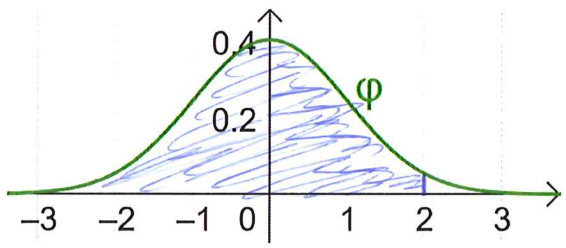
$\phi(2) = 0{,}9772$

$P(-2 \leq Z \leq 1)$



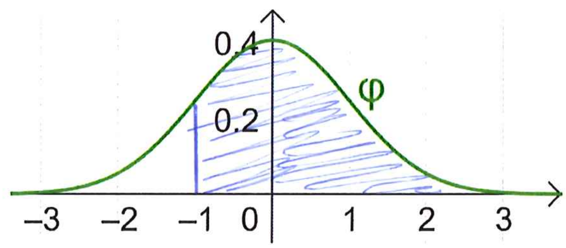
$\phi(1) - \phi(-2) = 0{,}8413 - 0{,}0228 = 0{,}8185$

$\phi(2)$



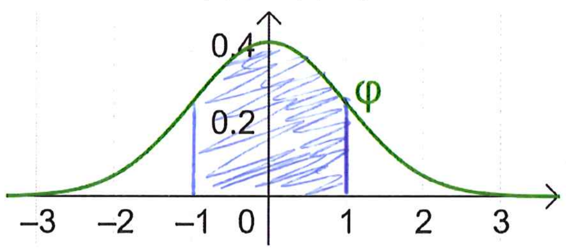
$\phi(2) = 0{,}9772$

$1 - \phi(-1)$



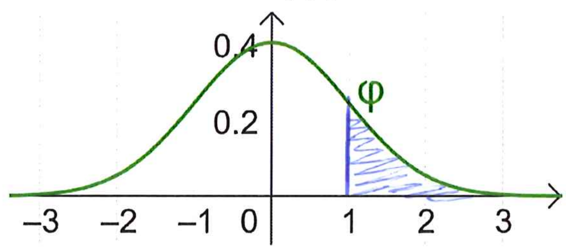
$1 - 0{,}1587 = 0{,}8413$

$\phi(1) - \phi(-1)$



$0{,}8413 - 0{,}1587 = 0{,}6826$

$1 - \phi(1)$



$1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

Bsp. 23 Die Zufallsvariable Z ist standardnormalverteilt mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$. Berechne die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der ϕ-Tabelle.

a. $P(Z \leq 0{,}47)$ $= \phi(0{,}47) = \underline{0{,}6808}$	**b.** $P(Z \leq -2{,}86)$ $\phi(-2{,}86) = \underline{0{,}0021}$	**c.** $P(Z \geq 0{,}06)$ $1 - \phi(0{,}06) =$ $1 - 0{,}5239 = \underline{0{,}4761}$
d. $P(-0{,}34 \leq Z \leq 0{,}89)$ $\phi(0{,}89) - \phi(-0{,}34) =$ $0{,}8133 - 0{,}3669 = \underline{0{,}4464}$	**e.** $P(-2{,}21 \leq Z \leq 2{,}39)$ $\phi(2{,}39) - \phi(-2{,}21) =$ $0{,}9916 - 0{,}0136 =$ $\underline{0{,}978}$	**f.** $P(Z \geq -2{,}61)$ $1 - \phi(-2{,}61) =$ $1 - 0{,}0045 = \underline{0{,}9955}$

Umkehraufgabe – Musteraufgabe:

Gegeben ist eine standardnormalverteilte Zufallsvariable Z. Es gilt: $\phi(z) = 0{,}36$. Bestimme den Wert von z.

➔ Nun ist nicht ein Wert für den Parameter z, sondern ein Wert der Verteilungsfunktion gegeben. Gesucht ist der Parameter z, für den gilt:

$$\phi(z) = P(Z \leq z) = 0{,}36$$

➔ Suche in der ϕ- Tabelle den Wert, der 0,36 (3600) am nächsten liegt. Lies den Wert für z ab.

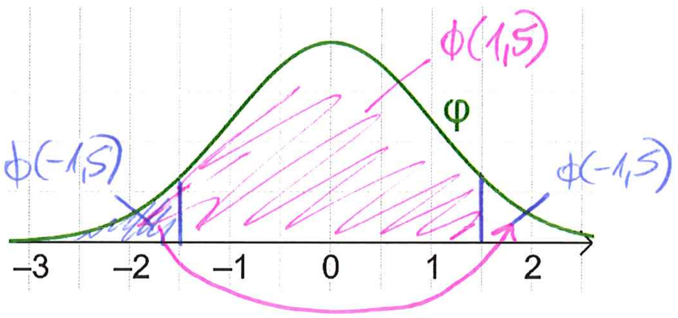
z	$\phi(z)$	$\phi(-z)$
	0,	0,
0,35	3632	6368
0,36	**3594**	6406

Ergebnis: $z = 0{,}36$

Bsp. 24 Die Zufallsvariable Z ist standardnormalverteilt mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$. Bestimme den Wert von z mit Hilfe der ϕ-Tabelle.

a. $\phi(z) = 0{,}16$ (1600) $z = -0{,}99$	**b.** $\phi(z) = 0{,}98$ $z = 2{,}05$	**c.** $\phi(z) = 0{,}764$ $z = 0{,}72$
d. $\phi(z) = 0{,}434$ $z = -0{,}17$	**e.** $\phi(z) = 0{,}10$ $z = -1{,}28$	**f.** $\phi(z) = 0{,}56$ $z = 0{,}15$
g. $\phi(z) - \phi(-z) = 0{,}20$ $\phi(z) = 0{,}6$ $z = 0{,}25$	**h.** $\phi(z) - \phi(-z) = 0{,}90$ $\phi(z) = 0{,}95$ $z = \frac{1{,}64 + 1{,}65}{2} = 1{,}645$	**i.** $\phi(z) - \phi(-z) = 0{,}46$ $\phi(z) = 0{,}73$ $z = 0{,}61$

Bsp. 25 Die Zufallsvariable Z ist standardnormalverteilt. Wie hängen $\phi(1{,}5)$ und $\phi(-1{,}5)$ miteinander zusammen? Versuche, dir diese Überlegung graphisch vorzustellen. Kannst du eine allgemeine Bedingung für $\phi(z)$ und $\phi(-z)$ aufstellen?

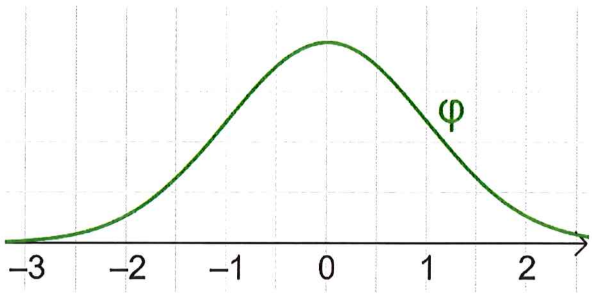


$\phi(1{,}5) = 1 - \phi(-1{,}5)$
$\phi(-1{,}5) = 1 - \phi(1{,}5)$

$\phi(z) = 1 - \phi(-z)$
$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

Bsp. 26 Die Zufallsvariable Z ist standardnormalverteilt. Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an. Verwende die Graphik, um dir die Aussagen zu veranschaulichen.

$\phi(z) = \phi(-z)$	O
$\phi(z) - 1 = \phi(-z)$	O
$1 - \phi(z) = \phi(-z)$	X
$1 - \phi(-z) = \phi(z)$	O
$0 \leq \phi(-z) \leq 1$	X



Bsp. 27 In einer Packung sind 40mm lange Schrauben enthalten. Bei der Produktion kommt es zu geringfügigen Abweichungen, sodass die Länge einer Schraube annähernd normalverteilt mit den Parametern $\mu = 40mm$ und $\sigma = 2mm$ ist.

Bemerkung: Führe alle Berechnungen ohne Technologie-Einsatz durch (erwünscht: Kontrolle mit Technologie).

a. Eine Schraube wird nach Ende der Produktion zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Schraube...

i. ... maximal 41 mm lang ist.	ii. ... mindestens 43 mm lang ist.	iii. ... zwischen 37 und 45 mm lang ist.
$P(X\le 41) \Rightarrow z=\frac{41-40}{2}$ $z=0{,}5$ $\phi(0{,}5)=0{,}6915$ $P(X\le 41)=0{,}6915$	$P(X\ge 43)=1-P(X\le 43)$ $\phi(z)$ $z=\frac{43-40}{2}=1{,}5$ $\phi(1{,}5)=0{,}9332$ $P(X\ge 43)=1-0{,}9332=0{,}0668$	$P(37\le X\le 45)$ $z_1: \frac{45-40}{2}=2{,}5 \Rightarrow \phi(2{,}5)=0{,}9938$ $z_2: \frac{37-40}{2}=-1{,}5 \Rightarrow \phi(-1{,}5)=0{,}0668$ $\Rightarrow 0{,}9938-0{,}0668=0{,}927$

b. Wie lang darf die Schraube nach Produktionsende sein, dass sie zu den ...

i. 40% der kürzesten Schrauben zählt.	ii. ... 10% der längsten Schrauben zählt.
$P(X\le a)=0{,}4 \Leftrightarrow \phi(z)=0{,}4$ $\to z=-0{,}25$ $z=\frac{a-\mu}{\sigma}$ $\Rightarrow a=z\cdot\sigma+\mu=39{,}5$ $\Rightarrow$ maximal 39,5mm	$P(X\ge a)=0{,}1 \Leftrightarrow P(X\le a)=0{,}9$ $\phi(z)=0{,}9 \Rightarrow z=1{,}28$ $\Rightarrow a=1{,}28\cdot 2+40=42{,}56$ $\Rightarrow$ mindestens 42,56mm

Bsp. 28 Die Dauer, bis ein Handy von 0% auf 100% voll aufgeladen ist, ist annähernd normalverteilt mit den Parametern $\mu = 60\ min$ und $\sigma = 5\ min$.

Bemerkung: Führe alle Berechnungen ohne Technologie-Einsatz durch (erwünscht: Kontrolle mit Technologie).

a. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewähltes Handy (0% Akku)...

i. ... höchstens 47 Minuten zum Aufladen benötigt.	ii. ... mindestens 56 Minuten zum Aufladen benötigt.	iii. ... zwischen 51 und 73 Minuten zum Aufladen benötigt.
$P(X\le 47) \Rightarrow z=\frac{47-60}{5}=-2{,}6$ $\phi(-2{,}6)=0{,}0047$ $P(X\le 47)=0{,}0047$	$P(X\ge 56)=1-P(X\le 56)$ $z=\frac{56-60}{5}=-0{,}8$ $\phi(-0{,}8)=0{,}2119$ $P(X\ge 56)=1-0{,}2119=0{,}7881$	$z_1=\frac{51-60}{5}=-1{,}8 \Rightarrow \phi(-1{,}8)=0{,}0359$ $z_2=\frac{73-60}{5}=2{,}6 \Rightarrow \phi(2{,}6)=0{,}9953$ $\Rightarrow 0{,}9953-0{,}0359=0{,}9594$

b. Wie lange darf das Aufladen eines Handys dauern, dass es zu den 5 % der Handys gehört, die am kürzesten zum Aufladen benötigen.

$P(X\le a)=0{,}05$

$\phi(z)=0{,}05 \Rightarrow z=-1{,}645$

$z=\frac{a-\mu}{\sigma} \Rightarrow a=z\cdot\sigma+\mu$

$a=-1{,}645\cdot 5+60$

$a=51{,}78$

A: Es darf maximal 51,78 min dauern!

Bsp. 29 Die Masse von frisch geernteten Kartoffeln ist annähernd normalverteilt mit den Parametern $\mu = 121\ Gramm$ und $\sigma = 22\ Gramm$.

Bemerkung: Führe alle Berechnungen ohne Technologie-Einsatz durch (erwünscht: Kontrolle mit Technologie).

a. Ein Verkäufer möchte die Kartoffeln je nach Masse in verschiedene Packungen einteilen. Folgende Einteilungen trifft der Verkäufer:

(i) Die leichtesten 24 % werden nicht verkauft.

(ii) Die schwersten 30 % kommen in die Packung „extra groß".

(iii) Die restlichen Kartoffeln kommen in die Packung „mittlere Größe".

Gib an, wie schwer die Kartoffeln für die einzelnen Unterteilungen sein dürfen.

① $P(X \leq a) = 0{,}24$

$\phi(z) = 0{,}24 \Rightarrow z = -0{,}71$

$a = z \cdot \sigma + \mu = 105{,}38\,g$

② $P(X \geq b) = 0{,}3$

$\Leftrightarrow P(X \leq b) = 0{,}7$

$\phi(z) = 0{,}7 \Rightarrow z = 0{,}52$

$b = 0{,}52 \cdot 22 + 121 = 132{,}44\,g$

① NICHT verkauft: weniger als 105,38 g

② Mittlere Größe: [105,38; 132,44]

③ extra groß: ab 132,44 g

b. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse einer Kartoffel...

i. ... maximal 97 Gramm beträgt.	ii. ... mindestens 141 Gramm beträgt.	iii. ... zwischen 104 und 119 Gramm hat.
$P(X \leq 97) \Rightarrow z = \frac{97-121}{22} = -1{,}09$ $\phi(-1{,}09) = \underline{\underline{0{,}1379}}$	$P(X \geq 141) = 1 - P(X \leq 141)$ $z = \frac{141-121}{22} = 0{,}91$ $\phi(0{,}91) = 0{,}8186$ $1 - 0{,}8186 = \underline{\underline{0{,}1814}}$	$z_1 = \frac{119-121}{22} = -0{,}09$ $\phi(-0{,}09) = 0{,}4641$ $z_2 = -0{,}77 \Rightarrow \phi(-0{,}77) = 0{,}2206$ $\Rightarrow 0{,}4641 - 0{,}2206 = \underline{\underline{0{,}2435}}$

Bsp. 30) Eine Maschine füllt Nudelverpackungen ab. Die Abfüllmenge X ist annähernd normalverteilt mit den Parametern $\mu = 290g$ und $\sigma = 5g$.

Bemerkung: Führe alle Berechnungen ohne Technologie-Einsatz durch (erwünscht: Kontrolle mit Technologie).

a. Welche Masse...

(i) ... überschreiten 73 % aller Nudelverpackungen?	(i) ... unterschreiten 22 % aller Nudelverpackungen?
$P(X \geq a) = 0{,}73 \Leftrightarrow P(X \leq a) = 0{,}27$ $\phi(z) = 0{,}27 \Rightarrow z = -0{,}61$ $z = \frac{a-\mu}{\sigma} \Rightarrow a = z\sigma + \mu = \underline{\underline{286{,}95\,g}}$	$P(X \leq a) = 0{,}22$ $\phi(z) = 0{,}22$ $z = -0{,}77 \Rightarrow a = -0{,}77 \cdot 5 + 290 =$ $\underline{\underline{286{,}15\,g}}$

b. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse einer Nudelverpackung...

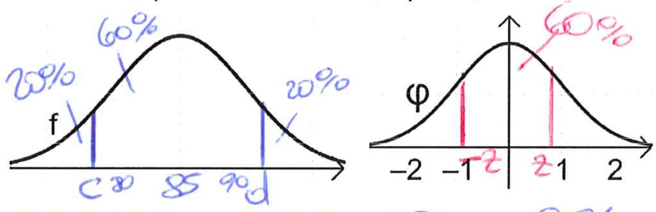
i. ... maximal 287 Gramm beträgt.	ii. ... mindestens 291 Gramm beträgt.	iii. ... zwischen 279 und 301 Gramm beträgt.
$P(X \leq 287) \Rightarrow z = \frac{287-290}{5}$ $z = -0{,}6 \Rightarrow \phi(-0{,}6) = 0{,}2743$ $\underline{\underline{27{,}43\,\%}}$	$P(X \geq 291) = 1 - P(X \leq 291)$ $z = \frac{291-290}{5} = 0{,}2$ $\phi(0{,}2) = 0{,}5793$ $1 - 0{,}5793 = \underline{\underline{0{,}4207}}$	$z_1 = \frac{279-290}{5} = -2{,}2$ $\phi(-2{,}2) = 0{,}0139$ $z_2 = 2{,}2 \Rightarrow \phi(2{,}2) = 0{,}9861$ $0{,}9861 - 0{,}0139 = \underline{\underline{0{,}9722}}$

FORMEL: $z=\frac{x-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow x=z\cdot\sigma+\mu$

Bsp. 31 Gegeben ist eine normalverteilte Zufallsvariable X mit den Parametern μ und σ. Bestimme ein symmetrisches Intervall $[c; d]$ um den Erwartungswert, dessen Werte mit einer Wahrscheinlichkeit von γ auftreten. Es gilt: $P(c \le X \le d) = \gamma$. Mache dir eine Skizze.

Bemerkung: Führe alle Berechnungen ohne Technologie-Einsatz durch (erwünscht: Kontrolle mit Technologie).

$\mu = 85$, $\sigma = 5$, $\gamma = 0{,}60$



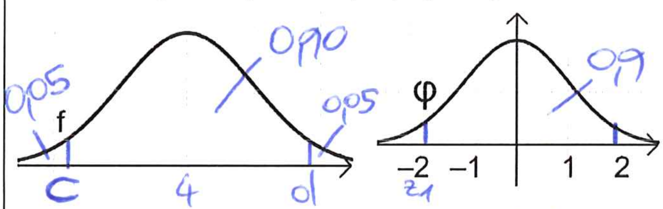
$\phi(z_1)=0{,}2 \Rightarrow z_1=-0{,}84 \Leftrightarrow z=0{,}84$

$c=-0{,}84\cdot5+85=80{,}8$

$d=+0{,}84\cdot5+85=89{,}2$

$[80{,}8 ; 89{,}2]$

$\mu = 4$, $\sigma = 0{,}4$, $\gamma = 0{,}90$



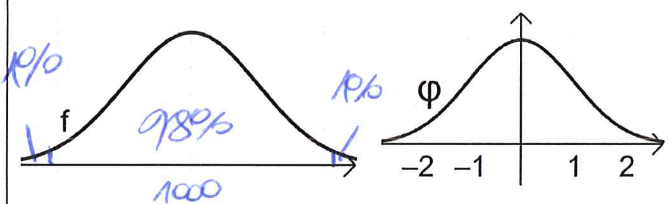
$\phi(z_1)=0{,}05 \Rightarrow z_1=-z=-1{,}645$

$z=+1{,}645$

$c=-1{,}645\cdot0{,}4+4=3{,}342$

$d=+1{,}645\cdot0{,}4+4=4{,}658$ $\Rightarrow [3{,}342 ; 4{,}658]$

$\mu = 1000$, $\sigma = 200$, $\gamma = 0{,}98$



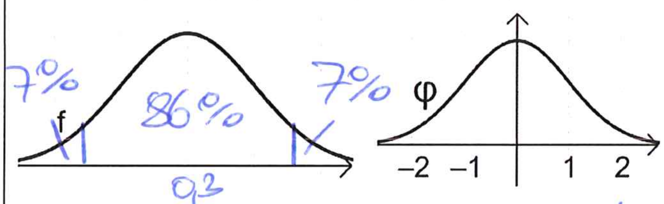
$\phi(-z)=0{,}01 \Rightarrow -z=-2{,}33$ $z=2{,}33$

$c=-2{,}33\cdot200+1000=534$

$d=2{,}33\cdot200+1000=1466$

$[534 ; 1466]$

$\mu = 0{,}3$, $\sigma = 0{,}01$, $\gamma = 0{,}86$



$\phi(-z)=0{,}07 \Rightarrow -z=-1{,}48$ $z=1{,}48$

$c=-1{,}48\cdot0{,}01+0{,}3=0{,}2852$

$d=1{,}48\cdot0{,}01+0{,}3=0{,}3148$

$[0{,}2852 ; 0{,}3148]$

Bsp. 32 Die Körpergröße einer Personengruppe ist annähernd normalverteilt mit den Parametern $\mu = 178\ cm$ und $\sigma = 4\ cm$.

Bemerkung: Führe alle Berechnungen ohne Technologie-Einsatz durch (erwünscht: Kontrolle mit Technologie).

a. Welche Mindestgröße haben 70 % der Personen?

$P(X \ge a)=0{,}7$

$\Leftrightarrow P(X \le a)=0{,}3 \Rightarrow \phi(z)=0{,}3 \Rightarrow z=-0{,}52$

$\Rightarrow a=-0{,}52\cdot4+178=175{,}92cm$

b. In welchem symmetrischen Intervall um den Erwartungswert liegt die Körpergröße von (i) 60% bzw. (ii) 98% aller Personen?

① 60%

$\phi(-z)=0{,}2 \Rightarrow -z=-0{,}84$ $z=0{,}84$

$c=-0{,}84\cdot4+178=174{,}64cm$

$d=0{,}84\cdot4+178=181{,}36cm$

$[174{,}64 ; 181{,}36]$

② 98%

$\phi(-z)=0{,}01 \Rightarrow -z=-2{,}33$ $z=2{,}33$

$c=-2{,}33\cdot4+178=168{,}68cm$

$d=2{,}33\cdot4+178=187{,}32cm$

$[168{,}68 ; 187{,}32]$

$* \quad z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad x = z \cdot \sigma + \mu$

Bsp.33) Eine Maschine produziert Tennisschläger, deren Masse annähernd normalverteilt mit den Parametern $\mu = 305g$ und $\sigma = 0{,}7g$ ist.

a. In Verkauf kommen nur 94% der Tennisschläger, deren Masse im symmetrischen Intervall um den Erwartungswert liegen. Welche Masse darf ein Schläger haben, dass er in den Verkauf kommt? Wie würden sich die Toleranzgrenzen ändern, wenn 98% in den Verkauf kommen?

① 94%

$\phi(-z) = 0{,}03 = -z = -1{,}88 \qquad z = 1{,}88$

$* \; c = -1{,}88 \cdot 0{,}7 + 305 = 303{,}7g$

$d = 1{,}88 \cdot 0{,}7 + 305 = 306{,}3g$

$[303{,}7 ; 306{,}3]$

② 98% $\quad \phi(-z) = 0{,}01 \to -z = -2{,}33$

$z = 2{,}33$

$* \; c = -2{,}33 \cdot 0{,}7 + 305 = 303{,}4g$

$d = 2{,}33 \cdot 0{,}7 + 305 = 306{,}6g$

$[303{,}4 ; 306{,}6]$

b. Ein Käufer möchte einen Schläger kaufen, der zu den 2% der schwersten zählt. Welche Masse muss der Schläger mindestens haben?

$P(X \geq a) = 0{,}02 \iff P(X \leq a) = 0{,}98 \qquad \phi(z) = 0{,}98 \iff z = 2{,}05$

$* \; a = 2{,}05 \cdot 0{,}7 + 305 = 306{,}4g \qquad$ mindestens 306,04g

c. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig gewählter Schläger maximal 306 Gramm?

$P(X \leq 306) \qquad \Rightarrow \phi(1{,}43) = 0{,}9236$

$z = \frac{306-305}{0{,}7} = 1{,}43 \qquad 92{,}36\%$

Bsp.34 Die Zufallsvariable X gibt die Menge von Milch in Milliliter an, die in einer 1-Liter-Packung enthalten sind. X ist annähernd normalverteilt mit den Parametern $\mu = 1000\ ml$ und $\sigma = 1{,}2\ ml$.

a. Wie viele ml Milch sind in 90% der Milchpackungen mindestens enthalten?

$P(X \geq a) = 0{,}9 \quad \Rightarrow \phi(z) = 0{,}1 \Rightarrow z = -1{,}28$

$\iff P(X \leq a) = 0{,}1 \qquad * \; a = -1{,}28 \cdot 1{,}2 + 1000 = 998{,}46ml$

b. 4% der Packungen, die die geringste Milchmenge aufweisen, dürfen nicht verkauft werden. Wie viele Milliliter muss eine Milchpackung für den Verkauf haben?

$P(X \leq a) = 0{,}04$

$\phi(z) = 0{,}04 \Rightarrow z = -1{,}75 \quad \Rightarrow * \; a = -1{,}75 \cdot 1{,}2 + 1000 = 997{,}9ml$

c. In welchem symmetrischen Bereich um den Erwartungswert liegen 84% der Milchpackungen? Gib die Grenzwerte in ml an.

84%:

$\phi(-z) = 0{,}08 \Rightarrow -z = -1{,}41$

$z = 1{,}41$

$* \; c = -1{,}41 \cdot 1{,}2 + 1000 = 998{,}3ml$

$d = 1{,}41 \cdot 1{,}2 + 1000 = 1001{,}7ml$

$[998{,}3 ; 1001{,}3]$

4. Bestimmung von Parametern der Normalverteilung

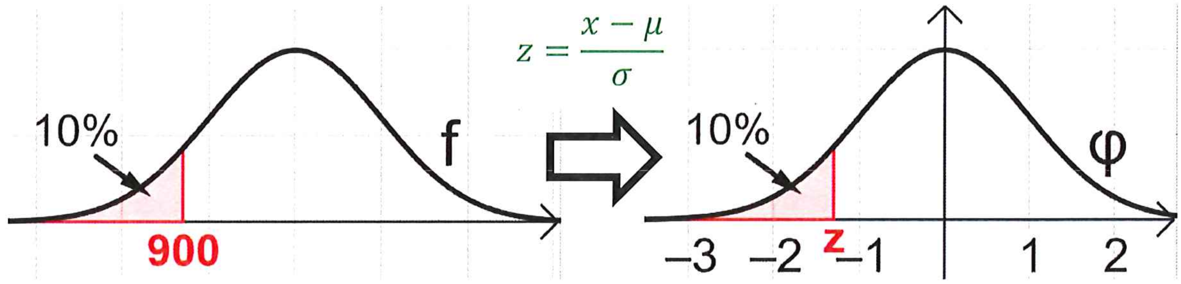
Umkehraufgabe Typ 3: Erwartungswert μ ist gesucht

Musterbeispiel: Die Lebensdauer eines Rasenmähers ist annähernd normalverteilt mit den Parametern μ und σ. Die Standardabweichung beträgt 50 Stunden. Berechne den **Erwartungswert**, wenn 10% der Rasenmäher eine maximale Lebensdauer von 900 Stunden haben.

$$P(X \leq 900) = 0{,}1$$

Bestimmung ohne Technologie – Transformation zur Standardnormalverteilung

Graphische Veranschaulichung:



Schritt 1: Bestimmung des Wertes für z. Es gilt: $\phi(z) = 0{,}1 \rightarrow$ ϕ-Tabelle:

z	$\phi(z)$	$\phi(-z)$
	0,	0,
1,28	8997	**1003**
1,29	9015	0985

$z = -1{,}28$

$\mu = x - z \cdot \sigma$

Schritt 2: Bestimmung des Erwartungswertes

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ Werte einsetzen: $-1{,}28 = \frac{900-\mu}{50}$

Umformen der Formel: $\mu = 900 + 1{,}28 \cdot 50 = 964$ Stunden.

GeoGebra – CAS (Gleichung lösen):

$$\text{Normal}(m, 50, 900) = 0.1$$

NLöse: $\{\mathbf{m = 964.07758}\}$

Bsp. 35 Eine Abfüllanlage für Fruchtsäfte liefert normalverteilte Füllungen. Die Standardabweichung beträgt stets $\sigma = 6\ ml$. Der Erwartungswert kann beliebig eingestellt werden.

Wie muss man den Erwartungswert einstellen, wenn…

(i) 85% der Flaschen höchstens 600 ml enthalten sollen.	(i) 20% der Flaschen mindestens ~~1400~~ 1200 ml enthalten sollen.
$P(X \leq 600) = 0{,}85$ $\phi(z) = 0{,}85 \Rightarrow z = 1{,}04$ $z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow z\sigma = x - \mu$ $* \ \mu = x - z\sigma$ $\mu = 600 - 1{,}04 \cdot 6 = \underline{\underline{593{,}76\ ml}}$	$P(X \geq 1200) = 0{,}2$ $\Leftrightarrow P(X \leq 1200) = 0{,}8$ $\phi(z) = 0{,}8 \Rightarrow z = 0{,}84$ $* \ \mu = 1200 - 0{,}84 \cdot 6 = \underline{\underline{1194{,}96\ ml}}$

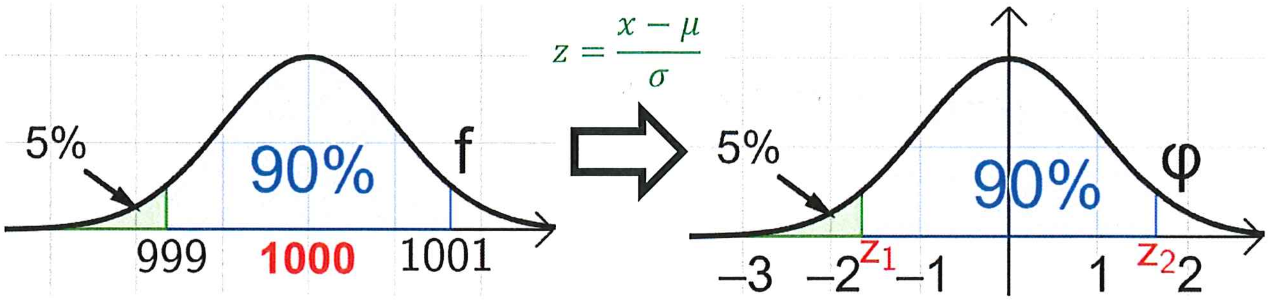
Umkehraufgabe Typ 4: Standardabweichung σ ist gesucht

Musterbeispiel: Eine Abfüllanlage für Fruchtsäfte liefert normalverteilte Füllungen. Bei der Produktion von 1000 ml – Flaschen beträgt der Erwartungswert $\mu = 1000\ ml$. Der Erwartungswert kann beliebig eingestellt werden. Welche Standardabweichung darf die Abfüllanlage haben, wenn 90 % der Flaschen um maximal ± 1 ml von der erwünschten Füllmenge abweichen.

$$P(999 \leq X \leq 1001) = 0{,}9$$

Bestimmung ohne Technologie – Transformation zur Standardnormalverteilung

Graphische Veranschaulichung:



Schritt 1: Bestimmung des Wertes für z_1 oder z_2. Es gilt:

$\phi(z_1) = 0{,}05$

$\phi(z_2) = 0{,}95$

z	$\phi(z)$	$\phi(-z)$
	0,	0,
1,64	9495	0505
1,65	9505	0495

$z_1 = -1{,}645$

$z_2 = 1{,}645$

Schritt 2: Bestimmung der Standardabweichung

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ Werte einsetzen z.B. über 999 und z_1: $-1{,}645 = \frac{999-1000}{\sigma}$

Umformen der Formel: $\sigma = \frac{999-1000}{-1{,}645} = \frac{-1}{-1{,}645} = 0{,}608$

Ergebnis: Die Standardabweichung darf höchstens 0,608 ml betragen.

GeoGebra – CAS (Gleichung lösen):

$$\text{Normal}(1000, s, 999) = 0.05$$

NLöse: $\{s = 0.60796\}$

Bsp. 36 Eine Abfüllanlage für Erdbeermarmelade liefert normalverteilte Füllungen.

a. Mit dieser Abfüllanlage werden 450g-Marmeladengläser befüllt. Der Erwartungswert $\mu = 450g$. Welchen Wert darf die Standardabweichung höchstens annehmen, wenn...

(i) ...98% der Marmeladengläser um maximal ± 2 Gramm vom Erwartungswert abweichen dürfen.	(ii) ... 90% der Gläser eine Füllmenge von 450,5 Gramm nicht überschreiten dürfen.
$P(448 \leq X \leq 452) = 0{,}98$ $\phi(z) = 0{,}01 \rightarrow z = -2{,}33$ $\sigma = \frac{x-\mu}{z} = \frac{448-450}{-2{,}33} = \underline{\underline{0{,}858g}}$	$P(X \leq 450{,}5) = 0{,}9$ $\phi(z) = 0{,}9 \Rightarrow z = 1{,}28$ $\sigma = \frac{450{,}5-450}{1{,}28} = \underline{\underline{0{,}39g}}$

$* \quad \mu = x - z \cdot \sigma$

b. Mit dieser Abfüllanlage werden weitere Marmeladengläser verschiedener Größen befüllt. Die Standardabweichung σ beträgt 3 Gramm. Wie groß ist der Erwartungswert, wenn...

(i) 60% der Gläser maximal 260 Gramm Erdbeermarmelade enthalten.	(ii) 90% der Gläser mindestens 600 Gramm Erdbeermarmelade enthalten.
$P(X \leq 260) = 0{,}6$ $\Phi(z) = 0{,}6 \Rightarrow 0{,}25 = z$ $z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow \mu = x - z \cdot \sigma$ $* \quad \mu = 260 - 0{,}25 \cdot 3 = \underline{\underline{259{,}25\,g}}$	$P(X \geq 600) = 0{,}9$ $P(X \leq 600) = 0{,}1$ $\Phi(0{,}1) \Rightarrow -1{,}28 = z$ $* \quad \mu = 600 + 1{,}28 \cdot 3 = \underline{\underline{603{,}84\,g}}$

Bsp. 37) Die Lebensdauer einer Maschine ist annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert von 2000 Stunden.

a. Wie groß ist die Standardabweichung σ, wenn die Lebensdauer von 86% der Maschinen zwischen 1800 Stunden und 2200 Stunden beträgt.

$P(1800 \leq X \leq 2200) = 0{,}86$

$\Rightarrow P(X \leq 1800) = 0{,}07$

$\Phi(z) = 0{,}07 \Rightarrow z = -1{,}48$

$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow \sigma = \frac{x-\mu}{z}$

$\sigma = \frac{1800-2000}{-1{,}48} = \underline{\underline{135{,}1\,h}}$

b. Welchen Wert darf die Standardabweichung höchstens annehmen, wenn eine Maschine mit 92%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens 1980 Stunden einsatzfähig sein soll.

$P(X \geq 1980) = 0{,}92$

$P(X \leq 1980) = 0{,}08$

$\Phi(z) = 0{,}08 \Rightarrow z = -1{,}41$

$\sigma = \frac{1980-2000}{-1{,}41} = \underline{\underline{14{,}18\,h}}$

c. In Zukunft möchten die Hersteller die Lebensdauer der Maschine vergrößern. Dabei wird gewünscht, dass die Laufzeit von 95% der Maschinen über 2200 Stunden liegen soll. Die Standardabweichung der neuen Maschine soll 50 Stunden betragen. Berechne den Erwartungswert.

$P(X \geq 2200) = 0{,}95$

$P(X \leq 2200) = 0{,}05$

$\Phi(z) = 0{,}05 \Rightarrow -1{,}645$

$\mu = x - z \cdot \sigma$

$\mu = 2200 + 1{,}645 \cdot 50$

$\underline{\underline{\mu = 2282{,}25\,h}}$

5. Annäherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

WH-Binomialverteilung:

Video 22

Wird ein **Bernoulli-Experiment** (zwei Ereignisse: Erfolg & Misserfolg || jeder Versuch wird unter gleichen Bedingungen ausgeführt – WSK bleiben gleich) **n-mal** mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p durchgeführt und gibt die diskrete Zufallsvariable X die Anzahl der Versuche an, bei denen das Ereignis E mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p eintritt, so gilt für die Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$:

$$f(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad mit\ 0 \le p \le 1\ und\ k = 0,1,2, \ldots, n$$

- Die diskrete Zufallsvariable X heißt binomialverteilt.
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung f wird als Binomialverteilung $B(n,p)$ mit den Parametern n und p bezeichnet.

- **Erwartungswert** von X: $E(X) = \mu = n \cdot p$
- **Varianz** von X: $V(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$
- **Standardabweichung** von X: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Bemerkungen zur Formel:

k: Wie oft tritt Erfolg ein?

$n - k$: Wie oft tritt Misserfolg ein?

n: Anzahl der Versuche

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$
Anzahl der Möglichkeiten, dass bei n Versuchen k Mal Erfolg eintritt

Erfolgswahrscheinlichkeit p
Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt Erfolg ein?

$1 - p$:
Wahrscheinlichkeit für Misserfolg

Bsp. 38) Beim Tennisspielen gewinnt Markus erfahrungsgemäß zu 80 % einen Satz gegen Paul. Markus und Paul spielen an diesem Tag am Vormittag vier Sätze und am Nachmittag weitere drei.

Video 23

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gewonnenen Sätze von Paul an diesem Tag an.

a. Ist die Zufallsvariable X binomialverteilt? Begründe. JA! $n=7, p=0{,}2$ ✓

b. ~~Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung als Tabelle und graphisch als Diagramm dar.~~

c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Paul maximal drei Sätze gewinnt. $P(X \le 3) = 0{,}967$

d. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Paul mindestens fünf Sätze gewinnt. $P(X \ge 5) = 0{,}0047$

e. Am nächsten Tag sind sie etwas müde und spielen weniger Sätze. Interpretiere den Ausdruck im gegebenen Kontext:

$$\binom{5}{3} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 + \binom{5}{4} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^1 + 0{,}8^5$$

✓ WSK, dass Markus von 5 Sätzen mind. 3 gewinnt

f. Bestimme den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung.

$\mu = 7 \cdot 0{,}2 = 1{,}4$

$V(X) = 7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 1{,}12 \Rightarrow \sigma = \sqrt{1{,}12} = 1{,}058$

Bsp. 39) Bei einer Produktion von Spielkonsolen ist ein Gerät erfahrungsgemäß zu einem Prozent defekt. Es werden 200 Konsolen auf ihre Funktionalität überprüft. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl geprüften Geräte, die fehlerhaft sind.

a. Ist die Zufallsvariable X binomialverteilt? JA: $n = 200$, $p = 0{,}01$

b. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass maximal drei Geräte defekt sind.

$P(X \leq 3) = 0{,}858 = 85{,}8\,\%$

c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Überprüfung kein Gerät defekt ist.

$P(X = 0) = 0{,}134 = 13{,}4\,\%$

d. Bestimme den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung. Interpretiere den Erwartungswert im Kontext.

$\mu = 200 \cdot 0{,}01 = \underline{\underline{2}}$ $\quad V(X) = 2 \cdot 0{,}99 = \underline{\underline{1{,}98}}$

$\sigma = \sqrt{2 \cdot 0{,}99} \approx \underline{\underline{1{,}4}}$

Würde man sehr oft 200 Konsolen überprüfen, so wären im Schnitt 2 Konsolen defekt!

Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Video 24

Satz von Moivre-Laplace:

Ist der **Parameter n** genügend groß, kann eine **Binomialverteilung** mit den Parametern n und p durch eine **Normalverteilung** mit den Parametern $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ angenähert werden.

Faustregel: Eine Binomialverteilung darf durch eine Normalverteilung ersetzt werden, wenn folgendes gilt:

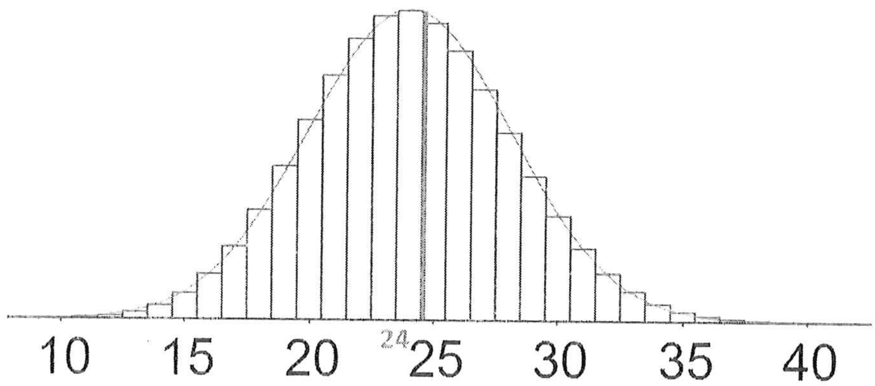
$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} > 3$$

Graphische Veranschaulichung: Binomialverteilung mit $n = 80$ und $p = 0{,}3$

$$\mu = n \cdot p = 80 \cdot 0{,}3 = 24$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{80 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} \approx 4{,}1 > 3$$

Die Binomialverteilung darf durch eine Normalverteilung mit den Parametern $\mu = 24$ und $\sigma = 4{,}1$ angenähert werden.



Je größer n, desto exakter ist die Annäherung.

Bemerkung:
Die **Binomialverteilung** liefert **exakte Ergebnisse**. Die **Normalverteilung** ist nur eine **Annäherung**.

Stetigkeitskorrektur Um bessere Approximationen (Annäherungen) mit Hilfe von Normalverteilungen zu erhalten, führt man die **Stetigkeitskorrektur** ein. Dabei wird das Intervall bei einer Grenze um 0,5 vergrößert.	
Berechnung Binomialverteilung	**Berechnung Normalverteilung (Stetigkeitskorrektur)**
$P(X \leq 10)$	$P(X \leq 10{,}5)$
$P(X \geq 5)$	$P(X \geq 4{,}5)$
$P(14 \leq X \leq 19)$	$P(13{,}5 \leq X \leq 19{,}5)$

Bsp. 40 Eine binomialverteilte Zufallsvariable X ist mit den Parametern n und $p = 0{,}4$ gegeben. Berechne die gewünschte Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Binomialverteilung. Ist eine Annäherung durch die Normalverteilung erlaubt? Falls ja, berechne die Annäherung und gib die Differenz der Wahrscheinlichkeiten in % an.

n	$B(n; 0{,}4)$	$n \cdot p$ μ	$\sqrt{n \cdot p(1-p)}$ σ	Approximation erlaubt?	$N(\mu; \sigma)$	Differenz
60	$P(X \leq 30) =$ 0,9555	60·0,4 24	3,7947	✓	P(X≤30,5) 0,9566	0,0011
200	$P(X \leq 100) =$ 0,9983	80	6,9282	✓	P(X≤100,5) 0,9985	0,0002
1 000	$P(X \leq 400) =$ 0,5137	400	15,4919	✓	P(X≤400,5) 0,5129	0,0008

Bemerkung: X ist eine binomialverteilte Zufallsvariable mit $n = 90$ und $p = 0{,}45$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable den Wert $X = 44$ annimmt.

- **Binomialverteilung**: $P(X = 44) = \binom{90}{44} \cdot 0{,}45^{44} \cdot 0{,}55^{46} = 0{,}0638 = 6{,}38\ \%$

- **Normalverteilung**:
  Eine Annäherung durch die Normalverteilung ist erlaubt. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine normalverteilte (stetige) Zufallsvariable einen exakten Wert wie z.B. 44 annimmt, **ist stets 0**. Folgende Annäherung ist für einen Wert mit Hilfe der Stetigkeitskorrektur möglich:

$$P(X = 44) \approx P(43{,}5 \leq X \leq 44{,}5) = 0{,}0641 = 6{,}41\ \%$$

Bemerkung: Bestimme die folgenden Wahrscheinlichkeiten sowohl mit Hilfe einer Binomialverteilung als auch mit Hilfe einer Approximation durch die Normalverteilung (Denke stets nach, ob eine Approximation erlaubt ist!).

Bsp. 41 Beim Biathlon trifft ein Biathlet beim Liegend-Schießen mit 95 %-iger Wahrscheinlichkeit, sowie beim Stehend-Schießen mit 80%-iger Wahrscheinlichkeit die Zielscheibe.

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer an. Video 25

a. Im Sprint-Bewerb muss der Sportler fünf Schüsse liegend abgeben. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Sportler genau vier Mal die Scheibe trifft.

n=5
p=0,95

B: $P(X=4) = 0{,}2036$

NV: $\sigma = \sqrt{5 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05}$

$\sigma = 0{,}49 < 3$

NICHT erlaubt!

b. An einem Trainingstag werden 240 Schüsse stehend abgegeben. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Biathlet (i) genau 200, (ii) maximal 200, (iii) mindestens 170 Scheiben trifft.

BV: $n=240$ $p=0,8$

① $P(X=200)=0,0288$

② $P(X\leq 200)=0,9174$

③ $P(X\geq 170)=0,99974$

NV: $\mu=240\cdot 0,8=192$

$\sigma=\sqrt{240\cdot 0,8\cdot 0,2}=6,1967$ ✓ JA!

① $P(199,5\leq X\leq 200,5)=0,028$

② $P(X\leq 200,5)=0,9149$

③ $P(X\geq 169,5)=0,99986$

c. An einem Trainingstag legt der Biathlet eine Schussserie von 3.20 Schüssen in liegender Position hin. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Biathlet mindestens 309 Treffer erzielt.

BV

$n=320$ $p=0,95$

$P(X\geq 309)=0,1207$

NV: $\mu=320\cdot 0,95=304$

$\sigma=\sqrt{304\cdot 0,05}=3,8987>3$ ✓

$P(X\geq 308,5)=0,1242$

d. Am selben Trainingstag legt der Sportler noch eine Stehend-Serie hin. Interpretiere den Ausdruck im gegebenen Kontext:

$$\binom{20}{19}\cdot 0,8^{19}\cdot 0,2^{1}+\binom{20}{20}\cdot 0,8^{20}\cdot 0,2^{0}$$

Der Term gibt die WSK an, dass der Sportler von 20 Stehend-Schüssen mindestens 19 trifft.

Bsp.42 Ein Fußballspieler verwertet erfahrungsgemäß zu 70% einen Elfmeter. Im Training tritt er 80-mal nacheinander gegen den Torhüter an. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer des Schützen an.

a. Welche Werte kann die Zufallsvariable X annehmen? Ist die Zufallsvariable X binomialverteilt? Falls ja – darf man die Binomialverteilung mit Hilfe einer Normalverteilung approximieren? Begründe.

① Werte: 0, 1, …, 80 Treffer

② JA! $n=80$, $p=0,7$ (WSK bleibt gleich) 2 Ausgänge ✓

③ $\mu=80\cdot 0,7=56$

$\sigma=\sqrt{56\cdot 0,3}=4,0987$ ✓

JA!

b. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler genau 62 Elfmeter verwertet.

BV:

$P(X=62)=0,0343$

NV:

$P(61,5\leq X\leq 62,5)=0,0334$

c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Schütze mindestens 50 Elfmeter verwertet.

BV: $P(X \geq 50) = 0{,}9413$

NV: $P(X \geq 49{,}5) = 0{,}9436$

d. Interpretiere den Ausdruck im gegebenen Kontext:

$$0{,}3^{80} + 80 \cdot 0{,}7^{1} \cdot 0{,}3^{79}$$

WSK, dass der Schütze bei 80 Versuchen maximal 1x trifft!

Bsp. 43 In einer Urne sind 40 Kugeln enthalten. 30 Kugeln sind mit der Aufschrift „du gewinnst leider nichts" beschriftet. Die restlichen Kugeln sind mit der Aufschrift „du gewinnst 100 €" beschriftet.

Es wird 100-mal mit Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Kugeln an, mit denen die Person 100 € gewonnen hat. $n = 100$ $p = \frac{10}{40} = 0{,}25$

a. Darf die Binomialverteilung durch eine Normalverteilung approximiert werden? Begründe.

$\mu = 100 \cdot 0{,}25 = 25$

$\sigma = \sqrt{25 \cdot 0{,}75} \approx 4{,}3301 > 3$ ✓ JA!

b. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person 2000 € gewinnt?

BV: $P(X = 20) = 0{,}0493$

NV: $P(19{,}5 \leq X \leq 20{,}5) = 0{,}0473$

c. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person mindestens 3000 € gewinnt?

BV: $P(X \geq 30) = 0{,}1495$

NV: $P(X \geq 29{,}5) = 0{,}14935$

d. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person maximal 14 Kugeln zieht, mit denen sie gewinnt?

BV: $P(X \leq 14) = 0{,}0054$

NV: $P(X \leq 14{,}5) = 0{,}0076$