

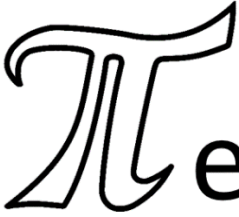
## 3.1/3.2 Finanzmathematik Grundlagen

### Maturaskript BHS – Teil B (12 Seiten)

Cluster: HAK (W2)

Grundkompetenzen:

- **B\_W\_3.1** Ein- und Auszahlungen auf einer Zeitachse veranschaulichen und gegebene grafische Darstellungen interpretieren und damit argumentieren
- **B\_W\_3.2** unregelmäßige Zahlungsströme auf Grundlage der Zinseszinsrechnung modellieren; Berechnungen für Barwert, Endwert und Zinssatz durchführen; die Ergebnisse interpretieren und damit argumentieren

Prof.  egischer

## Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben** (Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool) gelöst werden, um das Erlernete zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info: *bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, ...) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): <https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/>
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

- 1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: <https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM>
- 2) Gib im Feld „**Volltextsuche**“ die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.

### Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. A\_263) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**“ und „**GeoGebra**“ erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**“ erstellt.

### Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln	Weitere Regeln für Lehrpersonen
<ul style="list-style-type: none"><li>▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen.</li><li>▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist <b>nicht erlaubt</b>, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen.</li><li>▪ <b>Sie dürfen mein Materialen NICHT gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden.</b></li><li>▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden.</li><li>▪ Bei einem <b>Missbrauch</b> erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.</li></ul>	<p><b>WICHTIGSTE REGEL:</b> LehrerInnen dürfen die Materialien in <b>Ihrem eigenen Unterricht</b> verwenden:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen.</li><li>▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben.</li><li>▪ Es ist <b>nicht erlaubt</b>, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben.</li><li>▪ <b>LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.</b></li></ul>

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren ([info@prof-tegischer.com](mailto:info@prof-tegischer.com)). Auf meiner Homepage [prof-tegischer.com](http://prof-tegischer.com) finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

# BHS Teil B: Finanzmathematik

## 1. Allgemeine Begriffe

- **Kapital** - hier: Geldmittel, (in GE bzw. WE), die zu einem bestimmten Zeitpunkt vorhanden sind.
- **Zinsen** - Vergütung für das Ausleihen von Kapital über einen bestimmten Zeitraum.
- **Zinstermin** - Zeitpunkt der Fälligkeit, dh., der Zeitpunkt, zu dem die Zinsen gezahlt werden.
- **Zinsperiode** - Zeitraum zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zinsterminen.
- **Zinssatz**: Der Faktor  $i$ , mit dem die Zinsen  $Z$  aus dem Kapital  $K$  nach folgender Formel berechnet werden:  $Z = K \cdot i$
- **Barwert** - Wert eines Kapitals zu Beginn eines Verzinsungszeitraums
- **Endwert** - Wert eines Kapitals am Ende eines Verzinsungszeitraums
  
- **Ganzjährige Verzinsung**: Zinsperiode beträgt 1 Jahr
- **Unterjährige Verzinsung**: Zinsperiode ist ein Jahresbruchteil. Bei  $1/m$ -jähriger Verzinsung gibt es  $m$  Zinstermine pro Jahr. (Bem.: 1 Monat = 30 Tage | 1 Jahre = 12 Monate = 360 Tage)
- **Einfache Verzinsung**: Zinsen werden einmal berechnet und verändern sich nicht, auch wenn sie mehrmals ausbezahlt werden (Zinsen aus früheren Zinsperioden werden nicht mitverzinst, also nicht dem zu verzinsenden Kapital zugeschlagen).
- **Nachschüssige (dekursive) Verzinsung**: Zinstermin ist am Ende der Zinsperiode. Die Zinsen werden aus dem Anfangskapital (Barwert) berechnet. (TEXT: Ende eines Jahres z.B.)
- **Vorschüssige (antizipative) Verzinsung**: Zinstermin ist am Anfang der Zinsperiode. Die Zinsen werden aus dem Endwert des Kapitals berechnet (TEXT: Anfang eines Jahres z.B.).
  
- **aufzinsen** - Berechnung des Endwertes  
 $r = 1 + i$  heißt Aufzinsungsfaktor:  $K_n = K_0 \cdot r^n$ .
- **abzinsen, diskontieren** - Berechnung des Barwertes  
 $v = \frac{1}{1+i}$  heißt Abzinsungsfaktor. Es ist  $K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = K_n \cdot v^n$
- **kapitalisieren** - die Zinsen dem Kapital hinzurechnen
- Bei der **einfachen Verzinsung** werden die Zinsen am Ende der gesamten Verzinsungsdauer dem Kapital hinzugefügt.
- **Zinseszins** - nach jeder Zinsperiode werden die Zinsen kapitalisiert. Für die nächste Zinsperiode hat sich also das zu verzinsende Kapital erhöht. Die Zinsen werden mitverzinst.
  
- Der **effektive Jahreszins** (oder auch kurz: Effektivzins) ist eine Kennzahl, welche die jährlichen Gesamtkosten eines Kredits, bezogen auf die gesamte Kreditsumme und die vollständige Laufzeit des Darlehens, angibt. Im Prinzip sollen Verbraucher mit einem Blick auf den effektiven Jahreszins sofort erkennen, welche jährlichen Kosten im Rahmen einer Finanzierung auf sie zukommen. Und auch die Vergleichbarkeit unterschiedlicher Kreditangebote soll durch den Effektivzins erleichtert werden.

## Zinsen und Zinseszinsen

$K_0$  ... Anfangskapital  
 $K_n$  ... Endkapital nach  $n$  Jahren  
 $i$  ... Jahreszinssatz

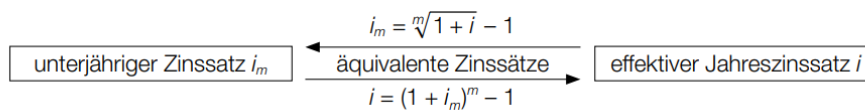
einfache Verzinsung:  $K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n)$

Zinseszinsen:  $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$

## Unterjährige Verzinsung

$m$ ... Anzahl der Zinsperioden pro Jahr	Für Zinsperioden gelten folgende Abkürzungen:
	p. a. ... pro Jahr
	p. s. ... pro Semester
	p. q. ... pro Quartal
	p. m. ... pro Monat

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i_m)^{n \cdot m}$$



Quelle: Formelsammlung Matura

### Abfindung \* (B\_538)

Vier Geschwister haben gemeinsam ein Haus geerbt.

Martha übernimmt das Haus und muss dafür ihren Geschwistern Andreas, Beate und Christian zum Zeitpunkt der Übernahme Geldbeträge in Höhe von jeweils € 80.000 auszahlen. Ein solcher Geldbetrag wird *Abfindung* genannt.

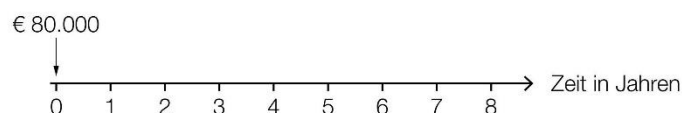
- a) Die Auszahlung der Abfindung in Höhe von € 80.000 an Andreas soll durch 3 Zahlungen erfolgen:
- € 25.000 nach 3 Jahren,
  - € 30.000 nach 6 Jahren und
  - € 35.000 nach 9 Jahren.

- 1) Stellen Sie eine Gleichung zur Berechnung des zugehörigen Jahreszinssatzes  $i$  auf.
- 2) Berechnen Sie diesen Jahreszinssatz  $i$ .

- b) Die Auszahlung der Abfindung in Höhe von € 80.000 an Beate soll durch Zahlungen erfolgen, die durch die nachstehende Gleichung beschrieben werden. Der Zinssatz beträgt 2 % p. a.

$$80\,000 = 20\,000 + R \cdot \frac{1,02^4 - 1}{1,02 - 1} \cdot \frac{1}{1,02^6}$$

- 1) Stellen Sie den Betrag € 20.000 und die Raten  $R$  auf der nachstehenden Zeitachse dar.

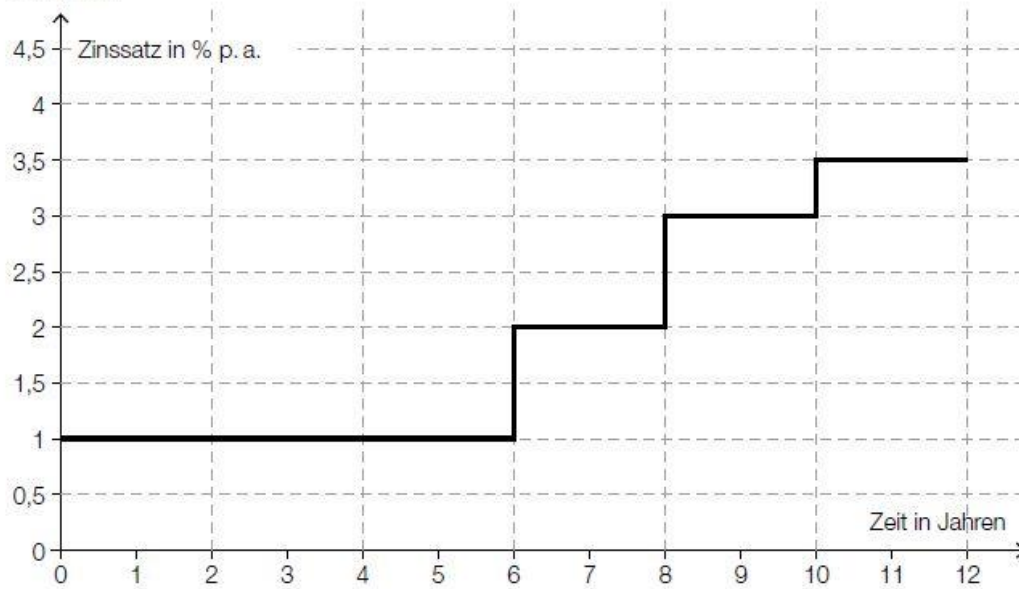


### Ansparplan \* (B\_185)

Monika möchte in den nächsten 12 Jahren € 20.000 ansparen.

Im Folgenden wird die Kapitalertragsteuer nicht berücksichtigt.

- a) Monika betrachtet das Angebot einer Bank für eine Wohnbauanleihe mit einer Laufzeit von 12 Jahren (siehe nachstehende Grafik). Die jährliche Verzinsung steigt dabei im Laufe der Jahre an.



- 1) Lesen Sie aus der obigen Grafik die Höhe und die Dauer der jährlichen Zinssätze ab.
  - 2) Berechnen Sie den mittleren jährlichen Zinssatz.
  - 3) Berechnen Sie die Höhe desjenigen Betrags, den Monika jetzt anlegen muss, um ihr Sparziel von € 20.000 in 12 Jahren zu erreichen.
- b) Auf einem Sparbuch bietet die Bank für 12 Jahre einen fixen Zinssatz von 2 % p. a. Um ihr Sparziel von € 20.000 in 12 Jahren zu erreichen, könnte Monika sofort € 8.000 einlegen und 2 gleich hohe Einzahlungen  $Z$  nach 3 Jahren und nach insgesamt 8 Jahren tätigen.
- 1) Veranschaulichen Sie Monikas Zahlungsplan und das Sparziel auf einer Zeitachse.
  - 2) Berechnen Sie die Höhe der Einzahlung  $Z$ .

### Ansparpläne \* (B\_382)

Für die Finanzierung größerer Anschaffungen ist es oft nötig, einen Geldbetrag anzusparen. Im Folgenden wird die Kapitalertragsteuer nicht berücksichtigt.

- a) Andrea möchte einen Geldbetrag  $E$  ansparen. Dazu legt sie einen Geldbetrag  $B$ , der mit dem jährlichen Zinssatz  $i$  verzinst wird, für  $n$  Jahre auf einem Sparkonto an.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von  $E$ , wenn  $B$ ,  $n$  und  $i$  bekannt sind.

$$E = \underline{\hspace{10cm}}$$

– Formen Sie diese Formel nach dem Zinssatz  $i$  um.

- b) Bernhard möchte auf einem Konto in 4 Jahren € 4.000 angespart haben. Dazu will er sofort € 1.000 auf das Konto legen, nach 1 Jahr € 1.500 und nach 3 Jahren den nötigen Restbetrag  $R$ . Der Zinssatz beträgt 3 % p. a.

- Veranschaulichen Sie diesen Zahlungsstrom auf einer Zeitachse.
- Erklären Sie in Worten (ohne Rechnung), warum der Restbetrag  $R$  kleiner als € 1.500 sein muss.
- Berechnen Sie den Restbetrag  $R$ .

- c) Cornelia führt für ihren Ansparplan folgende Rechnung durch:

$$5000 \cdot 1,035^5 + 1000 \cdot 1,035^2 \approx 7009,66$$

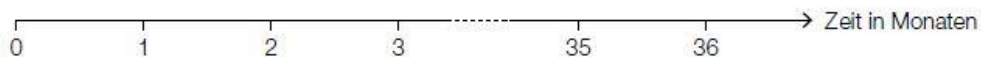
- Beschreiben Sie diesen Ansparplan hinsichtlich der Zahlungen, des Zinssatzes, der Verzinsungsdauer und des angesparten Geldbetrags in Worten.

### Autokauf (1) \* (B\_459)

Frau Kopecek möchte ein neues Auto mit einem Listenpreis von € 17.100 kaufen. Dabei stehen verschiedene Finanzierungsmöglichkeiten zur Auswahl.

- a) Ein Händler verlangt eine Anzahlung von € 3.420 und 36 nachschüssige Monatsraten zu je € 380.

- 1) Veranschaulichen Sie die Zahlungen und den Listenpreis auf der nachstehenden Zeitachse.



Der Händler behauptet, dass es sich bei dieser Finanzierung um eine „Null-Prozent-Finanzierung“ handelt.

Unter einer „Null-Prozent-Finanzierung“ versteht man, dass keine Zinsen verrechnet werden.

- 2) Zeigen Sie, dass die Behauptung des Händlers richtig ist.

- b) Bei „Drittelfinanzierung“ muss Frau Kopecek sofort, am Ende des 2. Jahres und am Ende des 3. Jahres jeweils einen gleich hohen Betrag  $R$  bezahlen. Der Zinssatz beträgt 2 % p. a.

- 1) Erstellen Sie eine Gleichung zur Berechnung von  $R$ .
- 2) Berechnen Sie  $R$ .

### Autokauf (2) (B\_143)

Ein neues Auto kostet € 66.700.

- a) Herr Maier möchte dieses Auto kaufen. Innerhalb von 30 Tagen ist die Rechnung zu bezahlen. Der Verkäufer bietet ihm bei Barzahlung des Wagens innerhalb von 14 Tagen einen Skonto (Preisnachlass bei Zahlung binnen einer bestimmten Frist) von 1,5 % des Kaufpreises an. Leider verfügt Herr Maier erst 30 Tage nach dem Autokauf über das notwendige Geld. Um das Skonto-Angebot des Verkäufers annehmen zu können, müsste er sein Konto bei einem Überziehungszinssatz von 12 % p. a. überziehen.
- Überprüfen Sie, ob Herr Maier unter diesen Bedingungen das Auto innerhalb der ersten 14 Tage nach Kauf bezahlen soll.

### Autokauf (3) \* (B\_546)

Clara möchte ein neues Auto kaufen.

- c) Clara hat vor 5 Jahren den Geldbetrag  $B_1$  und vor 3 Jahren den Geldbetrag  $B_2$  auf ein Konto eingezahlt. Der Zinssatz beträgt 1 % p. a.
- 1) Ordnen Sie den beiden Beschreibungen jeweils den passenden Ausdruck aus A bis D zu.

Es wird die Summe der Werte der beiden Spareinlagen zum heutigen Zeitpunkt berechnet.		A	$B_1 \cdot 1,01^5 + B_2 \cdot 1,01^3$
		B	$B_1 + B_2 \cdot 1,01^{-2}$
Es wird die Summe der Werte der beiden Spareinlagen zum Zeitpunkt der Einzahlung von $B_2$ berechnet.		C	$B_1 \cdot 1,01^5 + B_2 \cdot 1,01^2$
		D	$B_1 \cdot 1,01^2 + B_2$

### Baugrundstücke \* (B\_090)

Die Preise von Baugrundstücken sind in den letzten Jahren erheblich gestiegen.

- b) Frau Maier möchte ein Baugrundstück verkaufen. Sie bekommt zwei Angebote.

Herr Altmann bietet € 150.000 sofort bei Vertragsabschluss und € 50.000 nach 2 Jahren.  
Frau Bogner bietet € 202.000 ein Jahr nach Vertragsabschluss.

Frau Maier vergleicht die beiden Angebote.

– Weisen Sie für einen Zinssatz von 3 % p. a. nach, dass sich die beiden Angebote zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses um rund € 1.013 unterscheiden.

Für die beiden Angebote wird folgende Gleichung aufgestellt:

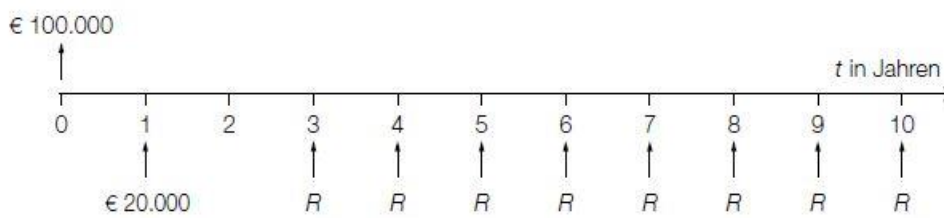
$$150\,000 \cdot x^2 + 50\,000 = 202\,000 \cdot x$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist  $x \approx 1,0198$ .

– Interpretieren Sie die Bedeutung von  $x$  im gegebenen Sachzusammenhang.

- c) Herr Müller nimmt für den Kauf eines Baugrundstücks einen Kredit in Höhe von € 100.000 auf. Der vereinbarte Zinssatz beträgt 3 % p. a.

Der Kredit soll durch die auf der nachstehenden Zeitachse dargestellten Zahlungen vollständig getilgt werden.



Die Zahlungen  $R$  können als nachschüssige Rente aufgefasst werden.

- Markieren Sie auf der Zeitachse den Bezugszeitpunkt für den Barwert dieser nachschüssigen Rente.
- Berechnen Sie die Höhe der Zahlungen  $R$ .

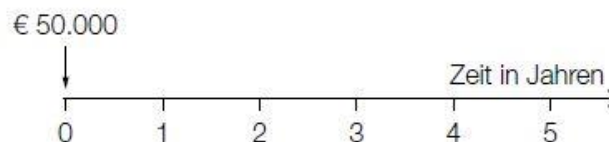
### Erbschaft \* (B\_264)

- a) Armin erhält ein Erbe in Höhe von € 50.000, das in Form von 3 Beträgen in den nächsten 5 Jahren ausbezahlt wird.

Die Höhe der Auszahlungen  $Z$  kann mit der nachstehenden Gleichung berechnet werden:

$$50\,000 = \frac{20\,000}{1,03} + \frac{Z}{1,03^3} + \frac{Z}{1,03^5}$$

- 1) Lesen Sie den zugehörigen Jahreszinssatz ab.
- 2) Veranschaulichen Sie alle in der Gleichung vorkommenden Auszahlungen auf der nachstehenden Zeitachse.



- 3) Berechnen Sie die Höhe der Auszahlungen  $Z$ .

- b) Jutta hat € 50.000 geerbt. Diesen Betrag legt sie mit einer Verzinsung von 3 % p. a. an.

In den nächsten 5 Jahren will sie nun jeweils am Ende jedes Monats einen gleich hohen Betrag abheben, sodass nach diesen 5 Jahren vom angelegten Geld ein Betrag in Höhe von € 20.000 vorhanden ist.

Jutta überlegt, dass sie monatlich rund  $\frac{€\,50.000 - €\,20.000}{60} = €\,500$  abheben kann.

- 1) Begründen Sie, warum die tatsächlichen Monatsraten größer als € 500 sind.
- 2) Berechnen Sie den zugehörigen äquivalenten Monatszinssatz.
- 3) Berechnen Sie die Höhe dieser tatsächlichen Monatsraten.



c) Auf den unten stehenden Zeitachsen sind Erbschaftsauszahlungen dargestellt.

1) Kreuzen Sie diejenige Auszahlungsvariante an, die bei einem positiven Zinssatz den größten Barwert hat. [1 aus 5]

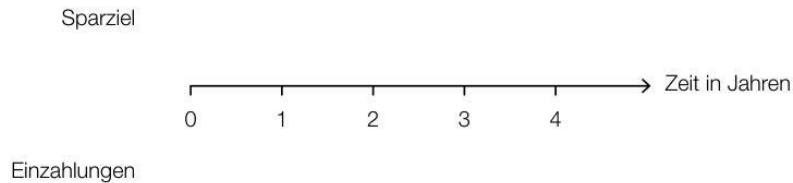
<p>Zeit in Jahren</p> <p>0 1 2 3 4 5 6 7 8</p> <p>↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓</p> <p>€ 5.000 € 5.000 € 5.000 € 5.000 € 5.000 € 5.000 € 5.000 € 5.000</p>	<input type="checkbox"/>
<p>Zeit in Jahren</p> <p>0 1 2 3 4 5 6 7 8</p> <p>↓ ↓ ↓ ↓</p> <p>€ 10.000 € 10.000 € 10.000 € 10.000</p>	<input type="checkbox"/>
<p>Zeit in Jahren</p> <p>0 1 2 3 4 5 6 7 8</p> <p>↓ ↓</p> <p>€ 20.000 € 20.000</p>	<input type="checkbox"/>
<p>Zeit in Jahren</p> <p>0 1 2 3 4 5 6 7 8</p> <p>↓ ↓</p> <p>€ 20.000 € 20.000</p>	<input type="checkbox"/>
<p>Zeit in Jahren</p> <p>0 1 2 3 4 5 6 7 8</p> <p>↓</p> <p>€ 40.000</p>	<input type="checkbox"/>

### Esszimmereinrichtung \* (B\_558)

Petra möchte eine neue Esszimmereinrichtung kaufen, die € 4.000 kostet.

- a) Petra hat vor 3 Jahren € 2.000 und vor 1 Jahr den Betrag  $X$  auf ein Konto eingezahlt, sodass sie nun als Sparziel den Betrag € 4.000 auf diesem Konto hat.

- 1) Veranschaulichen Sie diesen Zahlungsstrom (Einzahlungen und Sparziel) auf der nachstehenden Zeitachse.



Die eingezahlten Beträge werden mit dem Jahreszinssatz  $i$  verzinst.

- 2) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Höhe des Betrags  $X$  auf. Verwenden Sie dabei die Beträge € 4.000 und € 2.000 sowie den Jahreszinssatz  $i$ .

$$X = \underline{\hspace{10cm}}$$

### Geplante Betriebsneuerungen (B\_186)

Ein Landwirt plant Neuerungen in der Bewässerung seiner Felder und eine Vergrößerung von Weideflächen, für die er einen Kredit benötigt.

- c) Der Landwirt benötigt für seine Vorhaben einen Kredit in Höhe von € 120.000. Zur Finanzierung bietet ihm eine Bank 2 Angebote mit gleichem Jahreszinssatz  $i$ :

Angebot A: Rückzahlung in Form von sofort beginnenden nachschüssigen Jahresraten der Höhe  $R_A$  über 20 Jahre

Angebot B: in den ersten 3 Jahren keine Zahlungen, am Ende des 3. Jahres eine Einmalzahlung der Höhe  $X$  und anschließend 17 nachschüssige Jahresraten der Höhe  $R_B$

- Veranschaulichen Sie beide Rückzahlungsvarianten auf einer gemeinsamen Zeitachse.
- Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von  $X$  aus  $R_B$  und dem Aufzinsungsfaktor  $q = 1 + i$ .

$$X = \underline{\hspace{10cm}}$$

- Erklären Sie, wie hoch der Betrag  $X$  sein muss, damit die 17 folgenden Jahresraten gleich hoch wie die Jahresraten bei Angebot A sind.

### Gerätekauf (B\_211)

Familie Kurz benötigt für ihre neue Wohnung Küchengeräte.

- c) Familie Kurz vereinbart mit ihrer Bank einen Kredit in Höhe von € 10.000. Dieser ist durch nachschüssige Monatsraten innerhalb von 5 Jahren zu begleichen. Die Bank bietet einen Zinssatz von 0,25 % p. m. an.

Nach Zahlung von 12 Raten werden ein halbes Jahr keine Rückzahlungen geleistet. Anschließend werden die vereinbarten Raten weiterbezahlt. Die versäumten Zahlungen werden durch eine Sonderzahlung 3 Jahre nach Kreditaufnahme abgegolten.

- Stellen Sie den Verlauf der Kreditrückzahlung auf einer Zeitachse dar.
- Berechnen Sie die Höhe der vereinbarten Raten.
- Berechnen Sie, wie hoch die Sonderzahlung sein muss, um die versäumten Zahlungen nachzuholen.

### Immobilienhandel (B\_127)

Eine Immobilie soll verkauft werden. Der Barwert dieser Immobilie wird mit € 4.400.000 veranschlagt.

- a) Ein Kaufinteressent könnte die 1. Hälfte des Betrags sofort bezahlen, die 2. Hälfte aber erst nach 1 Jahr.
- Argumentieren Sie, ohne zu rechnen, welche Zusatzforderungen an den Käufer mindestens gestellt werden müssten, damit der Verkäufer mit einem Zahlungsaufschub der 2. Hälfte einverstanden sein könnte.

### Interneteinkäufe (B\_216)

Das Einkaufen im Internet erfreut sich immer größerer Beliebtheit.

- b) Ein Versandhaus bietet seinen Internetkunden die Möglichkeit, ihre Rechnung durch Ratenzahlung zu begleichen. Die Rückzahlung erfolgt monatlich vorschüssig. Die erste Rate ist einen Monat nach Kaufabschluss fällig.

- Erklären Sie, warum der als vorschüssig angegebene Rückzahlungsmodus auch als nachschüssige Rente aufgefasst werden kann.

Ein Betrag von € 250 wird durch 23 Monatsraten beglichen. Die ersten 22 Raten betragen jeweils € 13, die letzte Rate € 17,22.

- Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz, der diesem Zahlungsmodus zugrunde liegt.

## Kaffeeautomat \* (B\_285)

Der Elternverein einer Schule entschließt sich, einen Kaffeeautomaten für Schüler/innen und Lehrer/innen anzuschaffen.

- a) Die Kosten für den Kaffeeautomaten betragen € 5.500.

Der Elternverein erhält folgendes Leasingangebot:

- Anzahlung: € 1.000 bei Vertragsabschluss
- 48 Monatsraten zu je € 100
- Die Ratenzahlungen beginnen einen Monat nach Vertragsabschluss.
- Der Restwert in Höhe von € 900 ist gleichzeitig mit der letzten Rate zu bezahlen.

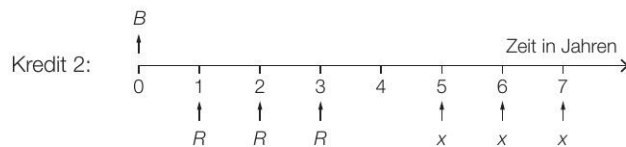
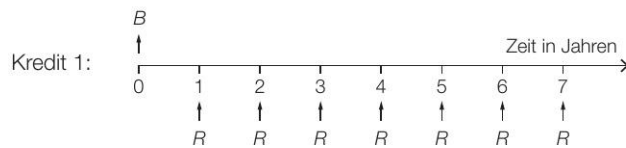
- 1) Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz für dieses Angebot.

## Kredit und Sparbuch \* (B\_469)

Die Begriffe *Kredit* und *Sparbuch* werden in dieser Aufgabe in vereinfachter Form ohne Berücksichtigung von Gebühren oder Steuern verwendet.

- a) Die unten stehenden Zeitachsen beschreiben die Rückzahlungen von 2 Krediten, die nach 7 Jahren vollständig getilgt sind.

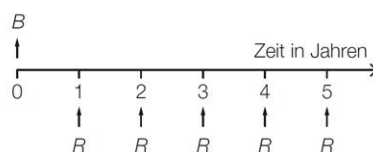
Bei beiden Krediten sind der Zinssatz, die Kredithöhe  $B$  und die Ratenhöhe  $R$  jeweils gleich hoch.



- 1) Argumentieren Sie, dass die Ratenhöhe  $x$  höher sein muss als die Ratenhöhe  $R$ .

Die Kredithöhe  $B$  beträgt € 10.000. Der Zinssatz beträgt 3 % p. a.

- 2) Berechnen Sie die Ratenhöhe  $R$ .
- 3) Berechnen Sie für Kredit 2 die Höhe der Restschuld zum Zeitpunkt  $t = 4$  Jahre.
- b) Ein Kredit in der Höhe  $B$  wird mit einem Jahreszinssatz  $i$  verzinst. Die Höhe der jährlichen Rate beträgt  $R$ .



Nachdem die erste Rate  $R$  zurückgezahlt wurde, beträgt die Restschuld  $B_1$ .

- 1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von  $B_1$  aus  $B$ ,  $R$  und  $i$ .

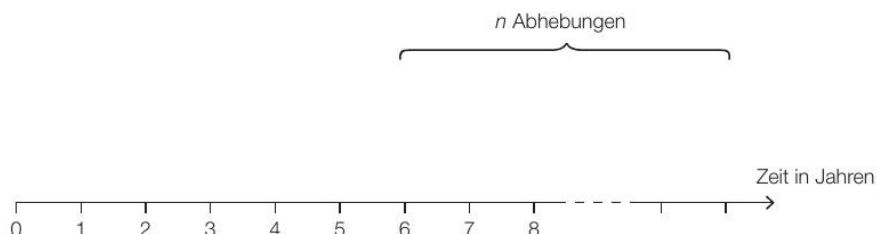
$$B_1 = \underline{\hspace{10cm}}$$

- c) Jemand zahlt in 4 aufeinanderfolgenden Jahren jeweils zu Jahresbeginn einen Betrag in Höhe von € 300 auf ein Sparbuch ein. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.

Beginnend 3 Jahre nach der letzten Einzahlung wird jeweils jährlich ein Betrag in Höhe von € 150 abgehoben.

Insgesamt finden  $n$  Abhebungen statt. Die letzte Abhebung setzt sich dabei aus den € 150 und einem Restbetrag  $x$  mit  $€ 0 < x < € 150$  zusammen.

- 1) Vervollständigen Sie die nachstehende Zeitachse so, dass sie den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.



Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$$K = 300 \cdot 1,015^6 + 300 \cdot 1,015^5 + 300 \cdot 1,015^4 + 300 \cdot 1,015^3 \approx 1283,33$$

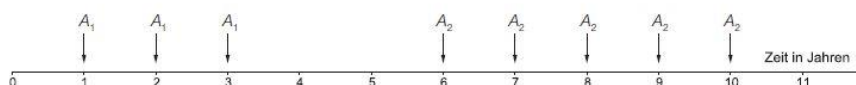
- 2) Beschreiben Sie die Bedeutung von  $K$  im gegebenen Sachzusammenhang.  
 3) Berechnen Sie die Anzahl  $n$  der Abhebungen.

### Kreditrückzahlung \* (B\_206)

Für den Kauf eines Grundstücks nimmt Herr Maier einen Kredit auf.

Ursprünglich vereinbart er mit seiner Bank, diesen innerhalb von 10 Jahren in Form von gleich hohen, nachschüssigen, jährlichen Annuitäten  $A_1$  zurückzuzahlen. Dieser Plan ändert sich jedoch.

Der tatsächliche Verlauf der vollständigen Rückzahlung von Herrn Maier ist auf der nachstehenden Zeitachse dargestellt.



- b) Fassen Sie die tatsächlich erfolgten Zahlungen wie in der oben dargestellten Zeitachse als 2 nachschüssige Renten mit Annuitäten  $A_1$  und  $A_2$  auf.
- Übersetzen Sie den oben dargestellten Zahlungsstrom in einen passenden Text, der den Rückzahlungsverlauf beschreibt.
  - Markieren Sie jeweils die Bezugszeitpunkte für die Barwerte und die Endwerte der beiden Renten in der oben dargestellten Zeitachse.
- c) Nach dem Bezahlen der Annuitäten  $A_1$  verbleibt am Ende des 3. Jahres eine Restschuld.
- Begründen Sie, warum sich die Höhe dieser Restschuld bis zum Ende des 5. Jahres ändert.

### Küchenkauf \* (B\_453)

Frau Tomić will eine neue Küche um € 30.000 kaufen.

- a) Um sich die Küche leisten zu können, hat sie vor 7 Jahren, vor 4 Jahren und vor 1 Jahr jeweils € 3.000 auf ein Sparbuch mit fixem Zinssatz eingezahlt. Nun befinden sich € 10.000 auf dem Sparbuch.

1) Berechnen Sie den zugrunde liegenden Jahreszinssatz.

Bei diesem Sparvorgang wurden jährlich 25 % Kapitalertragssteuer (KESt) abgezogen.

2) Berechnen Sie den Jahreszinssatz des Sparbuchs vor Abzug der KESt.

### Lagerhalle \* (B\_484)

Für den Kauf einer Lagerhalle benötigt ein Unternehmen € 180.000. Es werden verschiedene Möglichkeiten für die Finanzierung überprüft.

- a) Das Unternehmen konnte in den vergangenen Jahren Rücklagen bilden, die mit einem positiven jährlichen Zinssatz  $i$  verzinst werden:  
Vor 4 Jahren konnte das Unternehmen € 50.000 zurücklegen, vor 3 Jahren konnte es € 70.000 zurücklegen.

Es soll derjenige Betrag  $X$  ermittelt werden, der für den Kauf der Lagerhalle heute noch fehlt.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Betrags  $X$ .

$$X = \underline{\hspace{10cm}}$$

2) Berechnen Sie den Betrag  $X$  für den Zinssatz  $i = 2,5 \%$  p. a.

### Liftgesellschaft (1) \* (B\_434)

- a) Für die Finanzierung eines Sessellifts hat eine Liftgesellschaft einen Kredit in Höhe von € 1,4 Mio. aufgenommen. Diesen Kredit zahlt die Liftgesellschaft durch nachschüssige Jahresraten in Höhe von € 90.000 bei einer Verzinsung von 4 % p. a. zurück. (Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

– Berechnen Sie, wie viele volle Jahresraten zu zahlen sind.

Nach 5 Jahren Kredittilgung gerät die Liftgesellschaft in Zahlungsschwierigkeiten und setzt die Rückzahlungen aus.

– Berechnen Sie die Höhe der Restschuld am Ende des 6. Jahres.

- b) Die Liftgesellschaft bildet eine Rücklage und veranlagt dafür 3 Beträge zu unterschiedlichen Zeitpunkten. Der Gesamtwert der Rücklage nach 6 Jahren wird durch folgende Rechnung ermittelt:

$$(50\,000 \cdot 1,03^2 + 30\,000) \cdot 1,035^4 + 80\,000 \cdot 1,035 \approx 178\,096,05$$

- Beschreiben Sie, zu welchen Zinssätzen der Betrag in Höhe von € 50.000 verzinst wird. Geben Sie an, wie lange die jeweiligen Zinssätze gelten.
- Tragen Sie die 3 Beträge und den Gesamtwert der Rücklage nach 6 Jahren auf der nachstehenden Zeitachse ein.



### Maschinenring (B\_182)

Vier landwirtschaftliche Betriebe, die Weizen anbauen, haben sich zu einem Maschinenring zusammengeschlossen.

- a) Man geht davon aus, dass der jetzige Mähdrescher noch genau 10 Jahre verwendet werden kann. Daher plant man, dann einen neuen Mähdrescher um einen voraussichtlichen Kaufpreis von € 150.000 zu erwerben.  
Für die Anschaffung haben die Betriebe gemeinsam bereits € 30.000 an Rücklagen gebildet und wollen den Rest in Form von vorschüssigen Jahresraten ansparen.  
Der Zinssatz wird mit 1,5 % p. a. angenommen.

- Veranschaulichen Sie das Finanzierungskonzept mithilfe einer Zeitlinie.
- Berechnen Sie die Höhe der Jahresraten.

Es wird überlegt, mit der Ratenzahlung erst in 5 Jahren zu beginnen.

- Argumentieren Sie, warum die neuen Raten für die restlichen 5 Jahre in diesem Fall mehr als doppelt so hoch sein müssen, als wenn sofort mit dem Ansparen begonnen wird.

## Modernisierung (B\_324)

Ein Unternehmer möchte seinen Betrieb modernisieren.

- b) Der Unternehmer hat in den letzten 5 Jahren Rücklagen gebildet. Er hat dazu über den gesamten Zeitraum halbjährlich nachschüssig Raten der Höhe  $R$  auf ein Sparbuch gelegt. Es hat aber auch andere Ein- bzw. Auszahlungen am Sparbuch gegeben. Die nachstehende Berechnung zeigt, wie der momentan am Sparbuch zur Verfügung stehende Betrag bei jährlicher Verzinsung gebildet wurde.

$$208732,46 = \text{Endwert der Rente} + 40000 \cdot 1,025^3 - 20000 \cdot 1,025^2 + 28000$$

- Stellen Sie den beschriebenen Zahlungsstrom auf einer geeigneten Zeitachse grafisch dar.
- Lesen Sie aus der obigen Berechnung denjenigen Jahreszinssatz ab, mit dem die Geldbeträge am Sparbuch verzinst wurden.
- Berechnen Sie den dazu äquivalenten Halbjahreszinssatz.
- Berechnen Sie die Höhe der halbjährlichen Raten.

## Obsthändler \* (B\_489)

Ein Obsthändler plant die Renovierung seiner Geschäftsräume.

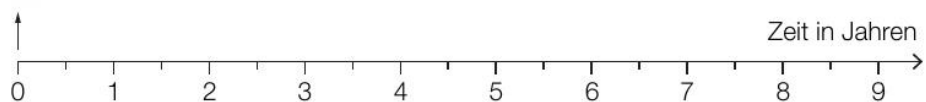
- a) Die Renovierung soll durch einen Kredit in Höhe von € 60.000 finanziert werden.

Das Angebot einer Bank sieht folgende Rückzahlungen vor:

- eine Einmalzahlung in Höhe von € 15.000 am Ende des 1. Jahres
- eine weitere Einmalzahlung in Höhe von € 20.000 am Ende des 3. Jahres
- 6 Halbjahresraten in Höhe von jeweils  $R$ , die erste Rate ist am Ende des 4. Jahres fällig

- 1) Veranschaulichen Sie diese Rückzahlungen auf der nachstehenden Zeitachse.

Auszahlung: € 60.000



Rückzahlungen:

- 2) Berechnen Sie die Ratenhöhe  $R$  bei einem Semesterzinssatz von 3 % p. s.



### Parkgarage \* (B\_485)

Eine Baugesellschaft errichtet eine Parkgarage.

Es wird eine Nutzungsdauer von 40 Jahren angenommen.

Die Baugesellschaft rechnet mit einem kalkulatorischen Zinssatz von 4 % p. a.

- b) Die Wartungskosten (in €) werden mit  $W_1$  nach 10 Jahren,  $W_2$  nach 20 Jahren und  $W_3$  nach 30 Jahren veranschlagt.
- 1) Erstellen Sie mithilfe von  $W_1$ ,  $W_2$  und  $W_3$  eine Formel zur Berechnung des Barwerts  $B$  der gesamten Wartungskosten.

$$B = \underline{\hspace{10cm}}$$

$W_1$  und  $W_2$  werden mit jeweils € 60.000 veranschlagt. Der Barwert  $B$  beträgt € 92.582,56.

- 2) Berechnen Sie  $W_3$ .

### Pensionsvorsorge \* (B\_420)

Alexander möchte für seine Pension ansparen. In den folgenden Aufgaben wird die Kapitalertragssteuer nicht berücksichtigt.

- b) Eine Bank unterbreitet ihm folgenden Vorschlag:  
Durch Einzahlungen von € 20.000 sofort, € 30.000 nach 5 Jahren und € 40.000 nach 15 Jahren garantiert sie ihm nach insgesamt 40 Jahren ein angespartes Kapital von € 200.000.
- Veranschaulichen Sie diesen Zahlungsstrom (Einzahlungen und angespartes Kapital) auf einer Zeitachse.
  - Berechnen Sie den zugehörigen Jahreszinssatz.

### Reisebus \* (B\_516)

Ein Reiseunternehmen plant, einen neuen Reisebus anzuschaffen.

- b) Für den Ankauf des Reisebusses hat das Reiseunternehmen in den letzten 8 Jahren eine Rücklage in Höhe von € 60.000 gebildet.

Die Höhe der Rücklage ergibt sich aus einer Einmalzahlung in Höhe von € 20.000 und regelmäßigen Zahlungen  $R$ :

$$20000 \cdot 1,021^8 + R \cdot \frac{1,021^4 - 1}{1,021 - 1} \cdot 1,021^2 = 60000$$

- 1) Tragen Sie alle Zahlungen  $R$  auf der nachstehenden Zeitachse ein.



- 2) Berechnen Sie die Höhe von  $R$ .

### Renovierungskredit \* (B\_349)

Frau Eberharter muss für die Renovierung ihrer Wohnung einen Kredit in Höhe von € 30.000 aufnehmen. Dazu holt sie verschiedene Angebote von Privatpersonen und von Banken ein. (Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

- a) Eine Bekannte bietet Frau Eberharter privat einen Kredit in Höhe von € 30.000 zu einem Zinssatz von 2 % p. a. an.

Frau Eberharter soll diesen Kredit folgendermaßen zurückzahlen:

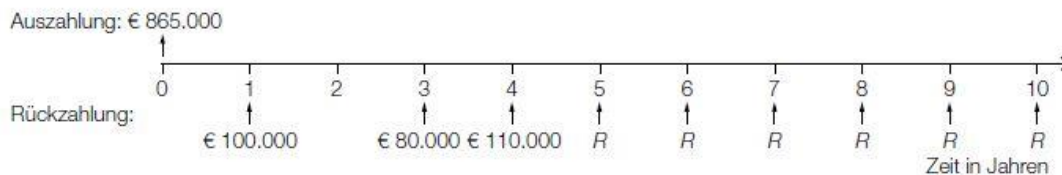
€ 8.000 nach einem Jahr und 2 gleich hohe Raten, eine davon nach 3 Jahren und die andere nach 4 Jahren.

- Stellen Sie diese Zahlungen auf einer Zeitachse dar.
- Berechnen Sie die Ratenhöhe.
- Erklären Sie, warum sich diese Ratenhöhe verringert, wenn beide Raten früher bezahlt werden.

### Seegrundstück \* (B\_415)

Für den Kauf eines Seegrundstücks benötigt der Käufer einen Kredit in Höhe von € 865.000. (Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

- c) Ein weiteres Angebot zur Rückzahlung des Kredits innerhalb von 10 Jahren kann mithilfe folgender Zeitachse dargestellt werden:



- Beschreiben Sie den Rückzahlungsvorgang des in der Zeitachse dargestellten Angebots in Worten.
- Berechnen Sie die Ratenhöhe  $R$  bei einem Zinssatz von 6 % p. a.

### Segelboot (B\_117)

Ein Segelboot wird zum Kauf angeboten. In den angegebenen Zinssätzen sind die Kapitalertragsteuer und allfällige Gebühren berücksichtigt.

- a) Der Verkäufer schlägt folgende Zahlungsvariante vor:  
Anzahlung in Höhe von € 6.000 und 5 Jahre lang (ab dem Kaufzeitpunkt gerechnet) nachschüssige Jahresraten in Höhe von jeweils € 1.200 bei einem jährlichen Zinssatz von  $i$

- Stellen Sie diese Zahlungsvariante mithilfe einer Zeitlinie grafisch dar.
- Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Barwerts  $B$  des Segelboots.

$$B = \underline{\hspace{10cm}}$$

- b) Der Verkäufer ändert die Konditionen: Er veranschlagt den Barwert des Bootes mit € 10.800 und verlangt eine Anzahlung in Höhe von € 6.000 sowie 3 nachschüssige Jahresraten in Höhe von jeweils € 1.200. Der Rest soll ab dem 4. Jahr durch 4 nachschüssige Jahresraten der Höhe  $R$  beglichen werden.

– Berechnen Sie die Ratenhöhe  $R$ , wenn der Zinssatz 8 % p. a. beträgt.

### Sparbuch \* (B\_222)

- b) Auf ein Sparbuch wird einmalig ein Betrag von € 10.000 und 5 Jahre später einmalig ein Betrag  $x$  einbezahlt. Nach insgesamt 8 Jahren soll ein Betrag von € 20.000 zur Verfügung stehen. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.

- Erstellen Sie eine Zeitlinie, die diesen Sachverhalt darstellt.
- Berechnen Sie die Höhe des Betrags  $x$  ohne Berücksichtigung der KEST.
- Begründen Sie, warum sich die Höhe des Betrags  $x$  verringert, wenn er bereits nach 2 Jahren einbezahlt wird.

### Stallbaufinanzierung (B\_170)

Ein Landwirt möchte einen größeren Stall bauen. Der Kostenvoranschlag beläuft sich auf € 375.000.

In den angegebenen Zinssätzen sind die Kapitalertragsteuer bzw. anfallende Gebühren berücksichtigt.

- b) Der Landwirt nimmt einen Kredit zur Begleichung der Gesamtkosten von € 375.000 auf. Zur Rückzahlung werden nachschüssige Jahresraten der Höhe  $R$  bei konstantem Zinssatz über einen Zeitraum von 30 Jahren vereinbart. Er kann die 6., die 7. und die 8. Rate nicht bezahlen. Der Zahlungsausfall wird gleichmäßig auf die Raten der restlichen Laufzeit aufgeteilt. Die neue Ratenhöhe ist  $R_{\text{neu}}$ .

– Erstellen Sie eine Zeitlinie zur Beschreibung des Zahlungsverlaufs.

Die Höhe der ursprünglichen Rate beträgt gerundet  $R = € 23.841$ . Der Zinssatz ist 4,8 % p. a.

– Berechnen Sie die neue Ratenhöhe  $R_{\text{neu}}$ . (Runden Sie das Ergebnis auf ganze Euro.)

### Startkapital (B\_146)

Simon möchte sich selbstständig machen. Er setzt für die Gründung seines Unternehmens als Startkapital seine Ersparnisse und einen Kredit ein.

- a) Er hat während der letzten 10 Jahre die folgenden Zahlungen auf ein mit 2,1 % p. a. verzinstes Sparbuch getätigt: Zu Beginn des 1. Jahres € 20.000, zu Beginn des 4. Jahres € 75.000 und ab dem Beginn des 8. Jahres monatlich vorschüssige Raten in Höhe von je € 450.

- Veranschaulichen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse.
- Berechnen Sie, über welchen Betrag Simon nach diesen 10 Jahren verfügen kann.

Simon überlegt durch welche nachschüssigen Monatsraten  $R$  er in 10 Jahren denselben Betrag hätte ansparen können.

- Ermitteln Sie die Höhe dieser Rate  $R$ .

### Wohnanlage \* (B\_502)

Eine Wohnanlage wird saniert.

- b) Zur Finanzierung der Sanierung nehmen die Wohnungseigentümer einen Kredit in Höhe von € 20.000 auf.

Sie vereinbaren mit der Bank, den Kredit durch 6 vorschüssige Jahresraten  $R$  zu tilgen. Die erste Jahresrate ist nach 3 Jahren fällig. Für die Rückzahlung wird der Jahreszinssatz  $i$  vereinbart.

- 1) Veranschaulichen Sie diesen Zahlungsstrom (Kreditbetrag und Jahresraten) auf einer Zeitachse.
- 2) Erstellen Sie eine Gleichung zur Berechnung von  $R$ . Verwenden Sie dabei den Jahreszinssatz  $i$ .

Unmittelbar vor dem Bezahlen der 1. Jahresrate entscheiden sich die Wohnungseigentümer dafür, bei ansonsten gleichbleibenden Bedingungen den Kredit mit nur 3 Jahresraten zu tilgen.

- 3) Argumentieren Sie, dass diese neuen Jahresraten weniger als doppelt so hoch wie die zuvor vereinbarten Jahresraten sind.

### Wohnungsrenovierung (B\_139)

Im Zuge einer Wohnungsrenovierung benötigt Thomas einen Kredit in Höhe von € 30.000.

- b) Thomas holt sich für diesen Kredit ein weiteres Angebot von einer anderen Bank. Diese verlangt eine Bearbeitungsgebühr von 2 % vom Kreditbetrag, die bei der Auszahlung einbehalten wird. Die Rückzahlung des Kredits erfolgt in 12 Jahren durch nachschüssige Quartalsraten in Höhe von je € 800.

- Veranschaulichen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse.
- Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz.

### Zinsentwicklung \* (B\_528)

Die Zinssätze für Kredite und Spareinlagen unterliegen zeitabhängigen Schwankungen.

c) Ein Geldbetrag  $B$  wird 2 Jahre lang mit dem Jahreszinssatz  $i_0$  verzinst, danach weitere 3 Jahre mit einem geänderten Jahreszinssatz  $i_1$ .

1) Stellen Sie eine Formel für den Endwert  $E$  am Ende dieser 5 Jahre auf. Verwenden Sie dabei  $B$ ,  $i_0$  und  $i_1$ .

$E =$  \_\_\_\_\_

2) Berechnen Sie für  $i_0 = 3\%$  und  $i_1 = 1\%$  denjenigen gleichbleibenden Jahreszinssatz  $i$ , bei dem der Betrag  $B$  innerhalb von 5 Jahren auf den gleichen Endwert  $E$  anwächst.