Lösung: Abfindung * (B_538)

c1) Der (äquivalente) Quartalszinssatz beträgt rund 0,4962... %.

c2) Quartalsaufzinsungsfaktor $q_4 = 1{,}02^{\frac{1}{4}}$

$$80\,000 \cdot 1{,}02 = 4\,000 \cdot \frac{q_4^n - 1}{q_4 - 1} \cdot \frac{1}{q_4^{n-1}}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$n = 21{,}4...$

Es werden 21 volle Quartalsraten ausgezahlt.

c3) $$\left(80\,000 \cdot 1{,}02 - 4\,000 \cdot \frac{q_4^{21} - 1}{q_4 - 1} \cdot \frac{1}{q_4^{20}}\right) \cdot q_4^{21} = 1\,799{,}003...$$

Die Höhe der Restzahlung beträgt € 1.799,00.

Lösung: Anschaffungen (B_134)

a) monatlicher Aufzinsungsfaktor: $q_{12} = \sqrt[12]{1{,}045}$

$$50\,000 = R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{120}} \quad \Rightarrow \quad R = 516{,}020\ldots$$

Die Höhe der Monatsraten beträgt € 516,02.

Lösung: Ansparplan * (B_185)

c1) $$20\,000 = R \cdot \frac{1{,}02^{12} - 1}{0{,}02} \cdot 1{,}02 \quad \Rightarrow \quad R = 1\,461{,}952...$$

Der jährliche Ansparbetrag beträgt € 1.461,95.

c2) Sie wird damit ihr Sparziel nicht erreichen, da die Zahlungen großteils später erfolgen und sie somit weniger Zinsen erhält.

Lösung: Ansparpläne * (B_382)

d) ohne Verzinsung:

$$\frac{6\,000}{24} = 250$$

Ohne Verzinsung beträgt die Ratenhöhe € 250.

mit Verzinsung:

$$4\,000 \cdot 1{,}0025^{24} + R \cdot \frac{1{,}0025^{24} - 1}{0{,}0025} = 10\,000$$

$$R = (10\,000 - 4\,000 \cdot 1{,}0025^{24}) \cdot \frac{0{,}0025}{1{,}0025^{24} - 1} = 232{,}887\ldots$$

Mit Verzinsung beträgt die Ratenhöhe € 232,89.

Lösung: Autokauf (1) * (B_459)

d1) $17\,100 \cdot 0{,}92 = 15\,732$

Bei Barzahlung beträgt der Preis des Autos € 15.732.

d2) $$15\,732 = 3\,420 + 380 \cdot \frac{q_{12}^{36} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{36}}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$q_{12} = 1{,}0058...$

$i = q_{12}^{12} - 1 = 0{,}0719...$

Der Jahreszinssatz ist rund 7,2 %.

Lösung: Autokauf (3) * (B_546)

a1) $15\,000 = 216 \cdot \frac{q_{12}^{84} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{84}}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$q_{12} = 1{,}00463...$
$i_{12} = 0{,}46...\ \%$

a2) X ist die Restschuld nach 24 Monaten (2 Jahren) in Euro.

Lösung: Esszimmereinrichtung * (B_558)

b1) „Monatlich € 1,65 pro € 100" bedeutet, dass der Zinssatz 1,65 % p.m. beträgt.
$i = 1{,}0165^{12} - 1 = 0{,}2169...$

Der Jahreszinssatz beträgt also rund 21,7 %.

b2) $X = 4\,000 \cdot 1{,}217 - 370 \cdot \frac{1{,}217^{\frac{12}{12}} - 1}{1{,}217^{\frac{1}{12}} - 1} = 2{,}053...$
Der Restbetrag hat eine Höhe von € 2,05.

b3)

$W = \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2} + \frac{R}{q_{12}^3}$	☒

Lösung: Hotelerweiterung * (B_106)

d) $800\,000 = 38\,100 \cdot \frac{q_2^{30} - 1}{q_2 - 1} \cdot \frac{1}{q_2^{30}}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $q_2 = 1{,}02476...$
$i = q_2^2 - 1 = 0{,}05013...$

Für dieses Finanzierungsmodell beträgt der zugrunde liegende effektive Jahreszinssatz rund 5,01 %.

Lösung: Hühnerfarm (B_184)

d) Man berechnet jeweils den Barwert der Angebote und dividiert diesen durch die entsprechende Fläche in Quadratmetern.

Barwert von Angebot 2: $B = \frac{510}{1{,}025^{24}} \cdot \frac{1{,}025^{24} - 1}{0{,}025} = 9\,121{,}342... \approx 9\,121{,}34$

Kaufpreis pro Quadratmeter in Euro: $\frac{B}{2\,200} = 4{,}146... \approx 4{,}15$

Lösung: Kleinwald (B_273)

a) K ... Kaufpreis
$K = 18{,}6 \cdot 100^2 \cdot 0{,}95 = 176\,700$
Der Kaufpreis beträgt € 176.700.

$q = 1 + i$
n ... Zeit in Jahren
$176\,700 = 5\,580 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^n}$
Berechnung des Gewinns nach 40 Jahren:
$5\,580 \cdot \frac{1{,}008^{40} - 1}{0{,}008} - 176\,700 \cdot 1{,}008^{40} = 18\,795{,}561...$
Der Gewinn beträgt € 18.795,56.

Lösung: Kredit für einen Wohnungskauf * (B_223)

a) $i_{12} = \sqrt[12]{1{,}03} - 1 = 0{,}002466... \approx 0{,}247\ \%$

Der Monatszinssatz beträgt rund 0,247 %.

monatlicher Aufzinsungsfaktor: $q_{12} = i_{12} + 1$

Barwertformel für nachschüssige Monatsrente:

$$120\,000 = R \cdot \frac{q_{12}^{240} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{240}} \quad \Rightarrow \quad R \approx 663{,}088...$$

Die Höhe der Monatsraten beträgt € 663,09.

d) $q = 1 + i$ ist der jährliche Aufzinsungsfaktor.

Die Formeln sind äquivalent, weil $q^{-n} = \frac{1}{q^n}$.

Werden in der 1. Formel Zähler und Nenner durch q^n dividiert, erhält man die 2. Formel.

Lösung: Küchenkauf * (B_453)

c1) $$S = 20\,000 \cdot (1 + i)^t - 3\,000 \cdot \frac{(1 + i)^t - 1}{i}$$

oder:

$$S = 20\,000 \cdot q^t - 3\,000 \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} \text{ mit } q = 1 + i$$

Lösung: Lagerhalle * (B_484)

b1) $$180\,000 = R \cdot \frac{1{,}01^{40} - 1}{0{,}01} \cdot \frac{1}{1{,}01^{40}} \quad \Rightarrow \quad R = 5\,482{,}007...$$

Die Höhe einer Quartalsrate beträgt € 5.482,01.

Lösung: Liftgesellschaft (1) * (B_434)

a) $$1\,400\,000 = 90\,000 \cdot \frac{1{,}04^n - 1}{0{,}04} \cdot \frac{1}{1{,}04^n}$$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz:

$n = 24{,}81...$

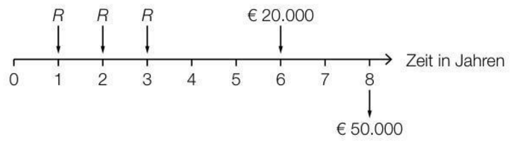
Die Liftgesellschaft muss 24 volle Jahresraten bezahlen.

$$\left(1\,400\,000 \cdot 1{,}04^5 - 90\,000 \cdot \frac{1{,}04^5 - 1}{0{,}04}\right) \cdot 1{,}04 = 1\,264\,478{,}834...$$

Die Höhe der Restschuld am Ende des 6. Jahres beträgt € 1.264.478,83.

Lösung: Niedrigzinsphase * (B_568)

c1)



c2) $R \cdot 3 + 20\,000 = 50\,000$

$R =$ € 10.000

Lösung: Obsthändler * (B_489)

b1) q_{12} ... monatlicher Aufzinsungsfaktor

$$60\,000 = 2\,400 \cdot \frac{q_{12}^{24} - 1}{q_{12} - 1}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $q_{12} = 1{,}00353...$

$i = q_{12}^{12} - 1 = 0{,}04319...$

Der effektive Jahreszinssatz beträgt rund 4,32 %.

b2) Im Falle vorschüssiger Einzahlungen wird jede Einzahlung 1 Monat länger verzinst. Da der Endwert gleich hoch ist, muss im Vergleich zu nachschüssigen Einzahlungen der zugehörige effektive Jahreszinssatz niedriger sein.

Lösung: Parkgarage * (B_485)

a1) $B_{\text{nach}} = 64\,000 \cdot \frac{1{,}04^{40} - 1}{0{,}04} \cdot \frac{1}{1{,}04^{40}} = 1\,266\,737{,}528...$

Der Barwert der Betriebskosten beträgt € 1.266.737,53.

Lösung: Pensionsvorsorge * (B_420)

a) $400 \cdot 1{,}0027 \cdot \frac{1{,}0027^{180} - 1}{0{,}0027} = 92\,803{,}312...$

$92\,803{,}312... \cdot 1{,}0027^{300} = 208\,385{,}722...$

Sein privater Pensionsbetrag beträgt nach 40 Jahren rund € 208.385,72.

c) $200\,000 = 12\,000 \cdot \frac{1{,}02^{n} - 1}{0{,}02} \cdot \frac{1}{1{,}02^{n}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$n = 20{,}4...$

Er könnte 20-mal den vollen Betrag in Höhe von € 12.000 abheben.

Bei Variante 2 bleibt das angesparte Kapital erhalten, weil der Betrag, den er am Ende jedes Jahres abhebt, genau den anfallenden Zinsen entspricht.

Lösung: Produzent von landwirtschaftlichen Geräten (B_179)

b) Der Kredit von € 200.000 wird zurückgezahlt, indem am Ende des 2. Jahres und am Ende des 5. Jahres jeweils € 25.000 bezahlt werden und ab dem 6. Jahr bis zum 20. Jahr immer am Ende des Jahres ein gleich hoher Betrag *R* bezahlt wird (bzw. der Rest in Form einer nachschüssigen Rente mit Raten der Höhe *R* innerhalb von 15 Jahren zurückgezahlt wird).

Die Höhe der Raten *R* wird berechnet, indem man den Betrag von € 200.000 5 Jahre mit dem Zinssatz *i* verzinst. Davon zieht man die € 25.000, die zu Ende des 5. Jahres bezahlt werden, und die 3 Jahre verzinsten € 25.000, die zu Ende des 2. Jahres bezahlt werden, ab. Die Differenz stellt den Barwert einer 15-jährigen nachschüssigen Rente mit Jahresraten der Höhe *R* bei einem Zinssatz *i* dar. Die Höhe dieser Rate *R* lässt sich mittels Technologieeinsatz berechnen.

$200\,000 \cdot 1{,}04^5 - (25\,000 + 25\,000 \cdot 1{,}04^3) \approx 190\,208{,}98$ … Barwert der 15-jährigen Rente

$190\,208{,}98 = R \cdot \frac{1}{1{,}04^{15}} \cdot \frac{1{,}04^{15} - 1}{0{,}04} \quad \Rightarrow \quad R \approx 17\,107{,}605...$

Die Höhe der Rate *R* beträgt € 17.107,61.

Ebenso könnte man den Zeitpunkt der Kreditaufnahme als ersten Bezugszeitpunkt verwenden.

$\left[200\,000 - \left(\frac{25\,000}{1{,}04^2} + \frac{25\,000}{1{,}04^5}\right)\right] \cdot 1{,}04^5 \approx 190\,208{,}98$ … Barwert der 15-jährigen Rente

Lösung: Renovierungskredit * (B_349)

b) $i_{12} = \sqrt[12]{1 + 0{,}0458} - 1 = 0{,}0037388\ldots$

Der Monatszinssatz beträgt rund 0,3739 %.

$q_{12} = 1 + i_{12}$

$B_{\text{nach}} = 559{,}11 \cdot \frac{q_{12}^{60} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{60}} = 30\,000{,}132\ldots$

$B_{\text{vor}} = B_{\text{nach}} \cdot q_{12} = 30\,112{,}297\ldots$

Es handelt sich um eine nachschüssige Ratenzahlung, da der Barwert der Raten in diesem Fall der Kreditsumme entspricht.

c) $3\,480 \cdot 0{,}9 = 3\,132$

Unter Berücksichtigung des Annuitätenzuschusses muss Frau Eberharter Halbjahresraten in Höhe von € 3.132 bezahlen.

$30\,000 = 3\,132 \cdot \frac{q_2^{10} - 1}{q_2 - 1} \cdot \frac{1}{q_2^{10}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $q_2 = 1{,}007906\ldots$

$i = (q_2)^2 - 1 = 0{,}01587\ldots \approx 1{,}59\ \%$

Der effektive Jahreszinssatz beträgt rund 1,59 %.

Die Verzinsung beträgt 0 %, wenn die Halbjahresraten $\frac{€\ 30.000}{10} = €\ 3.000$ betragen.
Dafür muss zur vereinbarten Halbjahresrate von € 3.480 ein Zuschuss in Höhe von € 480 gewährt werden.

Lösung: Rücklage (B_125)

b) Martin bekommt bar € 22.500.
Lisa würde in Zukunft monatlich € 375 bekommen, 60 Monate lang.
Um den Barwert dieser Ratenzahlung zu erhalten, müssen alle einzelnen 60 Raten auf den Anfangszeitpunkt abgezinst werden. Man erhält eine Folge von Beträgen:
{375; 374,25; 373,5; ...}
Die Summe dieser Beträge ergibt den Barwert und ist kleiner als 375 mal 60.

Martin: 22 500
Lisa: $375 \cdot \frac{1{,}002^{60} - 1}{0{,}002} \cdot \frac{1}{1{,}002^{59}} = 21\,224{,}8\ldots \approx 21\,225$

Die Differenz beträgt rund € 1.275.

c) Jahreszinssatz bei Martin nach Berücksichtigung der KESt:
$2{,}5\ \% \cdot 0{,}75 = 1{,}875\ \%$
$22\,500 \cdot 1{,}01875^5 = 4\,500 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1}$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $q = 1{,}046457\ldots$

Bei einem Jahreszinssatz von rund 4,65 %, in dem bereits die KESt berücksichtigt ist, würde Lisa nach 5 Jahren den gleichen Betrag wie Martin bekommen.

Lösung: Seegrundstück * (B_415)

a) $865\,000 = 100\,000 \cdot \frac{1{,}0675^n - 1}{0{,}0675} \cdot \frac{1}{1{,}0675^n}$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz:
$n = 13{,}42\ldots$
Der Kreditnehmer muss 13 volle Raten bezahlen.

$\left(865\,000 - 100\,000 \cdot \frac{1{,}0675^{13} - 1}{0{,}0675} \cdot \frac{1}{1{,}0675^{13}}\right) \cdot 1{,}0675^{14} = 43\,077{,}457\ldots$

Die Höhe des Restbetrags beträgt € 43.077,46.

c) Jeweils am Ende des ersten, des dritten und des vierten Jahres erfolgt eine Einmalzahlung in Höhe von € 100.000, € 80.000 bzw. € 110.000.
Ab dem fünften Jahr wird eine 6-mal zahlbare nachschüssige Jahresrate in Höhe von R vereinbart.

Restschuld zum Zeitpunkt $t = 4$ Jahre:
$865\,000 \cdot 1{,}06^4 - 100\,000 \cdot 1{,}06^3 - 80\,000 \cdot 1{,}06 - 110\,000 = 778\,140{,}970\ldots$

$778\,140{,}970\ldots = R \cdot \frac{1{,}06^6 - 1}{0{,}06} \cdot \frac{1}{1{,}06^6}$
Berechnung mittels Technologieeinsatz: $R = 158\,244{,}793\ldots$

Die Ratenhöhe beträgt € 158.244,79.

Lösung: Sonnensegel (B_091)

b) monatlicher Aufzinsungsfaktor $q_{12} = \sqrt[12]{1{,}024} = 1{,}00197...$

$12\,500 = 360 \cdot \frac{q_{12}^n - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^n}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$n = 36{,}00...$

Die Firma muss 36 Monatsraten zahlen.

Lösung: Sparbuch * (B_222)

a) $q_{12} = \sqrt[12]{1{,}015} = 1{,}00124...$

Barwert der Ratenzahlung: $200 \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{120}} = 22\,284{,}999...$

Barwert des Restbetrags: $\frac{1\,500}{1{,}015^{10}} = 1\,292{,}500...$

$22\,284{,}999... + 1\,292{,}500... = 23\,577{,}500...$

Es müssen zu Beginn € 23.577,50 auf das Sparbuch einbezahlt werden.

c) $25\,000 = 2\,300 \cdot \frac{q^{12} - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{12}}$
$q = 1{,}01555...$
Der jährliche Zinssatz beträgt rund 1,56 %.

Lösung: Sparkonto (B_120)

a) Der Endwert einer nachschüssigen Jahresrente wird mithilfe folgender Formel berechnet:
$E = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$
R ... jährliche Rate
i ... Jahreszinssatz
q ... Aufzinsungsfaktor, $q = 1 + i$
n ... Anzahl der Raten

Im Falle der vorliegenden Formel gilt:
$E = K$,
$n = t$,
$R =$ € 500,
$q = 1 + i = 1{,}01125$,
wobei $i = 1{,}125\ \%$ beträgt, das entspricht dem Jahreszinssatz von 1,5 %, von dem 25 % KESt abgezogen wurden.

b) Berechnung der Anzahl n der monatlichen nachschüssigen Auszahlungen:
$q_{12} = \sqrt[12]{1{,}012}$

$200 \cdot \frac{q_{12}^n - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^n} = 10\,000$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$n = 51{,}3...$

Karin kann genau 51-mal € 200 abheben.

Restbetrag $= 10\,000 \cdot q_{12}^{51} - 200 \cdot \frac{q_{12}^{51} - 1}{q_{12} - 1} = 62{,}257...$

Der Restbetrag beträgt rund € 62,26.

Lösung: Stallbaufinanzierung (B_170)

a) $2800 \cdot 1{,}023 \cdot \frac{1{,}023^{14} - 1}{0{,}023} \approx 46684{,}89$

$65000 \cdot 1{,}018^{22} \approx 96241{,}96$

$375000 - 46684{,}89 - 96241{,}96 = 232073{,}15$

Der Landwirt benötigt noch € 232.073,15.

c) Ansatzformel:

$q = 1 + i$

$375000 = \frac{x}{q^5} + R \cdot \frac{q^{20} - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{19}} \cdot \frac{1}{q^{10}}$

Andere richtige Formeln sind ebenfalls zu akzeptieren.
Die Berechnungsformel für x kann man unter Umständen auch direkt – ohne einen Ansatz – angeben. Ist die Formel korrekt, so gilt das auch als richtig angesetzt.

Lösung: Wohnungsrenovierung (B_139)

a) $i_{12} = \sqrt[12]{1{,}01^4} - 1 = \sqrt[3]{1{,}01} - 1 = 0{,}00332...$

Der äquivalente Monatszinssatz beträgt rund 0,33 %.

$30000 = R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{120}}$ mit $q_{12} = \sqrt[3]{1{,}01}$

$R = 303{,}546...$

Die Ratenhöhe beträgt € 303,55.

Lösung: Öffentlicher Verkehr in Wien * (B_515)

a1) q_{12} ... monatlicher Aufzinsungsfaktor

$365 = 33 \cdot \frac{q_{12}^{12} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{11}}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$q_{12} = 1{,}0151...$

$i = q_{12}^{12} - 1 = 0{,}19818...$

Der effektive Jahreszinssatz beträgt rund 19,82 %.