Lösung: Abbau von Arzneimitteln * (B_340)

a) Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz:
$m(t) = 0$
$t = 159{,}9... \approx 160$

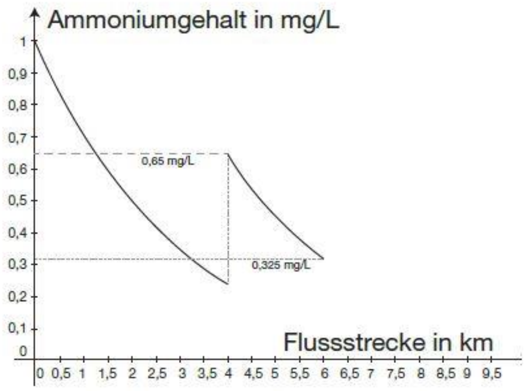
Nach etwa 160 Minuten ist der Wirkstoff vollständig abgebaut.

$m'(t) = e^{-0{,}05 \cdot t} - 0{,}125$
Lösung der Gleichung $m'(t) = 0{,}5$ mittels Technologieeinsatz: $t = 9{,}40... \approx 9{,}4$
Nach etwa 9,4 Minuten beträgt die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut 0,5 mg/min.

Da die 2. Ableitung $m''(t) = -0{,}05 \cdot e^{-0{,}05 \cdot t}$ eine Exponentialfunktion vom Typ $a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $a < 0$ ist, sind alle Funktionswerte dieser 2. Ableitung negativ. Daher ist die Funktion m im gesamten Definitionsbereich negativ gekrümmt.

Lösung: Ammonium im Fluss (B_105)

a) Die Skizze kann auch durch Kenntnis der *Halbwertsstrecke* konstruiert werden.



Eintrag von *A*

$$N_A(9) = 1 \cdot e^{-0{,}3466 \cdot 9} \approx 0{,}044 \text{ mg/L}$$

Eintrag von *B*

$$N_B(5) = 0{,}4 \cdot e^{-0{,}3466 \cdot 5} \approx 0{,}071 \text{ mg/L}$$

Eintrag von *C*

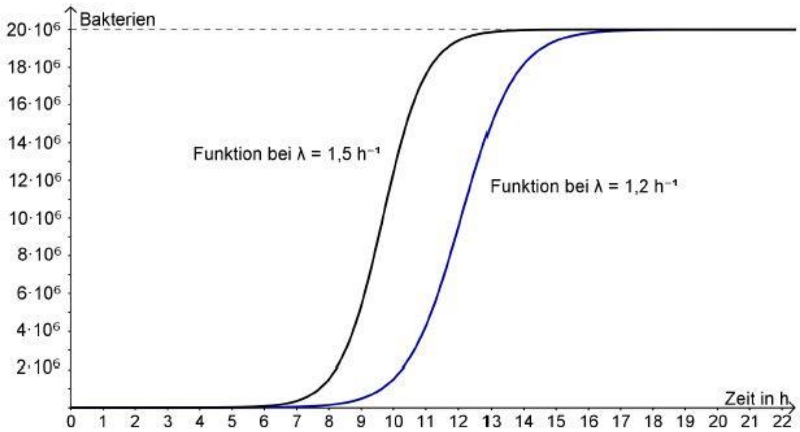
$$N_C = 0{,}5 \text{ mg/L}$$

Gesamtgehalt an Ammonium $\approx 0{,}044 + 0{,}071 + 0{,}5 = 0{,}615$ mg/L

Es sind auch andere Lösungswege möglich (z. B. Berechnung von Abschnitt zu Abschnitt).

Lösung: Bakterien (B_172)

c)



Die Exponentialfunktion $e^{-\lambda \cdot t}$ fällt für $\lambda = 1{,}5\ \text{h}^{-1}$ schneller als für $\lambda = 1{,}2\ \text{h}^{-1}$. Ihr Wert nähert sich schneller null.

Fällt die Exponentialfunktion $e^{-\lambda \cdot t}$ schneller, nähert sich der Wert des Nenners schneller dem Wert 1.

Wird der Nenner kleiner, wird der gesamte Bruch größer.

Der Grenzwert von $20 \cdot 10^6$ Bakterien wird bei $\lambda = 1{,}5\ \text{h}^{-1}$ daher schneller angenähert.

Lösung: E-Reader * (B_224)

c) Da für großes t der Wert $e^{-0{,}6151 \cdot t}$ gegen null geht, nähert sich der Nenner der Zahl 1 und $V(t)$ damit 2608.

Funktionswert nach 8 Wochen: $V(8) \approx 2272$
Abweichung vom gegebenen Tabellenwert: $2280 - 2272 = 8$

Der logistische Funktionswert weicht um ca. 8 Stück vom gegebenen Tabellenwert ab.

Die 1. Koordinate von H ist nach diesem Modell derjenige Zeitpunkt, in dessen Nähe am meisten E-Reader pro Woche verkauft wurden. Die 2. Koordinate entspricht in etwa der Anzahl der verkauften E-Reader in dieser Woche.

Lösung: Großtrappen (B_131)

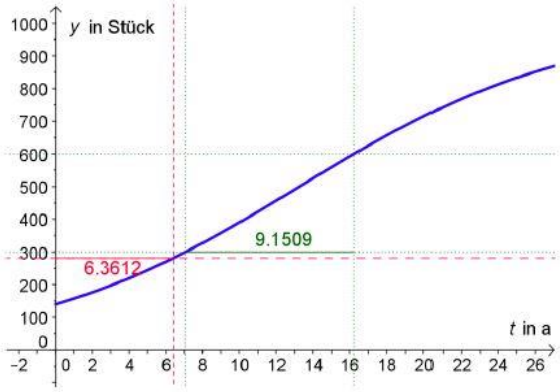
b) $140 = 1\,000 - c \cdot e^0 \rightarrow c = 860$

$244 = 1\,000 - c \cdot e^{5 \cdot \lambda} \rightarrow \lambda = -0{,}02577... \approx -0{,}0258$

Funktionsgleichung: $y(t) = 1\,000 - 860 \cdot e^{-0{,}0258 \cdot t}$

Prognose t = 20 Jahre → rund 486 Tiere

c)



– Die Verdopplung vom Anfangsbestand von 140 auf 280 Tiere benötigt etwas mehr als 6 Jahre.

– Die Verdopplung von 300 auf 600 Tiere benötigt nach diesem Modell einen Zeitraum von etwas mehr als 9 Jahren.

Bei diesem Modell ist die Dauer, in der sich ein Bestand verdoppelt, nicht konstant.

Ableseungenauigkeiten werden toleriert, insbesondere bei Grafikrechnern und Handskizzen.

Lösung: Grönlandwale (B_195)

a) Der Zähler der Formel gibt die maximal erreichbare Anzahl von Walen an. Es kommen also nur die Graphen N_1 und N_2 in Frage, da diese bis zu 16 000 Tiere erlauben.
Die Zahl der Tiere zum Zeitpunkt null kann mithilfe der Konstante $\frac{11}{9}$ bestimmt werden. Diese gibt das Verhältnis von maximal erreichbarem Wert und Anfangswert der logistischen Funktion wieder.

$$\frac{11}{9} = \frac{16\,000}{N_0} - 1$$

$$\frac{20}{9} = \frac{16\,000}{N_0}$$

$$N_0 = \frac{16\,000 \cdot 9}{20} = 7\,200$$

Der passende Graph ist daher N_2.

Auch andere passende Argumentationen bzgl. des Anfangswerts sind als richtig zu werten.

c) Der Abstand der Funktionsgraphen wird immer größer, da durch das jährliche Abfischen auch die Basis für den prozentuellen jährlichen Zuwachs verkleinert wird. Bei gleichbleibender prozentueller Zuwachsrate ergibt sich bei einer größeren Ausgangsmenge eine größere Anzahl hinzukommender Wale als bei einer kleineren Ausgangsmenge.

Lösung: Höhenwachstum von Fichten * (B_350)

a) Durch 0 kann nicht dividiert werden.

Für $b > 0$ und $t > 0$ ist $-\frac{b}{t}$ kleiner als 0 und daher $e^{-\frac{b}{t}}$ kleiner als 1. Daher gilt: $a \cdot e^{-\frac{b}{t}} < a$.

$19{,}24 = 28 \cdot e^{-\frac{b}{80}}$
Berechnung mittels Technologieeinsatz: $b = 30{,}0\ldots \approx 30$

$\frac{h(100) - h(80)}{h(80)} = 0{,}0779\ldots \approx 7{,}8\ \%$

Gemäß diesem Modell rechnet man in den nächsten 20 Jahren mit einer Zunahme der durchschnittlichen Höhe um rund 7,8 %.

Lösung: Infrarotheizung (B_030)

a) aus der Grafik ablesen:

$P_1 = (0|20) \Rightarrow b = 20$

Grenzwert der Funktion ϑ für $t \to \infty$ ist 95 $\Rightarrow c = 95 - 20 = 75$

$P_2 = (6|60) \Rightarrow 60 = 75 \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot 6}) + 20$
$\lambda = 0{,}127...$

$\vartheta(t) = 75 \cdot (1 - e^{-0{,}127 \cdot t}) + 20$

Wenn $t \to \infty$, geht $e^{-\lambda \cdot t} \to 0$. $\Rightarrow$ Die theoretisch maximal erreichbare Temperatur beträgt $(c + b)$ °C.

Auch andere, gleichwertige Argumentationen sind zulässig.

Lösung: Kfz-Bestand (1) * (B_300)

c1) $K_B(0) = 4{,}5$
$K_B(20) = 6{,}3$

oder:

$9 - b = 4{,}5$
$9 - b \cdot e^{-\lambda \cdot 20} = 6{,}3$

c2) $b = 9 - 4{,}5 = 4{,}5$
$\lambda = \frac{\ln(4{,}5) - \ln(2{,}7)}{20} = 0{,}025541...$

c3) $K_B(28) = 6{,}79...$

Gemäß diesem Modell beträgt der Kfz-Bestand am Ende des Jahres 2020 rund 6,8 Millionen.

Lösung: Küchengerät * (B_557)

a1) $N_1(0) = S \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot 0}) = S \cdot (1 - 1) = 0$

a2) $S = 5000$

$N_1(1) = 350$ *oder* $5000 \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot 1}) = 350$
Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$\lambda = -\ln(0{,}93) = 0{,}07257...$

a3)

$N_1(t) = N_2(t)$	A
$N_1'(t) = N_2'(t)$	B

A	Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist {0; 1}.
B	Die Lösung dieser Gleichung liegt im Intervall]0; 1[.
C	Die Lösung dieser Gleichung liegt im Intervall [1; ∞[.
D	Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist {0}.

Lösung: Niedrigzinsphase * (B_568)

d1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$L(t) = 4{,}472 \cdot 0{,}599^t$ *(Parameter gerundet)*

d2) $0{,}5 = 0{,}599^t$

$t = \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}599)} = 1{,}352...$

Der Leitzinssatz halbiert sich gemäß der Funktion L jeweils in einem Zeitraum von rund 1,35 Jahren.

Lösung: Sinkende Kugeln * (B_407)

a) Für größer werdendes t wird $e^{-\frac{t}{\tau}}$ immer kleiner und damit $\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ immer größer.

Lösung: Sozialausgaben (2) * (B_482)

b1) Im Zeitraum von 2005 bis 2010 stiegen die Sozialausgaben um durchschnittlich rund 4,3 % pro Jahr.

b2) $S_2(t) = 102{,}5 \cdot 1{,}025^t$

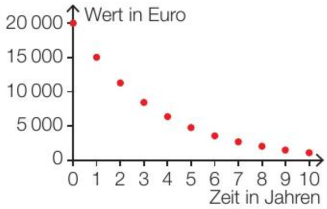
Lösung: Startkapital (B_146)

c) $W(t) = 20\,000 \cdot 0{,}75^t$ mit $t \in \mathbb{N}$

t … Anzahl der Jahre (ganzzahlig)
$W(t)$ … Wert zu Beginn des Jahres t in Euro (€)

$D = \mathbb{N}$

[...]	
[...]	
[...]	

[...]	
	☒

Lösung: Streaming * (B_501)

c1) 27 Monate nach der Markteinführung wächst die Anzahl der Kunden am stärksten.
Toleranzbereich: [25; 29]

c2) $f(0) = 1\,000$ *oder* $\frac{150\,000}{1 + c} = 1\,000 \quad \Rightarrow \quad c = 149$

$f(27) = 75\,000$ *oder* $\frac{150\,000}{1 + 149 \cdot e^{-\lambda \cdot 27}} = 75\,000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\lambda = 0{,}185...$

Die Verwendung anderer Punkte auf dem Graphen von f für das Ermitteln des Parameters λ ist ebenfalls als richtig zu werten.

Lösung: Thermometer * (B_540)

b1) I: $g(0) = 33$
II: $g(4) = 36$

oder:

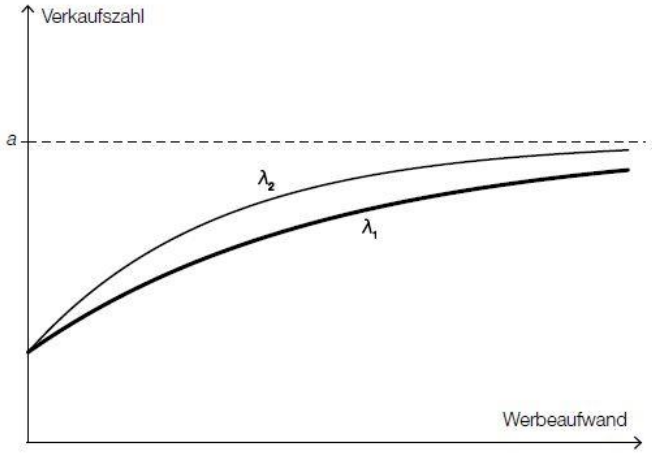
I: $c - a = 33$
II: $c - a \cdot e^{-0{,}275 \cdot 4} = 36$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = 4{,}49\ldots$
$c = 37{,}49\ldots$

Lösung: Waschmittel (1) * (B_376)

a) Verkaufszahl ohne Werbeaufwand: $V(0) = a - b$
Wenn x gegen unendlich geht, strebt $e^{-\lambda \cdot x}$ und daher auch das Produkt $b \cdot e^{-\lambda \cdot x}$ gegen 0 und V somit gegen a.



Lösung: Werbung * (B_440)

b1) $N_W(t) = N_G(t)$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $t = 6{,}779... \approx 6{,}78$

Nach etwa 6,78 Tagen haben gleich viele Studierende vom Gerücht erfahren, wie von der Werbekampagne erreicht wurden.

Lösung: Öffentlicher Verkehr in Wien * (B_515)

b1) Der Ordinatenabschnitt ist der Funktionswert von N an der Stelle 0. Wegen $a^0 = 1$ ist dieser Ordinatenabschnitt daher unabhängig von a.

b2) $700\,000 = 815\,000 - 450\,000 \cdot a^4 \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}7110...$

b3) Der Sättigungswert der Anzahl der pro Jahr verkauften Jahreskarten beträgt 815 000.

oder:

Gemäß der Funktion N nähert sich die Anzahl der pro Jahr verkauften Jahreskarten für $t \to \infty$ der Zahl 815 000 beliebig nahe an.