Lösung: Abfindung * (B_538)

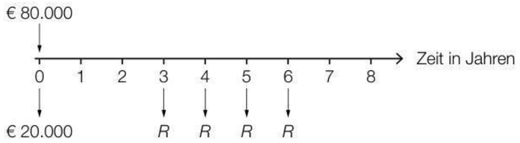
a1) $80000 = \frac{25000}{(1+i)^3} + \frac{30000}{(1+i)^6} + \frac{35000}{(1+i)^9}$

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$i = 0{,}01893...$

Der Jahreszinssatz beträgt rund 1,89 %.

b1)



Lösung: Ansparplan * (B_185)

a1) Die Anleihe wird die ersten 6 Jahre zu 1 % p. a., dann 2 Jahre zu 2 % p. a., 2 Jahre zu 3 % p. a. und schließlich 2 Jahre zu 3,5 % p. a. verzinst.

a2) $(1+i)^{12} = 1{,}01^6 \cdot 1{,}02^2 \cdot 1{,}03^2 \cdot 1{,}035^2 \quad \Rightarrow \quad i = 0{,}0191...$

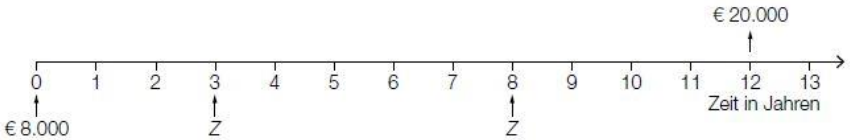
Der mittlere jährliche Zinssatz beträgt rund 1,9 %.

(Eine Berechnung des mittleren jährlichen Zinssatzes als gewichtetes arithmetisches Mittel ist als falsch zu werten.)

a3) $\frac{20000}{1{,}01^6 \cdot 1{,}02^2 \cdot 1{,}03^2 \cdot 1{,}035^2} = 15934{,}786...$

Monika muss € 15.934,79 anlegen, damit sie in 12 Jahren € 20.000 angespart hat.

b1)



b2) $8000 \cdot 1{,}02^{12} + Z \cdot 1{,}02^9 + Z \cdot 1{,}02^4 = 20000 \quad \Rightarrow \quad Z = 4326{,}655...$

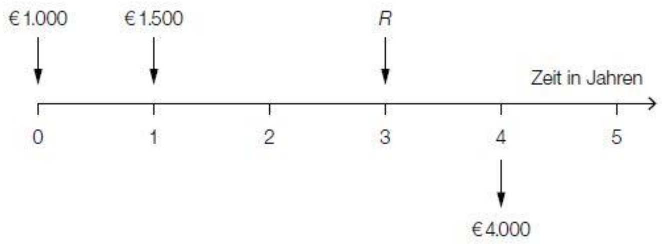
Die Höhe einer Einzahlung Z beträgt € 4.326,66.

Lösung: Ansparpläne * (B_382)

a) $E = B \cdot (1 + i)^n$

$$i = \sqrt[n]{\frac{E}{B}} - 1$$

b)



Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn der angesparte Betrag (€ 4.000) auf der Zeitachse nicht angegeben ist.

Der Restbetrag muss kleiner als € 1.500 sein, da die Einzahlungen verzinst werden.

Eine Begründung nur durch die nachstehende Rechnung ist nicht ausreichend.

$$1000 \cdot 1{,}03^4 + 1500 \cdot 1{,}03^3 + R \cdot 1{,}03 = 4000$$

$$R = \frac{4000 - 1000 \cdot 1{,}03^4 - 1500 \cdot 1{,}03^3}{1{,}03} = 1199{,}418\ldots$$

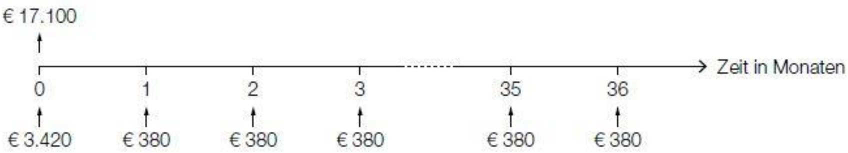
Als Restbetrag müssen € 1.199,42 eingezahlt werden.

c) € 5.000 werden 5 Perioden lang mit einem Zinssatz von 3,5 % pro Periode veranlagt. Nach 3 Perioden kommen noch € 1.000 dazu. Nach 5 Perioden beträgt der angesparte Geldbetrag € 7.009,66.

Wurden konkrete Perioden (z. B. Jahre) bei der Beschreibung verwendet, ist der Punkt zu vergeben.

Lösung: Autokauf (1) * (B_459)

a1)



a2) $3\,420 + 36 \cdot 380 = 17\,100$

Die Summe aller Zahlungen ergibt den Listenpreis. Daher ist die Behauptung des Händlers richtig.

b1) $17\,100 = R + \frac{R}{1{,}02^2} + \frac{R}{1{,}02^3}$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$R = 5\,889{,}461...$

Lösung: Autokauf (2) (B_143)

a) Die Kontoüberziehung verursacht bei einem Jahreszinssatz von 12 % für 16 Tage Kosten in Höhe von $\frac{16}{360} \cdot 0{,}12 = 0{,}005\dot{3} \approx 0{,}53$ % von € 65.699,50.
Diese sind viel geringer als der angebotene Skonto von 1,5 % der Kaufsumme.
Herr Maier sollte das Angebot des Verkäufers annehmen.

Lösung: Autokauf (3) * (B_546)

c1)

Es wird die Summe der Werte der beiden Spareinlagen zum heutigen Zeitpunkt berechnet.	A
Es wird die Summe der Werte der beiden Spareinlagen zum Zeitpunkt der Einzahlung von B_2 berechnet.	D

A	$B_1 \cdot 1{,}01^5 + B_2 \cdot 1{,}01^3$
B	$B_1 + B_2 \cdot 1{,}01^{-2}$
C	$B_1 \cdot 1{,}01^5 + B_2 \cdot 1{,}01^2$
D	$B_1 \cdot 1{,}01^2 + B_2$

Lösung: Baugrundstücke * (B_090)

b) Barwertvergleich:

Angebot 1: $150\,000 + \frac{50\,000}{1{,}03^2} = 197\,129{,}795...$

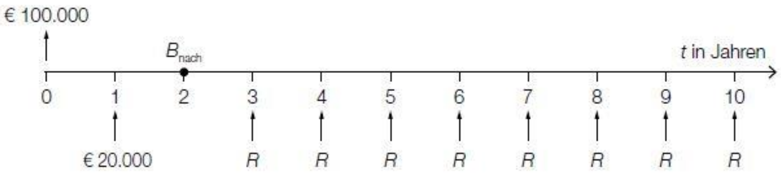
Angebot 2: $\frac{202\,000}{1{,}03} = 196\,116{,}504...$

$197\,129{,}795... - 196\,116{,}504... = 1\,013{,}290...$

Die beiden Angebote unterscheiden sich zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses also um rund € 1.013.

Bei einem Zinssatz von 1,98 % p. a. sind die beiden Angebote äquivalent.

c)



Bewertung aller Zahlungen auf den Bezugszeitpunkt $t = 2$ (Barwert der nachschüssigen Rente): $100\,000 \cdot 1{,}03^2 - 20\,000 \cdot 1{,}03 = 85\,490$

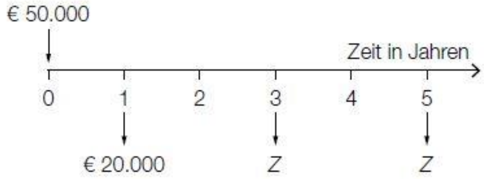
$85\,490 = R \cdot \frac{1{,}03^8 - 1}{0{,}03} \cdot \frac{1}{1{,}03^8} \quad \Rightarrow \quad R = 12\,178{,}596...$

Die Höhe der Zahlungen R beträgt € 12.178,60.

Lösung: Erbschaft * (B_264)

a1) Zinssatz: 3 % p.a.

a2)



a3) $50\,000 = \frac{20\,000}{1{,}03} + \frac{Z}{1{,}03^3} + \frac{Z}{1{,}03^5}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$Z = 17\,202{,}934...$

Die Höhe der Auszahlungen Z beträgt € 17.202,93.

b1) Da das Erbe angelegt und verzinst wird, kann Jutta einen höheren Betrag als monatlich € 500 abheben.

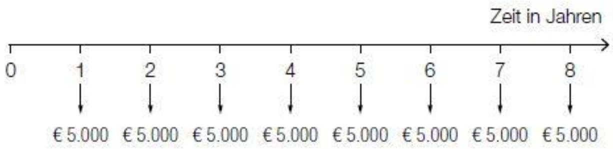
b2) $i_{12} = \sqrt[12]{1{,}03} - 1 = 0{,}002466...$
Der Monatszinssatz beträgt rund 0,247 %.

b3) $q_{12} = 1 + i_{12}$
$50\,000 \cdot 1{,}03^5 = R \cdot \frac{q_{12}^{60} - 1}{q_{12} - 1} + 20\,000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$R = 587{,}846...$

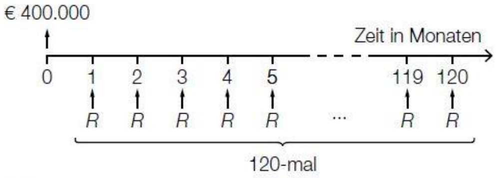
Die Höhe der Monatsraten beträgt € 587,85.

c1)

	☒
[...]	
[...]	
[...]	
[...]	

Lösung: Erweiterung der Produktpalette (B_142)

b)



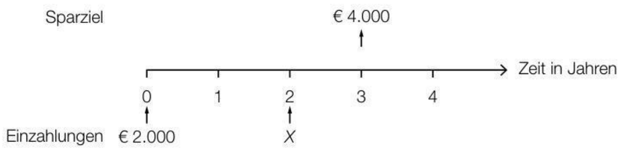
$400000 = R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{120}}$ mit $q_{12} = \sqrt[12]{1{,}037}$

$R = 3981{,}476...$

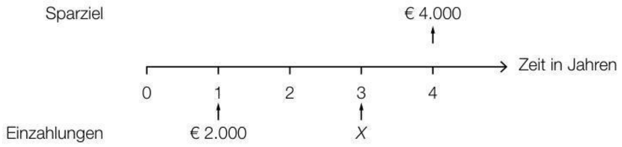
Die Höhe der Monatsraten beträgt € 3.981,48.

Lösung: Esszimmereinrichtung * (B_558)

a1)



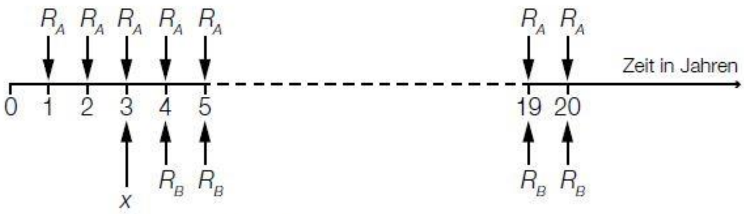
oder:



a2) $X = \frac{4\,000}{1 + i} - 2\,000 \cdot (1 + i)^2$

Lösung: Geplante Betriebsneuerungen (B_186)

c)

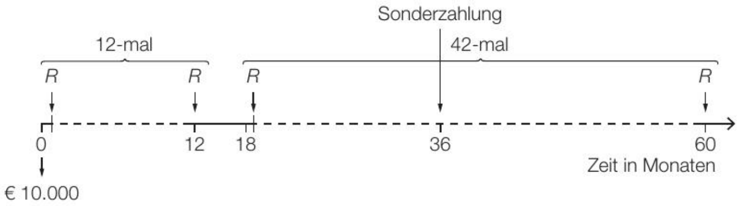


$X = 120\,000 \cdot q^3 - R_B \cdot \frac{q^{17} - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{17}}$

X entspricht dem Endwert einer 3-jährigen nachschüssigen Rente mit Jahresraten R_A und einem Jahreszinssatz von i.

Lösung: Gerätekauf (B_211)

c)



vereinbarte Ratenhöhe R:

$10\,000 = R \cdot \frac{1{,}0025^{60} - 1}{0{,}0025} \cdot \frac{1}{1{,}0025^{60}} \quad \Rightarrow \quad R \approx € 179{,}69$

Wert der 6 versäumten Monatsraten zum Zeitpunkt 18: $179{,}69 \cdot \frac{1{,}0025^{6} - 1}{0{,}0025} = 1\,084{,}90$

aufgezinst zum Zeitpunkt 36: $1\,084{,}90 \cdot 1{,}0025^{18} \approx 1\,134{,}77$

Die Sonderzahlung muss € 1.134,77 betragen.

Lösung: Immobilienhandel (B_127)

a) Man muss den Barwert des eingegangenen Vorschlags berechnen, damit man die Zahlungen vergleichen kann (Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik).

Bei dem vorliegenden Vorschlag erhält der Besitzer die Hälfte des Betrages sofort. Durch die spätere Einzahlung der 2. Hälfte entgehen dem Verkäufer die von € 2,2 Millionen berechneten Jahreszinsen.

Falls der Käufer diese Zinsen zu einem vom Verkäufer eingebrachten Kalkulationszinssatz und mit allen sonstigen Auslagen für Kontoführung etc. ebenfalls berücksichtigt, wäre erst dann dieser Zahlungsvorschlag gleichwertig.

(Offene Aufgabe, daher nicht unbedingt in dieser Weise zu argumentieren. Stichwörter: gleicher Stichtag zum Vergleich der Zahlungen.)

Lösung: Interneteinkäufe (B_216)

b) In der Finanzmathematik fallen der Beginn des 2. Monats und das Ende des 1. Monats zusammen. Man kann daher die vorschüssige Rente mit Beginn im 2. Monat gleichsetzen mit einer nachschüssigen Rente mit Beginn zum Zeitpunkt 0 = Kaufabschluss.

q_{12} … monatlicher Aufzinsungsfaktor

$$250 = 13 \cdot \frac{q_{12}^{22} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{22}} + \frac{17{,}22}{q_{12}^{23}}$$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$q_{12} = 1{,}0165\ldots$
$i_{eff} = q_{12}^{12} - 1 = 0{,}21716\ldots$
Der effektive Jahreszinssatz beträgt rund 21,72 % p. a.

Lösung: Kaffeeautomat * (B_285)

a1) $5500 = 1000 + 100 \cdot \frac{q_{12}^{48} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{48}} + \frac{900}{q_{12}^{48}}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $q_{12} = 1{,}0087...$

$i = q_{12}^{12} - 1 = 0{,}1099... \approx 11{,}0\ \%$

Lösung: Kredit und Sparbuch * (B_469)

a1) Bei Kredit 2 wird eine Ratenzahlung ausgesetzt, dadurch muss die verbleibende Ratenhöhe x größer sein als die ursprüngliche Ratenhöhe R.

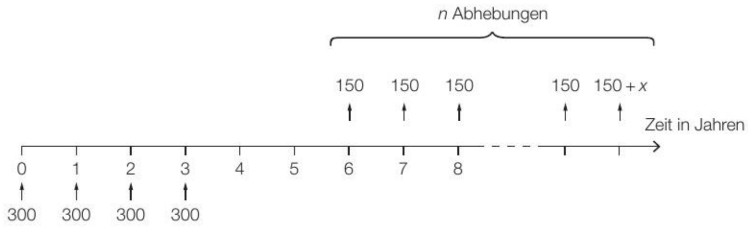
a2) $10\,000 = R \cdot \frac{1{,}03^7 - 1}{0{,}03} \cdot \frac{1}{1{,}03^7}$
$R = 1\,605{,}063...$
Die Ratenhöhe R beträgt € 1.605,06.

a3) $10\,000 \cdot 1{,}03^4 - 1\,605{,}06 \cdot 1{,}03^3 - 1\,605{,}06 \cdot 1{,}03^2 - 1\,605{,}06 \cdot 1{,}03 = 6\,145{,}175...$
Die Höhe der Restschuld zum Zeitpunkt 4 beträgt € 6.145,18.

Wird bei der Berechnung der Höhe der Restschuld die ungerundete Ratenhöhe verwendet, so ist dies ebenfalls als richtig zu werten.

b1) $B_1 = B \cdot (1 + i) - R$

c1)



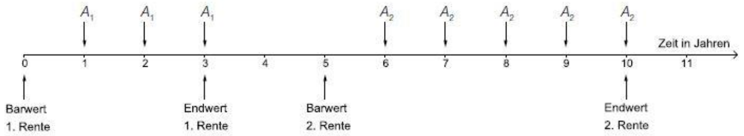
c2) K ist das angesparte Kapital nach 6 Jahren.

c3) $1\,283{,}33 = 150 \cdot \frac{1{,}015^n - 1}{0{,}015} \cdot \frac{1}{1{,}015^{n-1}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $n = 9{,}0...$
Es finden 9 Abhebungen statt.

Lösung: Kreditrückzahlung * (B_206)

b) Herr Maier bezahlt 3 Jahre lang nachschüssig Annuitäten in Höhe von A_1.
Im 4. und 5. Jahr leistet er keine Zahlungen, dafür bezahlt er ab dem 6. Jahr nachschüssig 5 Annuitäten in Höhe von A_2.



c) Da im 4. und 5. Jahr keine Rückzahlung erfolgt, erhöht sich die Restschuld des 3. Jahres um die Zinsen des 4. und 5. Jahres.

Lösung: Küchenkauf * (B_453)

a1) $3000 \cdot (1 + i)^7 + 3000 \cdot (1 + i)^4 + 3000 \cdot (1 + i) = 10000$

$i = 0{,}02617...$

Der zugrunde liegende Jahreszinssatz beträgt rund 2,62 %.

a2) $\frac{0{,}02617...}{0{,}75} = 0{,}0349...$

Der Jahreszinssatz vor Abzug der KESt beträgt rund 3,5 %.

Lösung: Lagerhalle * (B_484)

a1) $X = 180\,000 - 50\,000 \cdot (1 + i)^4 - 70\,000 \cdot (1 + i)^3$

a2) $X = 180\,000 - 50\,000 \cdot 1{,}025^4 - 70\,000 \cdot 1{,}025^3 = 49\,427{,}011...$
Es fehlt ein Betrag in Höhe von € 49.427,01.

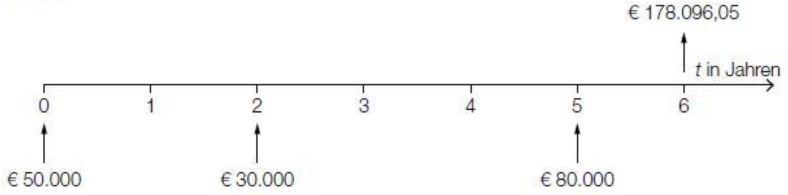
Lösung: Liftgesellschaft (1) * (B_434)

a) $1\,400\,000 = 90\,000 \cdot \frac{1{,}04^n - 1}{0{,}04} \cdot \frac{1}{1{,}04^n}$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz:
$n = 24{,}81...$
Die Liftgesellschaft muss 24 volle Jahresraten bezahlen.

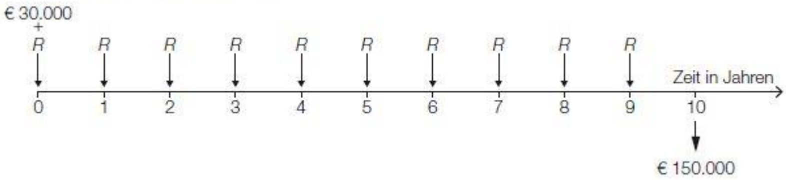
$\left(1\,400\,000 \cdot 1{,}04^5 - 90\,000 \cdot \frac{1{,}04^5 - 1}{0{,}04}\right) \cdot 1{,}04 = 1\,264\,478{,}834...$
Die Höhe der Restschuld am Ende des 6. Jahres beträgt € 1.264.478,83.

b) Der Betrag in Höhe von € 50.000 wird 2 Jahre zu 3 % p. a., dann 4 Jahre zu 3,5 % p. a. verzinst.



Lösung: Maschinenring (B_182)

a) R … Höhe einer Jahresrate in €



$q = 1{,}015$

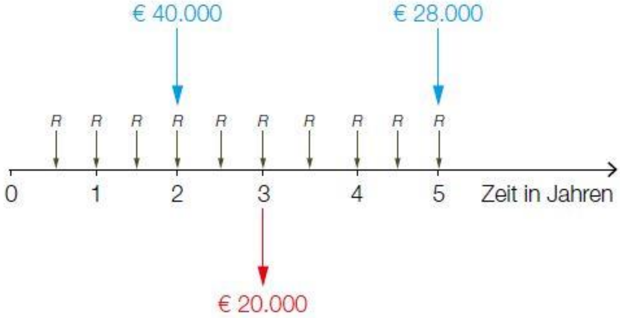
$30000 \cdot q^{10} + R \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} \cdot q = 150000 \;\Rightarrow\; R \approx € \; 10.603{,}06$

Die Höhe der Jahresraten beträgt € 10.603,06.

Wenn die Raten genau doppelt so hoch wären, wäre die Summe der bezahlten Raten zwar gleich hoch, der Endwert der 5-jährigen Rente aber niedriger, weil die Verzinsungen der ersten 5 Raten fehlten. Um den gleichen Wert zu erhalten, müssen die Raten daher mehr als doppelt so hoch sein.

Lösung: Modernisierung (B_324)

b)



Jahreszinssatz $i = 2{,}5\ \%$ p. a.

$q_2 = \sqrt{1{,}025} = 1{,}01242\ldots$

Der äquivalente Halbjahreszinssatz beträgt rund 1,24 % p. s.

Endwert der Rente $= 208\,732{,}46 - 40\,000 \cdot 1{,}025^3 + 20\,000 \cdot 1{,}025^2 - 28\,000 = 158\,669{,}335$

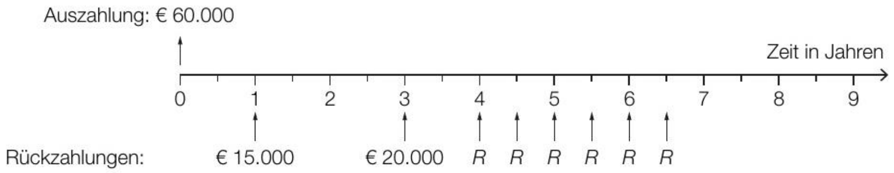
$$158\,669{,}335 = R \cdot \frac{q_2^{10} - 1}{q_2 - 1}$$

$R = 15\,000{,}000\ldots$

Die Höhe der halbjährlichen Raten beträgt € 15.000.

Lösung: Obsthändler * (B_489)

a1)



a2) $60\,000 = \frac{15\,000}{1{,}03^2} + \frac{20\,000}{1{,}03^6} + R \cdot \frac{1{,}03^6 - 1}{0{,}03} \cdot \frac{1}{1{,}03^{13}} \quad \Rightarrow \quad R = 6\,609{,}203\ldots$

Die Ratenhöhe beträgt € 6.609,20.

Lösung: Parkgarage * (B_485)

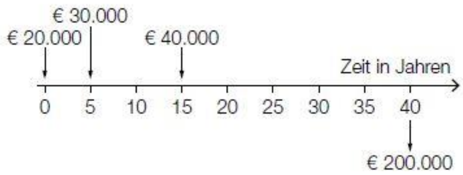
b1) $B = \frac{W_1}{1{,}04^{10}} + \frac{W_2}{1{,}04^{20}} + \frac{W_3}{1{,}04^{30}}$

b2) $92\,582{,}56 = \frac{60\,000}{1{,}04^{10}} + \frac{60\,000}{1{,}04^{20}} + \frac{W_3}{1{,}04^{30}} \quad \Rightarrow \quad W_3 = 79\,999{,}9...$

Die Wartungskosten W_3 betragen € 80.000.

Lösung: Pensionsvorsorge * (B_420)

b)



$200\,000 = 20\,000 \cdot (1 + i)^{40} + 30\,000 \cdot (1 + i)^{35} + 40\,000 \cdot (1 + i)^{25}$

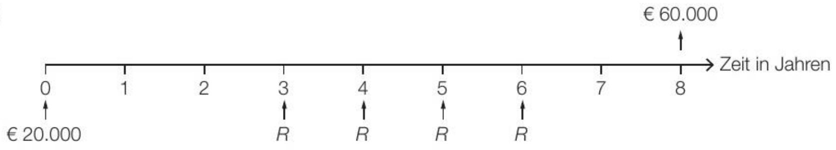
Lösung mittels Technologieeinsatz:

$i = 0{,}02514...$

Der zugehörige Jahreszinssatz beträgt rund 2,51 % p. a.

Lösung: Reisebus * (B_516)

b1)

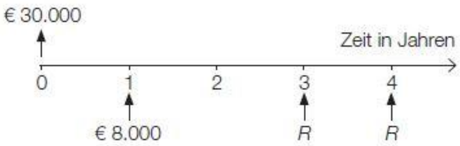


b2) $R = (60\,000 - 20\,000 \cdot 1{,}021^8) \cdot \frac{1{,}021 - 1}{(1{,}021^4 - 1) \cdot 1{,}021^2} = 8\,455{,}200...$

Die Höhe von R beträgt € 8.455,20.

Lösung: Renovierungskredit * (B_349)

a)



$30000 = 8000 \cdot 1{,}02^{-1} + R \cdot 1{,}02^{-3} + R \cdot 1{,}02^{-4}$
$R = 11872{,}921\ldots$

Die Ratenhöhe beträgt € 11.872,92.

Wenn die Raten früher bezahlt werden, wird die ausstehende Kreditsumme über eine kürzere Zeitspanne verzinst. Daher sind die Raten niedriger.

Lösung: Seegrundstück * (B_415)

c) Jeweils am Ende des ersten, des dritten und des vierten Jahres erfolgt eine Einmalzahlung in Höhe von € 100.000, € 80.000 bzw. € 110.000.
Ab dem fünften Jahr wird eine 6-mal zahlbare nachschüssige Jahresrate in Höhe von R vereinbart.

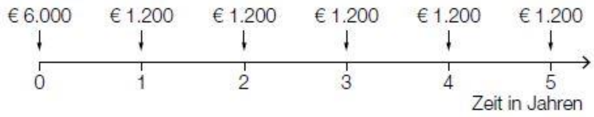
Restschuld zum Zeitpunkt t = 4 Jahre:
$865\,000 \cdot 1{,}06^4 - 100\,000 \cdot 1{,}06^3 - 80\,000 \cdot 1{,}06 - 110\,000 = 778\,140{,}970...$

$778\,140{,}970... = R \cdot \frac{1{,}06^6 - 1}{0{,}06} \cdot \frac{1}{1{,}06^6}$
Berechnung mittels Technologieeinsatz: $R = 158\,244{,}793...$

Die Ratenhöhe beträgt € 158.244,79.

Lösung: Segelboot (B_117)

a) Zeitlinie:



$$B = 6000 + 1200 \cdot \frac{(1+i)^5 - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^5}$$

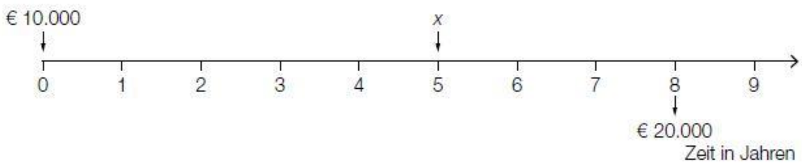
b) Ansatz mit Berechnung des Endwerts nach 7 Jahren:

$$6000 \cdot 1{,}08^7 + 1200 \cdot \frac{1{,}08^3 - 1}{0{,}08} \cdot 1{,}08^4 + R \cdot \frac{1{,}08^4 - 1}{0{,}08} = 10800 \cdot 1{,}08^7 \quad \Rightarrow \quad R = 649{,}412$$

Die Ratenhöhe beträgt € 649,41.

Lösung: Sparbuch * (B_222)

b)



$10000 \cdot 1{,}015^8 + x \cdot 1{,}015^3 = 20000$

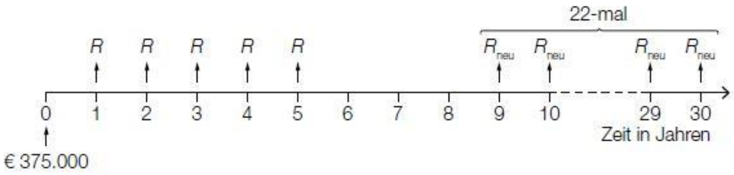
$x = 8353{,}499...$

Es muss ein Betrag in Höhe von € 8.353,50 nach 5 Jahren einbezahlt werden.

Wird der Betrag x schon nach 2 Jahren einbezahlt, so können dafür zusätzlich 3 Jahre lang Zinsen lukriert werden. Um diesen Betrag sinkt die Höhe von x bei früherer Einzahlung.

Lösung: Stallbaufinanzierung (B_170)

b)

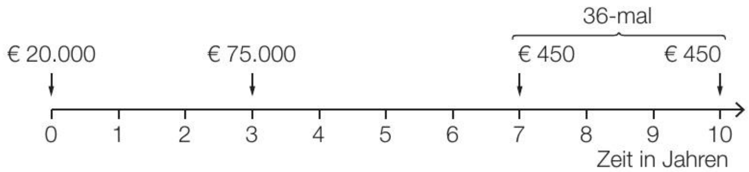


$$375\,000 = 23\,841 \cdot \frac{1{,}048^5 - 1}{0{,}048} \cdot \frac{1}{1{,}048^5} + R_{neu} \cdot \frac{1{,}048^{22} - 1}{0{,}048} \cdot \frac{1}{1{,}048^{30}} \quad \Rightarrow \quad R_{neu} = 29\,436{,}1\ldots$$

Die neuen Raten betragen auf ganze Euro gerundet € 29.436.

Lösung: Startkapital (B_146)

a)



$q_{12} = \sqrt[12]{1{,}021}$

$K_{10} = 20\,000 \cdot 1{,}021^{10} + 75\,000 \cdot 1{,}021^{7} + 450 \cdot \frac{q_{12}^{36} - 1}{q_{12} - 1} \cdot q_{12} = 128\,094{,}522...$

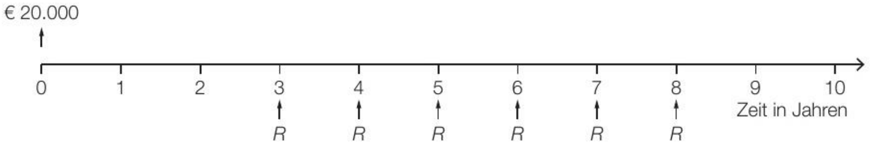
Simon kann nach 10 Jahren € 128.094,52 beheben.

$R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} = 128\,094{,}52 \quad \Rightarrow \quad R = 961{,}203...$

Die Ratenhöhe beträgt € 961,20.

Lösung: Wohnanlage * (B_502)

b1)



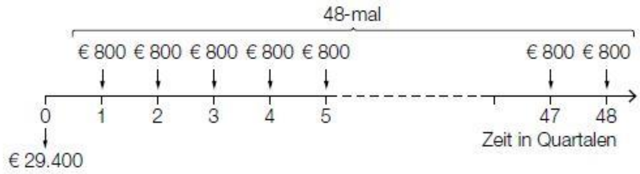
b2) $20\,000 \cdot (1 + i)^3 = R \cdot \frac{(1 + i)^6 - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1 + i)^5}$

Auch eine Verwendung des Aufzinsungsfaktors q = 1 + i *ist als richtig zu werten.*

b3) Da das Geld früher zurückgezahlt wird, fallen weniger Zinsen an, und damit sind die Raten weniger als doppelt so hoch.

Lösung: Wohnungsrenovierung (B_139)

b)



$$30000 - 600 = 800 \cdot \frac{q_4^{48} - 1}{q_4 - 1} \cdot \frac{1}{q_4^{48}}$$

$q_4 = 1{,}01147...$
$i_{eff} = 1{,}01147...^4 - 1 = 0{,}04669...$
Der effektive Jahreszinssatz des Angebots beträgt rund 4,67 % p.a.

Lösung: Zinsentwicklung * (B_528)

c1) $E = B \cdot (1 + i_0)^2 \cdot (1 + i_1)^3$

c2) $B \cdot 1{,}03^2 \cdot 1{,}01^3 = B \cdot (1 + i)^5$
$i = 0{,}01795... = 1{,}795...\ \%$

Eine Berechnung von i *mithilfe eines arithmetischen Mittels ist als falsch zu werten.*