

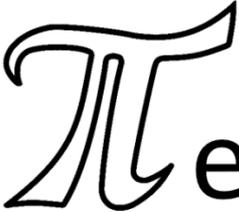
## 3.3 Rentenrechnung

### Maturaskript BHS – Teil B (12 Seiten)

Cluster: HLFS/HUM

Grundkompetenzen:

- **B\_W\_3.3** bei Rentenrechnung unter Verwendung geometrischer Reihen modellieren; Barwert, Endwert, Ratenhöhe, Laufzeit und Zinssatz berechnen und die Ergebnisse interpretieren; im Kontext argumentieren

Prof.  egischer

## Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben** (Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool) gelöst werden, um das Erlernete zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info: *bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, ...) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): <https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/>
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

- |  |
|--|
| 1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: <a href="https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM">https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM</a> |
| 2) Gib im Feld „ <b>Volltextsuche</b> “ die <b>Nummer</b> ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.           |

### Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. A\_263) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**“ und „**GeoGebra**“ erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**“ erstellt.

### Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln	Weitere Regeln für Lehrpersonen
<ul style="list-style-type: none"><li>▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen.</li><li>▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist <b>nicht erlaubt</b>, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen.</li><li>▪ <b>Sie dürfen mein Materialen NICHT gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden.</b></li><li>▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden.</li><li>▪ Bei einem <b>Missbrauch</b> erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.</li></ul>	<p><b>WICHTIGSTE REGEL:</b> LehrerInnen dürfen die Materialien in <b>Ihrem eigenen Unterricht</b> verwenden:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen.</li><li>▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben.</li><li>▪ Es ist <b>nicht erlaubt</b>, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben.</li><li>▪ <b>LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.</b></li></ul>

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren ([info@prof-tegischer.com](mailto:info@prof-tegischer.com)). Auf meiner Homepage [prof-tegischer.com](http://prof-tegischer.com) finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

## BHS Teil B\_W\_3.3: Rentenrechnung

- Eine **Rente** ist eine Folge von Zahlungen gleicher Größe (Raten) in gleichen Zeitabständen.
- **Rententermin** = Zeitpunkt der Fälligkeit einer Rentenrate.
- **Rentenperiode** = Zeitraum zwischen zwei aufeinanderfolgenden Rententerminen.
- **Rentendauer** = Laufzeit = Zeitdauer vom Beginn der ersten Rentenperiode (Rentenbeginn) bis zum Ende der letzten Rentenperiode (Rentenende).
- Eine Rente heißt **nachschüssig**, wenn jede Rate am Ende der Rentenperiode fällig ist. (Normalerweise bei Krediten)
- Eine Rente heißt **vorschüssig**, wenn jede Rate am Beginn der Rentenperiode fällig ist.
- Eine Rente heißt **ganzjährig**, wenn die Rentenperiode 1 Jahr ist, und **unterjährig**, wenn die Rentenperiode ein Jahresbruchteil ist.
  
- **Kredite**: Ein Kreditgeber (Bank) stellt dem Kreditnehmer einen Geldbetrag zur Verfügung, den dieser in Raten mit Zinsen zurückzahlt. Ist eine spezielle Form der Rente: Der Kreditgeber legt sein Geld bei dem Kreditnehmer zu dem vereinbarten Zinssatz an und bekommt eine Rente gezahlt.
  
- **Barwert einer Rente** = Wert aller Rentenraten zusammen, jeweils bezogen auf den Rentenbeginn. Das ist das zur Finanzierung der Rente nötige Anfangskapital. (Der Barwert eines Kredits ist die ausbezahlte Kreditsumme).
- **Endwert einer Rente** = Summe aller Rentenraten, bezogen auf das Rentenende. (Inklusive aller Zinsen und Zinseszinsen).
- **Restwert nach n Rentenperioden** = Das, was nach n Rentenzahlungen (am Ende der n-ten Rentenperiode) vom Ausgangskapital (inkl. Zinsen) noch übrig ist. Am Ende der Laufzeit ist der Restwert 0.

Der Endwert hängt mit dem Barwert immer durch folgende Formel zusammen (sowohl bei vorschüssigen als auch nachschüssigen Rentenzahlungen):

$$E = B \cdot (1 + i)^n$$

$$B = \frac{E}{(1 + i)^n}$$

### Rentenrechnung

$R$  ... Ratenhöhe  
 $n$  ... Anzahl der Raten  
 $i$  ... Zinssatz  
 $q = 1 + i$  ... Aufzinsungsfaktor

Voraussetzung: Rentenperiode = Zinsperiode

	nachschüssig	vorschüssig
Endwert $E$	$E_{\text{nach}} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$	$E_{\text{vor}} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q$
Barwert $B$	$B_{\text{nach}} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^n}$	$B_{\text{vor}} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{n-1}}$

### Abfindung \* (B\_538)

Vier Geschwister haben gemeinsam ein Haus geerbt.

Martha übernimmt das Haus und muss dafür ihren Geschwistern Andreas, Beate und Christian zum Zeitpunkt der Übernahme Geldbeträge in Höhe von jeweils € 80.000 auszahlen. Ein solcher Geldbetrag wird *Abfindung* genannt.

- c) Die Auszahlung der Abfindung in Höhe von € 80.000 an Christian soll durch Quartalsraten in Höhe von jeweils € 4.000 und eine Restzahlung erfolgen. Die erste Zahlung erfolgt nach 1 Jahr. Der Zinssatz beträgt 2 % p. a.

- 1) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$$1,02^{\frac{1}{3}} - 1 = 0,004962\dots$$

- 2) Berechnen Sie die Anzahl der vollen Quartalsraten.  
3) Berechnen Sie die Höhe der Restzahlung, die 1 Quartal nach der letzten vollen Quartalsrate ausgezahlt wird.

### Anschaffungen (B\_134)

Für die Anschaffung von neuer Hardware in einem Unternehmen muss ein Kredit aufgenommen werden.

- a) Für einen Kredit in Höhe von € 50.000 bietet eine Bank bei einer Laufzeit von 10 Jahren und Rückzahlung durch nachschüssige Monatsraten einen effektiven Jahreszinssatz von 4,5 %.

– Berechnen Sie die Höhe der Monatsraten.

### Ansparplan \* (B\_185)

Monika möchte in den nächsten 12 Jahren € 20.000 ansparen.

Im Folgenden wird die Kapitalertragsteuer nicht berücksichtigt.

- c) Monika überlegt, 12 Jahre lang zu Beginn jedes Jahres einen gleich hohen Betrag einzuzahlen, um ihr Sparziel von € 20.000 in 12 Jahren bei einem fixen Zinssatz von 2 % p. a. zu erreichen.

- 1) Berechnen Sie die Höhe des jährlichen Einzahlungsbetrags  $R$ .

Sie überlegt, nicht zu Beginn jedes Jahres den Jahresbetrag einzuzahlen, sondern zu Beginn jedes Monats  $\frac{1}{12}$  des Jahresbetrags.

- 2) Argumentieren Sie, dass sie ihr Sparziel damit nicht in der vorgesehenen Zeit erreicht.

### Ansparpläne \* (B\_382)

Für die Finanzierung größerer Anschaffungen ist es oft nötig, einen Geldbetrag anzusparen.

Im Folgenden wird die Kapitalertragsteuer nicht berücksichtigt.

- d) Daniel möchte in 2 Jahren insgesamt € 10.000 angespart haben. Seine Ersparnisse betragen derzeit € 4.000. Den Restbetrag will er ansparen, indem er jeweils am Ende jedes Monats einen gleichbleibenden Betrag anspart.

– Ermitteln Sie die Höhe dieses gleichbleibenden Betrags, wenn die Beträge nicht verzinst werden.

– Ermitteln Sie die Höhe dieses gleichbleibenden Betrags, wenn alle Beträge zu einem Zinssatz von 0,25 % p. m. veranlagt werden.

### Autokauf (1) \* (B\_459)

Frau Kopecek möchte ein neues Auto mit einem Listenpreis von € 17.100 kaufen. Dabei stehen verschiedene Finanzierungsmöglichkeiten zur Auswahl.

d) Bei Barzahlung gewährt der Händler 8 % Preisnachlass vom Listenpreis.

1) Berechnen Sie den Preis des Autos bei Barzahlung.

Bei einer Ratenfinanzierung verlangt der Händler eine Anzahlung von € 3.420 sowie 36 nachschüssige Monatsraten zu je € 380.

Barzahlung und Ratenfinanzierung sind bei einem bestimmten Jahreszinssatz gleichwertig.

2) Berechnen Sie diesen Jahreszinssatz.

### Autokauf (3) \* (B\_546)

Clara möchte ein neues Auto kaufen.

a) Eine Bank bietet Clara einen Kredit in Höhe von € 15.000 mit einer Laufzeit von 7 Jahren an. Die Rückzahlung erfolgt durch nachschüssige Monatsraten in Höhe von je € 216.

1) Berechnen Sie den Monatszinssatz  $i_{12}$  für diesen Kredit.

Mit dem monatlichen Aufzinsungsfaktor  $q_{12} = 1 + i_{12}$  führt Clara die nachstehende Berechnung durch.

$$X = 15000 \cdot q_{12}^{24} - 216 \cdot \frac{q_{12}^{24} - 1}{q_{12} - 1}$$

2) Beschreiben Sie die Bedeutung von  $X$  im gegebenen Sachzusammenhang.

### Hotelerweiterung \* (B\_106)

Ein Hotel plant die Errichtung zusätzlicher Zimmer.

d) Um die Investition durchführen zu können, ist ein Bankkredit in Höhe von € 800.000 notwendig. Für die Rückzahlung werden eine Laufzeit von 15 Jahren und nachschüssige Semesterraten in Höhe von jeweils € 38.100 vereinbart.

– Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz für dieses Finanzierungsmodell.

### Hühnerfarm (B\_184)

Auf einer Hühnerfarm werden Eier produziert.

d) Die Hühnerfarm soll durch den Ankauf eines der Nachbargrundstücke vergrößert werden. Es liegen zwei Angebote vor:

- Angebot 1 umfasst das Grundstück mit 2 000 m<sup>2</sup>.  
Der Kaufpreis soll in 12 nachschüssigen Jahresraten zu je € 1.050 getilgt werden.
- Angebot 2 umfasst das Grundstück mit 2 200 m<sup>2</sup>.  
Der Kaufpreis soll in 24 nachschüssigen Jahresraten zu je € 510 getilgt werden.

Für beide Angebote ist ein Zinssatz von 2,5 % p. a. vereinbart. Es soll das Grundstück mit dem niedrigeren Quadratmeterpreis gekauft werden.

- Dokumentieren Sie in Worten, wie man das günstigere Angebot ermitteln kann.
- Berechnen Sie den Kaufpreis pro Quadratmeter für das Angebot 2.

### Esszimmereinrichtung \* (B\_558)

Petra möchte eine neue Esszimmereinrichtung kaufen, die € 4.000 kostet.

- b) Petra kann die Esszimmereinrichtung auch bei einem Versandhaus über Ratenzahlung finanzieren. Aufgrund der anfallenden Zinsen betragen die Kosten dabei monatlich € 1,65 pro € 100 offener Restschuld.

Petra berechnet für diese Ratenzahlung einen Jahreszinssatz von rund 21,7 %.

- 1) Überprüfen Sie nachweislich, ob Petras Berechnung stimmt.

Beim Kauf der Esszimmereinrichtung um € 4.000 über Ratenzahlung müssen 12 nachschüssige Monatsraten in Höhe von jeweils € 370 und ein Restbetrag, der zeitgleich mit der letzten Monatsrate fällig ist, bezahlt werden. Der Jahreszinssatz beträgt 21,7 %.

- 2) Berechnen Sie die Höhe des Restbetrags.

Beim Kauf eines Möbelstücks mit dem Verkaufspreis  $W$  über Ratenzahlung müssen 3 nachschüssige Monatsraten der Höhe  $R$  bezahlt werden. Der zugehörige monatliche Aufzinsungsfaktor wird mit  $q_{12}$  bezeichnet.

- 3) Kreuzen Sie die zutreffende Gleichung an. [1 aus 5]

$W = R + \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2}$	<input type="checkbox"/>
$W \cdot q_{12}^3 = R + \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2}$	<input type="checkbox"/>
$W = \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2} + \frac{R}{q_{12}^3}$	<input type="checkbox"/>
$W \cdot q_{12}^3 = \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2} + \frac{R}{q_{12}^3}$	<input type="checkbox"/>
$W \cdot q_{12}^3 = R \cdot q_{12}^3 + R \cdot q_{12}^2 + R \cdot q_{12}$	<input type="checkbox"/>

### Kleinwald (B\_273)

Um ein zusätzliches Einkommen zu erwirtschaften, kauft ein Landwirt eine kleine Waldfläche.

- a) Er erwirbt eine Waldfläche mit einem Flächeninhalt von 18,6 Hektar (ha). Der Preis liegt bei € 0,95 pro Quadratmeter; der durchschnittliche Erlös pro Jahr soll € 300 pro Hektar betragen. Der Landwirt legt den Erlös an jedem Jahresende auf ein Sparbuch mit einem Jahreszinssatz  $i$ .
- Berechnen Sie den Kaufpreis.
  - Erstellen Sie eine Gleichung, mit deren Hilfe man die Zeitdauer in Jahren, bis der Landwirt Gewinn erzielt, berechnen kann.
  - Berechnen Sie den Gewinn 40 Jahre nach dem Kauf des Waldes bei einem Zinssatz von 0,8 % p. a.

### Kredit für einen Wohnungskauf \* (B\_223)

Frau Simon möchte eine Wohnung kaufen. Sie benötigt dazu einen Kredit und holt deswegen bei Banken verschiedene Angebote ein.

- a) Bank A bietet Frau Simon einen Kredit zu einem Zinssatz von 3 % p. a. an. Die monatlichen Raten sind nach Auszahlung der Kreditsumme von € 120.000 jeweils am Ende jedes Monats fällig. Die Kreditlaufzeit beträgt 20 Jahre. (Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

- Ermitteln Sie den zu 3 % p. a. äquivalenten Monatszinssatz.
- Berechnen Sie die Höhe der Monatsraten.

- d) Die jährliche Annuität  $A$  eines Kredits kann mittels verschiedener Formeln berechnet werden.

Eine Formel lautet:

$$A = K_0 \cdot \frac{i \cdot q^n}{q^n - 1}$$

Eine andere Formel lautet:

$$A = K_0 \cdot \frac{i}{1 - q^{-n}}$$

$K_0$  ... Kreditsumme

$i$  ... Jahreszinssatz

$n$  ... Laufzeit in Jahren

- Geben Sie an, was  $q$  in diesem Sachzusammenhang bedeutet.
- Zeigen Sie, dass diese beiden Formeln gleichwertig sind.

### Küchenkauf \* (B\_453)

Frau Tomić will eine neue Küche um € 30.000 kaufen.

- c) Für einen Kredit in Höhe von € 20.000 holt Frau Tomić ein Angebot von einer Bank ein. Die Bank schlägt für die Rückzahlung nachschüssige Jahresraten in Höhe von jeweils € 3.000 bei einem Jahreszinssatz  $i$  vor.

- 1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Restschuld  $S$  nach  $t$  Jahren.

$$S = \underline{\hspace{15em}}$$

### Lagerhalle \* (B\_484)

Für den Kauf einer Lagerhalle benötigt ein Unternehmen € 180.000. Es werden verschiedene Möglichkeiten für die Finanzierung überprüft.

- b) Das Unternehmen kann den Kauf der Lagerhalle mit einem Kredit in Höhe von € 180.000 finanzieren.

Der Kredit soll durch 40 nachschüssige Quartalsraten bei einem Zinssatz von 1 % p. q. getilgt werden.

- 1) Berechnen Sie die Höhe einer Quartalsrate.

### Liftgesellschaft (1) \* (B\_434)

- a) Für die Finanzierung eines Sessellifts hat eine Liftgesellschaft einen Kredit in Höhe von € 1,4 Mio. aufgenommen. Diesen Kredit zahlt die Liftgesellschaft durch nachschüssige Jahresraten in Höhe von € 90.000 bei einer Verzinsung von 4 % p. a. zurück. (Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

– Berechnen Sie, wie viele volle Jahresraten zu zahlen sind.

Nach 5 Jahren Kredittilgung gerät die Liftgesellschaft in Zahlungsschwierigkeiten und setzt die Rückzahlungen aus.

– Berechnen Sie die Höhe der Restschuld am Ende des 6. Jahres.

### Niedrigzinsphase \* (B\_568)

Infolge der Finanzmarktkrise 2008 entstand eine über Jahre andauernde Phase niedriger Zinsen.

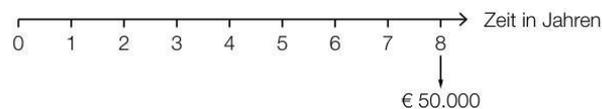
- c) In 8 Jahren sollen € 50.000 angespart werden. Die nachstehende Gleichung beschreibt den Ansparplan für einen positiven Jahreszinssatz.

$$R \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1} \cdot q^5 + 20000 \cdot q^2 = 50000$$

$R$  ... Rate

$q$  ... jährlicher Aufzinsungsfaktor

- 1) Tragen Sie alle Raten  $R$  und den Betrag in Höhe von € 20.000 auf der nachstehenden Zeitachse ein.



- 2) Berechnen Sie die Höhe der Rate  $R$  für den Fall, dass der Zinssatz 0 % p. a. ist.

### Obsthändler \* (B\_489)

Ein Obsthändler plant die Renovierung seiner Geschäftsräume.

- b) Der Obsthändler überlegt, die Renovierung erst in 2 Jahren durchzuführen, um bis dahin Geld anzusparen. Er geht davon aus, dass er monatlich nachschüssig € 2.400 auf ein Konto einzahlen könnte. Dadurch möchte er innerhalb von 2 Jahren € 60.000 ansparen.

- 1) Berechnen Sie denjenigen effektiven Jahreszinssatz  $i$ , bei dem der Obsthändler sein Sparziel genau erreichen würde.
- 2) Begründen Sie ohne Berechnung, warum der zugehörige effektive Jahreszinssatz niedriger ist, wenn die monatlichen Einzahlungen vorschüssig erfolgen.

### Parkgarage \* (B\_485)

Eine Baugesellschaft errichtet eine Parkgarage.

Es wird eine Nutzungsdauer von 40 Jahren angenommen.

Die Baugesellschaft rechnet mit einem kalkulatorischen Zinssatz von 4 % p. a.

- a) Die Baugesellschaft rechnet mit jährlich nachschüssigen Betriebskosten in Höhe von jeweils € 64.000.

1) Berechnen Sie den Barwert der Betriebskosten für die gesamte Nutzungsdauer.

### Pensionsvorsorge \* (B\_420)

Alexander möchte für seine Pension ansparen. In den folgenden Aufgaben wird die Kapitalertragssteuer nicht berücksichtigt.

- a) Er zahlt 15 Jahre lang monatlich vorschüssig € 400 auf ein mit 0,27 % p. m. verzinster privates Pensionskonto und lässt sein Geld anschließend 25 Jahre bei gleichbleibendem Zinssatz angelegt.

– Berechnen Sie seinen privaten Pensionsbetrag nach 40 Jahren.

- c) Er hat auf seinem privaten Pensionskonto, das mit 2 % p. a. verzinst wird, einen Betrag in Höhe von € 200.000 angespart.

Nun vergleicht er zwei Auszahlungsvarianten:

Variante 1: Er hebt am Ende jedes Jahres € 12.000 ab.

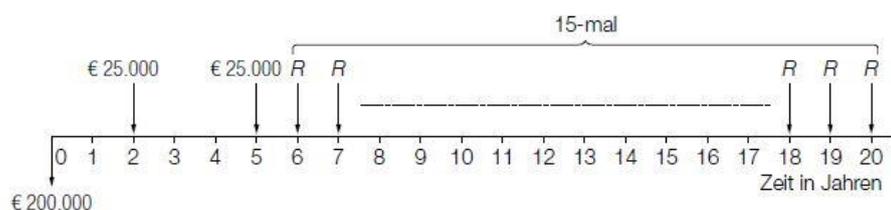
Variante 2: Er hebt am Ende jedes Jahres € 4.000 ab.

- Berechnen Sie, wie oft er bei Variante 1 den vollen Betrag abheben könnte.  
– Erklären Sie, warum bei Variante 2 das angesparte Kapital am Pensionskonto erhalten bleibt.

### Produzent von landwirtschaftlichen Geräten (B\_179)

Ein Hersteller landwirtschaftlicher Geräte entwickelt innovative Produkte.

- b) Für den Bau einer Produktionshalle muss das Unternehmen einen Kredit in Höhe von € 200.000 aufnehmen. Die folgende Grafik stellt das Angebot einer Rückzahlungsvariante dar:



- Beschreiben Sie den dargestellten Zahlungsverlauf.  
– Dokumentieren Sie, wie man die Höhe der Rate  $R$  bei einem gegebenen Jahreszinssatz  $i$  berechnen kann.  
– Berechnen Sie die Höhe der Rate  $R$  bei einem Zinssatz von 4 % p. a.

### Renovierungskredit \* (B\_349)

Frau Eberharter muss für die Renovierung ihrer Wohnung einen Kredit in Höhe von € 30.000 aufnehmen. Dazu holt sie verschiedene Angebote von Privatpersonen und von Banken ein. (Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

- b) Frau Eberharter recherchiert im Internet Angebote von Banken für Kredite in Höhe von € 30.000 mit einer Laufzeit von 60 Monaten.

Eine Bank bietet einen Kredit mit einer monatlichen Rate in Höhe von € 559,11 bei einem Zinssatz von 4,58 % p. a.

- Ermitteln Sie den zugehörigen äquivalenten Monatszinssatz.
- Überprüfen Sie nachweislich, ob es sich um eine vorschüssige oder eine nachschüssige Ratenzahlung handelt.

- c) Eine Bank bietet Frau Eberharter einen Kredit in Höhe von € 30.000 an, den sie in 10 nachschüssigen Halbjahresraten in Höhe von je € 3.480 zurückzahlen muss.

Für diesen Kredit kann Frau Eberharter einen Annuitätenzuschuss bei der Landesregierung beantragen, d. h., 10 % jeder Halbjahresrate werden vom Land übernommen.

- Berechnen Sie die Höhe der Halbjahresraten, die Frau Eberharter unter Berücksichtigung des Annuitätenzuschusses bezahlen muss.
- Ermitteln Sie den effektiven Jahreszinssatz, der sich für Frau Eberharter unter Berücksichtigung des Annuitätenzuschusses ergibt.
- Ermitteln Sie die Höhe desjenigen Annuitätenzuschusses in Euro, bei dem sich für Frau Eberharter ein effektiver Jahreszinssatz von null Prozent ergeben würde.

### Rücklage (B\_125)

Die Eltern von Martin legen für ihn 5 Jahre vor Abschluss der höheren Schule für sein späteres Studium € 22.500 als Rücklage auf ein Sparkonto.

Lisa erhält von ihren Eltern ab demselben Zeitpunkt 5 Jahre lang € 375 monatlich vorschüssig auf ein Sparkonto, das mit dem gleichen Jahreszinssatz wie bei Martin verzinst wird.

Der Zinssatz bleibt während dieser 5 Jahre konstant, es finden keine weiteren Transaktionen auf den beiden Konten von Martin und Lisa statt. Es gibt keine Kontoführungsgebühr.

- b) Lisa meint, dass zwar 60-mal € 375 wie bei Martin ebenfalls € 22.500 ergeben, aber die vorschüssige monatliche Ratenzahlung bei Verzinsung mit 0,2 % p. m. einem geringeren Barwert entspricht.

- Argumentieren Sie, weshalb Lisas Aussage stimmt.
- Berechnen Sie die Differenz zwischen dem Barwert der Ratenzahlung bei Lisa und dem Geldbetrag, den Martin von seinen Eltern erhält.  
Runden Sie das Ergebnis auf Euro.  
(Die Kapitalertragsteuer ist im gegebenen Zinssatz bereits berücksichtigt.)

- c) Für Martin wird das Geld mit einem Zinssatz von 2,5 % p. a. angelegt.  
Lisa möchte statt € 375 pro Monat 5 nachschüssige Jahresraten in Höhe von € 4.500 erhalten. Sie wünscht sich, dass der Zinssatz so hoch gewählt wird, dass sie nach 5 Jahren einen gleich hohen Betrag wie Martin bekommt.

- Berechnen Sie, wie hoch der Jahreszinssatz für Lisa unter dieser Voraussetzung sein müsste. Berücksichtigen Sie die Kapitalertragsteuer von 25 %.

### Seegrundstück \* (B\_415)

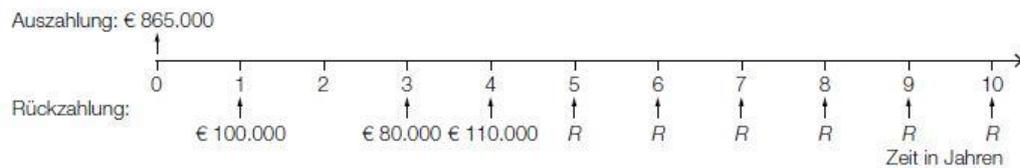
Für den Kauf eines Seegrundstücks benötigt der Käufer einen Kredit in Höhe von € 865.000.  
(Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

a) Ein Kreditinstitut macht folgendes Angebot:

Der Kreditnehmer bezahlt am Ende jedes Jahres eine Rate in Höhe von € 100.000 bei einem Zinssatz von 6,75 % p. a.

- Berechnen Sie, wie viele volle Raten der Kreditnehmer bezahlen muss.
- Berechnen Sie die Höhe des ein Jahr nach der letzten vollen Rate fälligen Restbetrags.

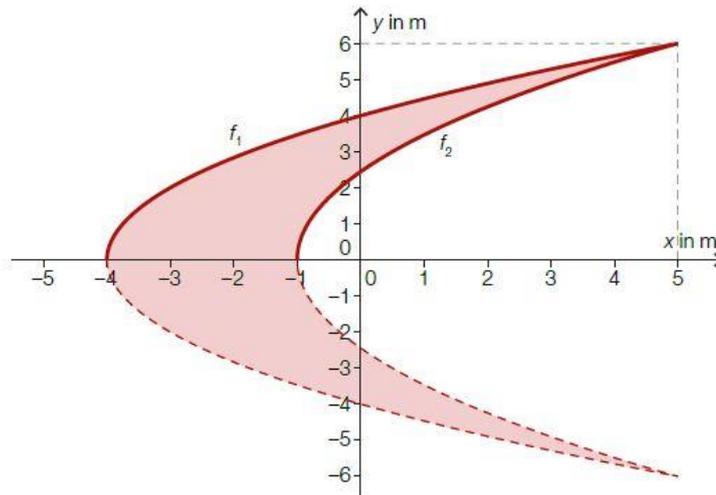
c) Ein weiteres Angebot zur Rückzahlung des Kredits innerhalb von 10 Jahren kann mithilfe folgender Zeitachse dargestellt werden:



- Beschreiben Sie den Rückzahlungsvorgang des in der Zeitachse dargestellten Angebots in Worten.
- Berechnen Sie die Ratenhöhe  $R$  bei einem Zinssatz von 6 % p. a.

### Sonnensegel (B\_091)

Vor der Eingangshalle einer Firma soll ein Sonnensegel montiert werden. Die nachstehende Abbildung zeigt den Entwurf des Designers nach Wahl eines geeigneten Koordinatensystems.



b) Die Kosten für die Herstellung des Sonnensegels aus besonders witterungsbeständigem Material inklusive Montage betragen € 12.500. Die Firma möchte diesen Betrag in Form von gleichbleibenden nachschüssigen Monatsraten zu je € 360 bezahlen.

- Berechnen Sie, wie viele Raten bei einem Zinssatz von 2,4 % p. a. von der Firma zu entrichten sind.

### Sparbuch \* (B\_222)

- a) Von einem Sparbuch soll über 10 Jahre hinweg jeweils am Monatsende ein Betrag von € 200 abgehoben werden. Unmittelbar nach der letzten Abhebung sollen noch € 1.500 auf dem Sparbuch verbleiben. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.
- Berechnen Sie die Höhe desjenigen Betrags, der zu Beginn auf das Sparbuch einbezahlt werden muss (ohne Berücksichtigung der KEST).
- c) Auf einem Sparbuch stehen zu Jahresbeginn € 25.000 zur Verfügung. In den folgenden 12 Jahren sollen jeweils am Jahresende € 2.300 abgehoben werden können, sodass das Guthaben zur Gänze aufgebraucht ist.
- Berechnen Sie den entsprechenden Jahreszinssatz (ohne Berücksichtigung der KEST).

### Sparkonto (B\_120)

- a) Karin zahlt 18 Jahre lang auf ein Sparkonto jährlich nachschüssig einen Betrag in Höhe von € 500 ein.  
Der angesparte Betrag kann bei einem Jahreszinssatz von 1,5 % und mit Berücksichtigung der KEST mithilfe der folgenden Funktion beschrieben werden:
- $$K = 500 \cdot \frac{1,01125^t - 1}{0,01125}$$
- $K$  ... Kapital in Euro (€)  
 $t$  ... Zeit in Jahren
- Erklären Sie, um welche finanzmathematische Formel es sich handelt.
  - Erklären Sie, wie der Zinssatz von 1,5 % in diese Formel einfließt.
- b) Karin hat einen Betrag in Höhe von € 10.000 angespart. Er wird mit einem Zinssatz von 1,2 % p. a. weiter verzinst (Nebengebühren und Steuern sind im angegebenen Zinssatz berücksichtigt). Karin möchte davon monatlich nachschüssig je € 200 abheben.
- Berechnen Sie, wie oft Karin genau diesen Betrag abheben kann.
  - Ermitteln Sie, welcher Restbetrag unmittelbar nach der letzten Abhebung auf dem Konto verbleibt.

### Stallbaufinanzierung (B\_170)

Ein Landwirt möchte einen größeren Stall bauen. Der Kostenvoranschlag beläuft sich auf € 375.000.

In den angegebenen Zinssätzen sind die Kapitalertragsteuer bzw. anfallende Gebühren berücksichtigt.

- a) Er spart seit 14 Jahren jährlich vorschüssig € 2.800, die zu 2,3 % p. a. verzinst werden. Zusätzlich hat er vor 22 Jahren € 65.000 auf ein Sparbuch gelegt, das mit 1,8 % p. a. verzinst wird.
- Berechnen Sie, wie viel Geld er für den Stallbau zusätzlich zu seinem vorhandenen Kapital aufbringen muss.

- c) Die Bank bietet zur Rückzahlung des Kredits von € 375.000 folgende Möglichkeit an:  
5 Jahre nach Auszahlung des Kreditbetrags wird einmalig eine Zahlung der Höhe  $x$  entrichtet. Der Rest wird durch eine 10 Jahre nach Auszahlung des Kreditbetrags beginnende Rente mit vorschüssigen Jahresraten der Höhe  $R$  über 20 Jahre abgedeckt.  
Es ist bei allen Zahlungen von einem Jahreszinssatz  $i$  auszugehen.

– Modellieren Sie eine Formel zur Berechnung des Einmalbetrags  $x$ .

### **Wohnungsrenovierung (B\_139)**

Im Zuge einer Wohnungsrenovierung benötigt Thomas einen Kredit in Höhe von € 30.000.

- a) Seine Bank bietet ihm einen Kredit mit einer Laufzeit von 10 Jahren, der bei einem Quartalszinssatz von 1 % p. q. durch nachschüssige Monatsraten getilgt werden soll.
- Ermitteln Sie den äquivalenten Monatszinssatz.
  - Erstellen Sie eine Gleichung, mit der die Ratenhöhe berechnet werden kann.
  - Berechnen Sie die Ratenhöhe.

### **Öffentlicher Verkehr in Wien \* (B\_515)**

- a) In Wien kostet die Jahreskarte für öffentliche Verkehrsmittel bei einmaliger Zahlung € 365. Alternativ dazu kann die Jahreskarte auch durch 12 monatliche Zahlungen zu je € 33 bezahlt werden.
- 1) Berechnen Sie denjenigen effektiven Jahreszinssatz, bei dem 12 vorschüssige Monatsraten in Höhe von € 33 einem Barwert von € 365 entsprechen.