Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme in zwei Variablen

SCAN ME

Video 1/9

1. Lineare Gleichungen in zwei Variablen

Eine Gleichung der Form $a \cdot x + b \cdot y = c \quad mit\ a, b, c \in \mathbb{R};\ a, b \neq 0$ wird **lineare Gleichung** in **zwei Variablen** genannt.
Jedes Zahlenpaar $(x\|y)$, das diese Gleichung erfüllt, ist eine Lösung dieser Gleichung.

Bsp. 1) Gib **drei** verschiedene Lösungen zu folgender Gleichung an:

$$\mathbf{2x - 4y = 8}$$

$2x = 4y + 8 \quad |:2$

$x = 2y + 4$

$L_1 = \{(6|1)\} \qquad L_2 = \{(0|-2)\} \qquad L_3 = \{(14|5)\}$

Bsp. 2) Bei einer Feier gibt es x Tische mit fünf Plätzen und y Tische mit acht Plätze. Bei der Feier sind insgesamt 200 Personen geladen. Stelle den Sachverhalt durch eine **lineare Gleichung** in **zwei Variablen** dar.

Gib <u>3 Möglichkeiten</u> an, auf wie vielen Tischen (fünf Plätze bzw. acht Plätze) die geladenen Gäste aufgeteilt werden können.

$5x + 8y = 200$

① $x = 40, y = 0$

② $x = 24, y = 10$

③ $x = 8, y = 20$

Eine lineare Gleichung in zwei Variablen kann in zwei Formen angegeben werden: ▪ **allgemeine Form:** $a \cdot x + b \cdot y = c \qquad z.B. \quad 6x + 2y = 13$ ▪ **Hauptform:** $y = -\frac{a}{b} \cdot x + \frac{c}{b} \quad (b \neq 0) \qquad z.B. \quad y = -3x + \frac{13}{2}$

<u>Beweis</u>: Forme die allgemeine Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ auf $\boldsymbol{y} =$ um.

$ax + by = c \quad |-ax$

$by = -ax + c \quad |:b$

$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$

Bsp. 3) Wandle die Gleichung in die **Hauptform** um. Ist es möglich? Begründe deine Antwort.

a. $3x + 9y = 27$ $\quad |-3x$	**b.** $10x = 15$	**c.** $\frac{4}{8}x + \frac{3}{4}y = 8$ $\quad |\cdot 8$	**d.** $0{,}3y = 9$ $\quad |:0{,}3$
$9y = -3x + 27$ $y = -\frac{1}{3}x + 3$	NEIN	$4x + 6y = 64 \quad |:2$ $2x + 3y = 32 \quad |-2x$ $3y = -2x + 32 \quad |:3$ $y = -\frac{2}{3}x + \frac{32}{3}$	$y = 30$

Bsp. 4) Haben folgende Gleichungen dieselbe Lösungsmenge? Begründe deine Antwort.

$-6x + 18y = 2 \quad |-18y \qquad x = 3y - \frac{1}{3} \qquad 18x - 36y = -4 \quad |+36y$

$-6x = -18y + 2 \quad |:(-6) \qquad 18x = 36y - 4 \quad |:18$

$x = 3y - \frac{1}{3} \qquad = \qquad \neq \qquad x = 2y - \frac{4}{18}$

NEIN!

2. Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen

Fasst man zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen zusammen, so erhält man ein so genanntes **lineares Gleichungssystem** in zwei Variablen.

$$\text{I}: \; a \cdot x + b \cdot y = c$$
$$\text{II}: \; d \cdot x + e \cdot y = f \qquad (a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R})$$

Die Lösung des Gleichungssystems sind alle Zahlenpaare $(x|y)$, die beide Gleichungen erfüllen.

Video 2/9

Mit folgenden Verfahren können lineare Gleichungssysteme gelöst werden:

2.1 Einsetzungsverfahren (Substitutionsmethode)

In einer Gleichung wird eine Variable ausgedrückt. Dieser Term ersetzt die Variable in der anderen Gleichung.

$\text{I}: \; x + 3y = 10$ $\text{II}: \; 2x + 5y = 24$	
1) Eine Gleichung nach **einer Variablen (x oder y)** auflösen. *In diesem Beispiel lösen wir die 1. Gleichung nach x auf.*	$\text{I}: \; x + 3y = 10 \Leftrightarrow \; \boldsymbol{x = 10 - 3y}$
2) Den Term für diese Variable in die **andere Gleichung** einsetzen. *D.h. wir setzen $x = 10 - 3y$ in die 2. Gleichung statt dem x ein.*	$\text{II}: \; 2 \cdot (\boldsymbol{10 - 3y}) + 5y = 24$
*Das Schwierigste ist geschafft! Ab jetzt entspricht es dem Lösen einer linearen Gleichung in **1 Variablen**.*	
3) Die Gleichung nach der enthaltenen Variablen **auflösen**.	$\text{II}: 20 - 6y + 5y = 24 \Leftrightarrow$ $\text{II}: \; -y = 4 \; \Leftrightarrow$ $\text{II}: \; y = -4$
4) Die **Lösung** in die **umgeformte Gleichung** aus Schritt 1 einsetzen und so die zweite Variable berechnen. *Wir setzen $y = -4$ in $x = 10 - 3y$ ein.*	$x = 10 - 3 \cdot (-4) \;\; \Leftrightarrow \; \boldsymbol{x = 22}$
5) Mache die **Probe**. WICHTIG: Verwende immer die Gleichung, die du im Schritt 4 NICHT benutzt hast!	*in* $\text{II}: \; 2 \cdot 22 + 5 \cdot (-4) = 24$ $44 - 20 = 4$ $4 = 4 \;\; w.A.$
6) Die Lösung besteht aus dem Zahlenpaar (x|y).	$x = 22, y = -4 \qquad L = \{(22\|-4)\}$

Bsp. 5) Löse mithilfe des Einsetzungsverfahrens:

$\text{I}: \; 4x - 2y = 6$ $\text{II}: \; 2x + 2y = 18$	$\text{I}: \; 3x + 2y = 10$ $\text{II}: \; x - 3 = -y \;\; \vert \cdot(-1)$
II $2x+2y=18 \;\vert -2y$ $2x = -2y+18 \;\vert :2$ $x = -y+9$ → in I: $4\cdot(-y+9)-2y=6$ $-4y+36-2y=6 \;\vert -36$ $-6y=-30 \;\vert :(-6)$ $\underline{y=5}$ in II: $x=-5+9$ $\underline{x=4}$ $L=\{(4\|5)\}$ Probe in I: $4\cdot4-2\cdot5=6$ $16-10=6$ $6=6$ ✓ w.A.	$y=-x+3$ in I: $3x+2\cdot(-x+3)=10$ $3x-2x+6=10 \;\vert -6$ $\underline{x=4}$ in II: $y=-4+3$ $\underline{y=-1}$ Probe in I: $3\cdot4+2\cdot(-1)=10$ $12-2=10$ $10=10$ ✓ w.A. $L=\{(4\|-1)\}$

Video 3/9

2.2 Additionsverfahren (Eliminationsmethode)

Es wird mit geeigneten Zahlen so multipliziert, dass bei der anschließenden Addition der beiden Gleichungen eine Variable wegfällt.

$\text{I}: \ 6x + 7y = 29$ $\text{II}: \ 3x - 5y = 6$	Video 4/9
1) Entscheide, welche Variable (x oder y) du eliminieren willst und überlege, was du tun musst, damit die Variable wegfällt. **Bemerkung 1**: *In diesem Fall wird die zweite Gleichung mit (-2) multipliziert, sodass bei der Addition der Gleichungen, die x-Variable eliminiert wird.* **Bemerkung 2:** *Es kann vorkommen, dass du auch beide Gleichungen mit einer Zahl einmultiplizieren musst!* **2)** Addiere nun die erste mit der zweiten Gleichung, sodass eine Variable wegfällt.	$\text{I}: 6x + 7y = 29$ $\text{II}: 3x - 5y = 6 \quad \vert \cdot (-2)$ $\text{I}: \ 6x + 7y = 29$ $\text{II}: -6x + 10y = -12$ $17y = 17$
3) Löse die erhaltene Gleichung auf.	$17y = 17 \quad \vert :17$ $\boldsymbol{y = 1}$
4) Setze die berechnete Variable in eine der angegebenen Gleichungen ein, um die zweite Variable berechnen zu können.	$\text{I}: \ 6x + 7 \cdot 1 = 29 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = \frac{11}{3}}$
5) Mache die **Probe**. WICHTIG: Verwende immer die Gleichung, die du im Schritt 4 NICHT benutzt hast!	$in \ \text{II}: \ 3 \cdot \frac{11}{3} - 5 \cdot 1 = 6$ $11 - 5 = 6$ $6 = 6 \ w.A.$
6) Die Lösung besteht aus dem Zahlenpaar (x|y).	$x = \frac{11}{3}, y = 1 \qquad L = \left\{\left(\frac{11}{3} \middle\vert 1\right)\right\}$

Bsp.6 Löse mithilfe des Additionsverfahrens:

$\text{I}: \ 16x + 5y = 11 \quad \vert \cdot 4$ $\text{II}: \ 6x - 4y = 10 \quad \vert \cdot 5$ $64x + 20y = 44$ $30x - 20y = 50$ $94x = 94 \quad \vert :94$ $\underline{\underline{x = 1}}$ in I: $16 \cdot 1 + 5y = 11 \quad \vert -16$ $5y = -5 \quad \vert :5$ $\underline{\underline{y = -1}}$ Probe in II: $6 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) = 10$ $6 + 4 = 10$ $10 = 10$ ✓ $L = \{(1 \vert -1)\}$	$\text{I}: \ 4x + 7y = 8 \quad \vert \cdot 2$ $\text{II}: -8x + 3y = 52$ $8x + 14y = 16$ $-8x + 3y = 52$ $17y = 68 \quad \vert :17$ $\underline{\underline{y = 4}}$ in I: $4x + 28 = 8 \quad \vert -28$ $4x = -20 \quad \vert :4$ $\underline{\underline{x = -5}}$ Probe in II: $-8 \cdot (-5) + 3 \cdot 4 = 52$ $40 + 12 = 52$ $52 = 52$ ✓ $L = \{(-5 \vert 4)\}$

<u>TIPP - So funktioniert es immer:</u> *Multipliziere die 1. Gleichung mit dem x-Koeffizienten (oder y) der 2. Gleichung und die 2. Gleichung mit dem negativen x-Koeffizienten (oder y) der 1. Gleichung.*

2.3 Gleichsetzungsverfahren (Komparationsmethode)

Aus beiden Gleichungen wird dieselbe Variable ausgedrückt und die Terme werden gleichgesetzt.

Video 5/9

$\mid: x + y = 3$ $\mid\mid: x - 20y = -18$	
1) Löse beide Gleichungen nach der gleichen Variable (x oder y) auf. **Bemerkung**: *In diesem Beispiel werden die Gleichungen auf x= umgeformt.*	$\mid: x = 3 - y$ $\mid\mid: x = 20y - 18$
2) Setze die Gleichungen gleich ($x = x$). Es entsteht wieder eine lineare Gleichung in 1 Variable.	$\boldsymbol{x = x}$ $3 - y = 20y - 18$
3) Löse die Gleichung nach der gegebenen Variable auf.	$21 \cdot y = 21 \Leftrightarrow \boldsymbol{y = 1}$
4) Setze die Lösung in eine der umgeformten Gleichungen aus Schritt 1 ein, um die andere Variable zu erhalten.	$x = 3 - 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 2}$
5) Mache die **Probe**. WICHTIG: Verwende immer die Gleichung, die du im Schritt 4 NICHT benutzt hast!	$in \mid\mid: \; 2 = 20 \cdot 1 - 18$ $2 = 2 \; w.A.$
6) Die Lösung besteht aus dem Zahlenpaar (x|y).	$x = 2, y = 1 \qquad L = \{(2\|1)\}$

Bsp. 7 Löse mithilfe des Gleichsetzungsverfahrens:

$\mid: 3x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - 3x$

$\mid\mid: 7x - y = 5 \Rightarrow y = 7x - 5$

$y = y$

$5 - 3x = 7x - 5 \quad \mid +5, +3x$

$10 = 10x \quad \mid :10$

$\rightarrow \underline{\underline{x = 1}}$

$\text{in I}: 3 + y = 5$

$\underline{y = 2}$

$L = \{(1\|2)\}$

$\text{Probe II}: 7 - 2 = 5$

$5 = 5$ ✓

$\mid: 10x - 4y = 6 \Rightarrow 10x = 4y + 6$

$\mid\mid: 10x - 6y = -6 \Rightarrow 10x = 6y - 6$

$10x = 10x$

$4y + 6 = 6y - 6 \quad \mid -4y, +6$

$12 = 2y \quad \mid :2$

$\underline{y = 6}$

$\text{in I}: 10x - 24 = 6 \quad \mid +24$

$10x = 30$

$\underline{\underline{x = 3}}$

$L = \{(3\|6)\}$

$\text{Probe in II}: 30 - 36 = -6$

$\underline{-6 = -6}$ ✓ w.A.

Bsp. 8 Löse <u>intelligent</u> mithilfe des Gleichsetzungsverfahrens. Was kannst du gleich setzen?

$\mid: 3x + 2y = 0 \Rightarrow 3x = -2y$

$\mid\mid: 3x - y = 9 \Rightarrow 3x = y + 9$

$3x = 3x$

$-2y = y + 9 \quad \mid -y$

$-3y = 9 \quad \mid :(-3)$

$\underline{\underline{y = -3}}$

$\text{in I}: 3x - 6 = 0 \quad \mid +6$

$3x = 6 \quad \mid :3$

$\underline{\underline{x = 2}}$

$L = \{(2\|-3)\}$

$\text{Probe in II}: 6 + 3 = 9$

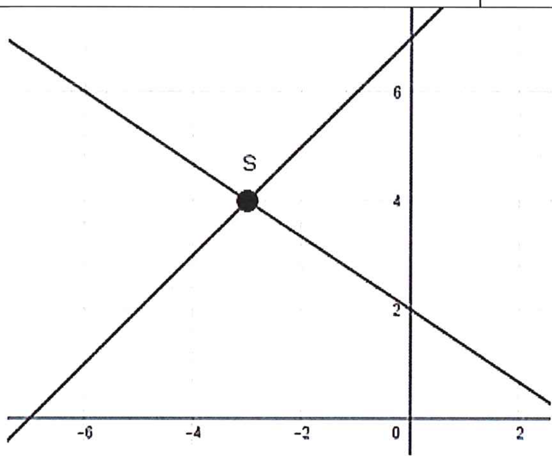
$9 = 9$ ✓

2.4 GRAPHISCHES LÖSUNGSVERFAHREN

Video 6/9

$\text{I}: \ 2x + 3y = 6$ $\text{II}: \ x - y = -7$

1) Forme beide Gleichungen auf die Form $y = k \cdot x + d$ um und zeichne die beiden Graphen	$\text{I}: y = -\frac{2}{3}x + 2$ $\text{II}: y = x + 7$



2) Ermittle die **Lösungsmenge**: a. 1 Lösung: Es gibt einen Schnittpunkt b. Unendlich viele Lösungen: Die beiden Geraden sind ident. c. Keine Lösung: Die Geraden verlaufen parallel.	$S = (-3\|4)$ $x = -3 \quad \& \quad y = 4$

Bsp. 7 Löse das Gleichungssystem graphisch.

$$\text{I}: \ 5x - 3y = 2$$
$$\text{II}: \ 2x + 3y = 5$$

$\text{I} \quad 5x - 3y = 2 \quad | -5x$

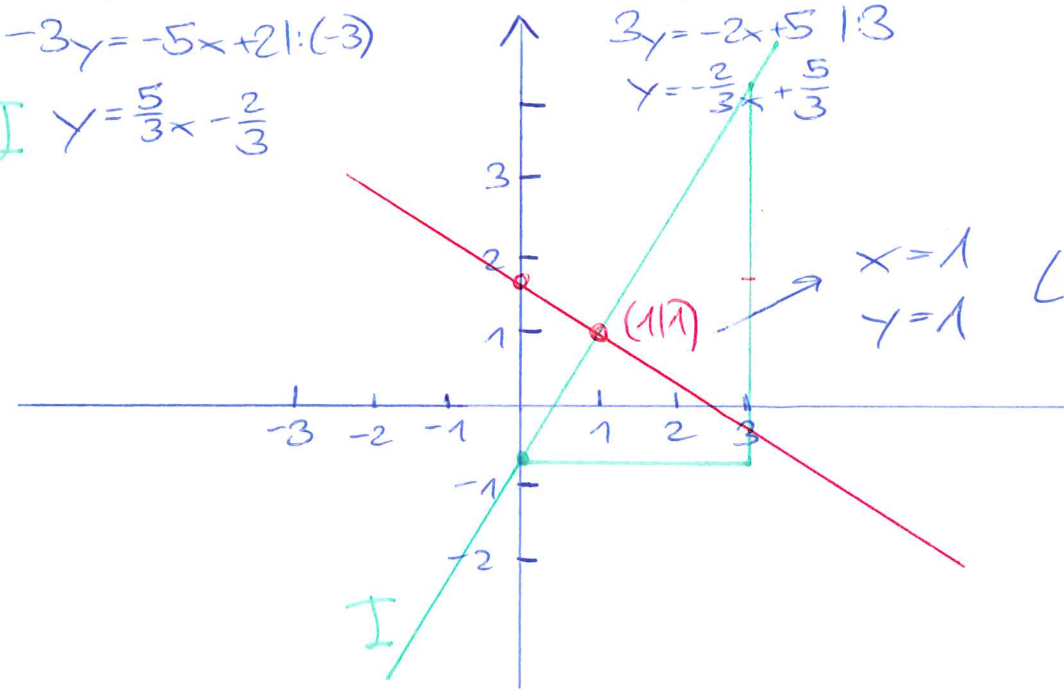
$-3y = -5x + 2 \quad | :(-3)$

$\text{I} \quad y = \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}$

$\text{II} \quad 2x + 3y = 5 \quad | -2x$

$3y = -2x + 5 \quad | :3$

$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$



$x = 1$

$y = 1$

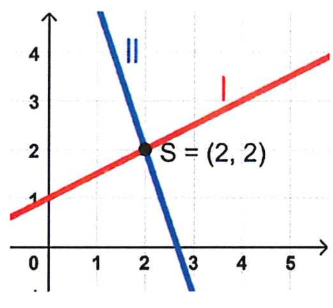
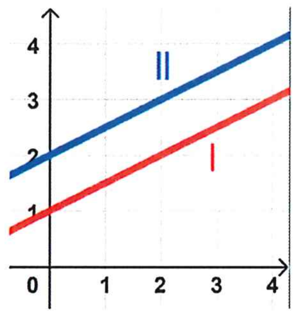
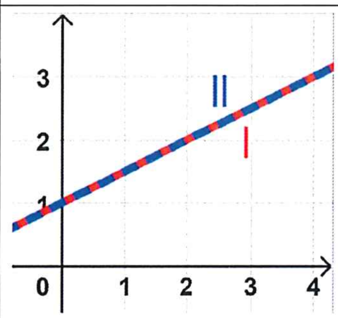
$L = \{(1|1)\}$

3. Lösungsmöglichkeiten eines linearen Gleichungssystems

Die Lösungen eines linearen Gleichungssystem sind alle Zahlenpaare $(x|y)$, die beide Gleichungen erfüllen.

- **Eine** Lösung: 1 Zahlenpaar
- **Keine** Lösung: kein einziges Zahlenpaar
- **Unendlich** viele Lösungen: unendlich viele Zahlenpaare

Video 7/9

	1. Fall genau 1 Lösung	**2. Fall** keine Lösung	**3. Fall** unendlich viele Lösungen
Beispiel:	$I: y = 0{,}5x + 1$ $II: y + 3x = 8$ Lineare unabhängige Gleichungen	$I: 2y - x = 2$ $II: 2y - x = 4$ <u>widersprüchlich</u>	$I: 2y - x = 2$ $II: 4y - 2x = 4$ I ist ein Vielfaches von II (linear abhängig)
Einsetzungs-, Additions- und Gleichsetzungsverfahren	$x = 2$ und $y = 2$	Falsche Aussage wie z.B. $0 = 2$	Eine wahre Aussage wie z.B. $0 = 0$
Graphisches Verfahren:			
Lösungen:	Genau eine Lösung: $x = 2$ und $y = 2$	Keine Lösung	Unendlich, viele Lösungen z.B. $(0\|1); (2\|2); (4\|3); \ldots$
Lösungsmenge:	$L = \{(2\|2)\}$	$L = \{\}$	$L = \{(x\|y)\|2y - x = 2\}$

Vorgehensweise – Lösungsfälle bestimmen

1. Fall (1 Lösung): Die Variablen **x** und **y** sind keine Vielfachen voneinander. D.h. egal mit welchen Zahlen die Gleichungen ein-multipliziert werden, die Variablen x und y sind in beiden Gleichungen immer <u>verschieden</u>.

2. Fall (Keine Lösung): Die Variablen **x** und **y** müssen bei beiden Gleichungen entweder <u>ident</u> oder <u>Vielfache</u> voneinander sein. Wichtig ist, dass die <u>Lösungszahlen</u> bei den Gleichungen <u>keine</u> <u>Vielfache</u> sind!

3. Fall (Unendlich Viele Lösungen): Die beiden Gleichungen sind <u>Vielfache voneinander</u>. Der Unterschied zum 2.Fall ist, dass nun auch die Lösungszahlen auch übereinstimmen müssen!

Video 8/9

Bsp. 10) Wie viele Lösungen treten bei folgenden Gleichungssystemen auf? (Du brauchst die Lösungsfälle nicht berechnen!)

$I: 2x + 3y = 7$ $II: 3x + 6y = 9$ $\cdot 1{,}5 \quad \cdot 2$ $\Rightarrow$ 1 Lösung	$I: 2x + 3y = 7$ $II: 4x + 6y = 14$ $\cdot 2 \quad \cdot 2 \quad \cdot 2$ Unendlich v. L.	$I: 6x + 12y = 7$ $II: 3x + 6y = 3$ $\cdot 2 \quad \cdot 2 \quad \neq 2$ Keine L.
$I: -3x - 2y = -9$ $II: 3x + 2y = 9$ Unendlich v. L.	$I: -4x - 5y = 3$ $II: -8x + 10y = 2$ 1 Lösung	$I: -4x - 3y = 7$ $II: -8x - 6y = 14$ Unendlich v. L.

Bsp. 11) Vervollständige so, dass der gewünschte Lösungsfall eintritt. Gib an, welche Bedingungen für die gegebenen Variablen gelten müssen.

1 Lösung	Keine Lösung	Unendlich viele Lösungen
$\cdot 3$ I: $2x + 3y = 7$ II: $6x + cy = 9$ $:3$ $c \neq 9$	$\cdot(-3)$ I: $x - 2y = 3$ II: $-3x + 6y = d$ $d \neq -9$	I: $x + 2y = 7$ II: $4x + 8y = d$ $d = 28$
$\cdot(-4)$ I: $3x + cy = 2$ II: $-12x + 3y = d$ $:(-4)$ $c \neq -\frac{3}{4}$ d beliebig	$\cdot(-4)$ I: $4x + 5y = 3$ II: $cx - 20y = d$ $:(-4)$ $c = -16$ $d \neq -12$	$\cdot(-2)$ I: $7x + cy = 19$ II: $-14x + 4y = d$ $c = -2$ $d = -38$
$\cdot 5$ I: $cx - 10y = -10$ II: $3x - 2y = d$ $:5$ $c \neq 15$ d beliebig	$\cdot(-4)$ I: $cx - 8y = 16$ II: $4x + 2y = d$ $:(-4)$ $c = -16$ $d \neq -4$	$\cdot(-6)$ I: $cx - 6y = 12$ II: $4x + y = d$ $:(-6)$ $c = -24$ $d = -2$
$\cdot 5$ I: $2x + cy = -1$ II: $10x + 5y = d$ $:5$ $c \neq 1$ d beliebig	$\cdot(-13)$ I: $-13x + cy = d$ II: $x - 2y = -3$ $c = 26$ $d \neq 39$	$\cdot(-6)$ I: $-12x + 18y = 60$ II: $2x + cy = d$ $c = -3$ $d = -10$

Video 9/9

Bsp. 12) Welches Lösungsverfahren bietet sich am besten an? Löse das Gleichungssystem und gib die Lösungsmenge an.

Verfahren: ADDITION	Verfahren: EINSETZUNGSV.	Verfahren: GLEICHSETZUNGSV.
I: $4x + 6y = 14$ $\mid \cdot 3$ II: $-3x + 5y = -1$ $\mid \cdot 4$ $12x + 18y = 42$ $-12x + 20y = -4$ $38y = 38$ $y = 1$ in I: $4x + 6 = 14 \mid -6$ $4x = 8$ $x = 2$ Probe II: $-6 + 5 = -1$ $-1 = -1$ ✓ $L = \{(2 \mid 1)\}$	I: $6x - 2y = -2$ II: $y = -3x - 1$ I: $6x - 2\cdot(-3x - 1) = -2$ $6x + 6x + 2 = -2$ $12x = -4 \mid :12$ $x = -\frac{1}{3}$ II $y = 1 - 1 = 0$ Probe in I: $6\cdot(-\frac{1}{3}) - 2\cdot 0 = -2$ $-2 = -2$ ✓ $L = \{(-\frac{1}{3} \mid 0)\}$	I: $-7x - y = -12 \Rightarrow -7x = y - 12$ II: $-7x = 8 - 3y$ $-7x = -7x$ $y - 12 = 8 - 3y \mid +3y, +12$ $4y = 20$ $y = 5$ in I: $-7x - 5 = -12$ $-7x = -7 \mid :(-7)$ $x = 1$ Probe in II: $-7 = 8 - 15$ $-7 = -7$ ✓ $L = \{(1 \mid 5)\}$