5.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Maturaskript BHS – Teil B (16 Seiten)

Cluster: HAK (W2)

Grundkompetenzen:

- **B_W2_5.4** den Additionssatz für einander nicht ausschließende Ereignisse und den Multiplikationssatz für abhängige Ereignisse (bedingte Wahrscheinlichkeit) verstehen und anwenden, Berechnungen durchführen; im Kontext interpretieren und argumentieren

Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Prof. πegischer

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM
2) Gib im Feld „**Volltextsuche**“ die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. A_263) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**“ und „**GeoGebra**“ erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**“ erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln	Weitere Regeln für Lehrpersonen
▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen. ▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen. ▪ Sie dürfen mein Materialen **NICHT** gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden. ▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden. ▪ Bei einem **Missbrauch** erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.	**WICHTIGSTE REGEL:** LehrerInnen dürfen die Materialien in **Ihrem eigenen Unterricht** verwenden: ▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen. ▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben. ▪ Es ist **nicht erlaubt**, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben. ▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit

Wiederholung Mengenlehre: Verknüpfung von Mengen

Beispiel: $A = \{1; 2; 3; 4\}; B = \{4; 5; 6\}$

a. DURCHSCHNITTSMENGE: $A \cap B = \{x | x \in A \; und \; x \in B\}$
...ist die Menge aller Elemente die in A **und** in B enthalten sind.

$\boxed{\cap = \text{"}\boldsymbol{GESCHNITTEN}\text{"}}$

b. VEREINIGUNGSMENGE: $A \cup B = \{x \in A \; oder \; x \in B\}$
...ist die Menge aller Elemente die in A **oder** in B liegen (oder in beiden!).

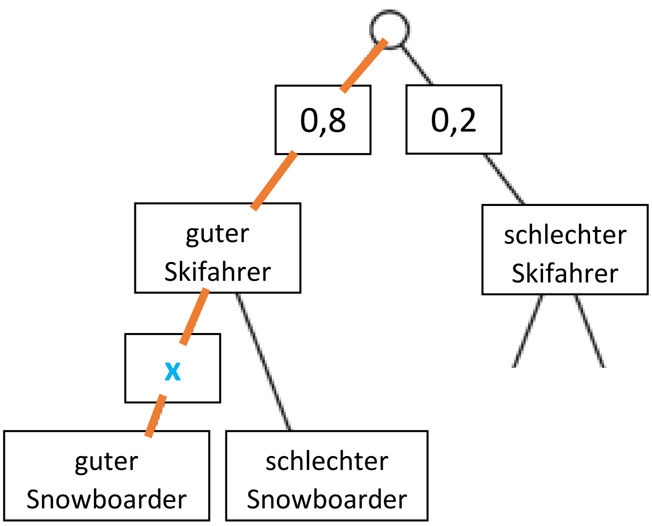
$\boxed{\cup = \text{"}\boldsymbol{VEREINIGT}\text{"}}$

Beispiel: Bei einem Schulskikurswurden unter 100 SchülerInnen folgende Daten erhoben:

- Guter Skifahrer / Schlechter Skifahrer
- Guter Snowboarder / Schlechter Snowboarder

80% der SchülerInnen haben angegeben, dass sie gute SkifahrerInnen sind. Jedoch haben lediglich 15% angegeben, dass sie gute SkifahrerInnen UND gute SnowboarderInnen sind.

Gesucht: Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass jemand ein guter Snowboarder ist, wenn man bereits weiß, dass er gut Skifahren kann?



Welche Wahrscheinlichkeiten kennen wir bereits?

$P(guter\ Skifahrer) = 0{,}8$
$P(guter\ Skifahrer\ \cap\ guter\ Snowboarder) = 0{,}15$

Wir wissen, dass die Wahrscheinlichkeit für einen guten Skifahrer und guten Snowboarder mit Hilfe der Multiplikationsregel bestimmt werden kann. Damit können wir die gesuchte Variable x berechnen:

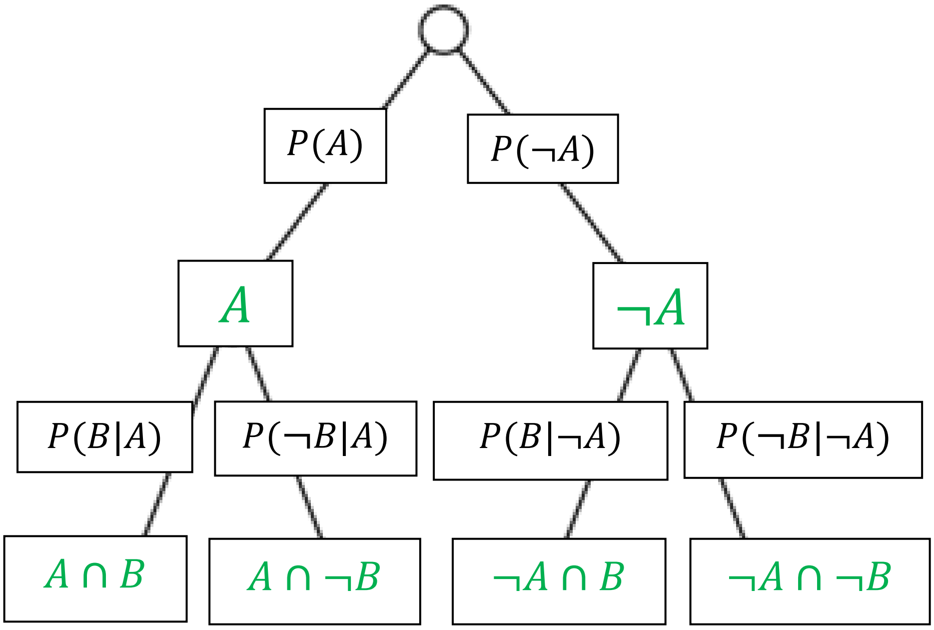
$$0{,}8 \cdot x = 0{,}15 \rightarrow x = \frac{0{,}15}{0{,}8} = 0{,}1875 = 18{,}75\%$$

Antwort: Ein guter Skifahrer ist mit der Wahrscheinlichkeit von 18,75 % auch ein guter Snowboarder.

Schreibweise: $P(guter\ Snowboarder \mid guter\ Skifahrer) = 0{,}1875$

> Die **bedingte Wahrscheinlichkeit** beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis B eintritt, wenn man weiß, dass ein anderes Ereignis A bereits eingetreten ist:
>
> $$P(B|A)$$
>
> Sprechweise: $P(B|A)$ ist die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung von A.

Die Überlegungen aus dem **Musterbeispiel** können nun allgemein auf ein zweistufiges Baumdiagramm umgemünzt werden:



Es gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

Würde man zuerst B wählen & erst dann A, so entsteht folgende Formel:
$P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A|B)$

Es gilt: $P(A \cap B) = P(B \cap A)$

In einer **Vierfelder-Tafel** können diese Überlegungen auch umgesetzt werden. Bemerke: Alle Wahrscheinlichkeiten zusammen ergeben stets 1 (=100%).

	A	$\neg A$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\neg A \cap B)$	$P(B)$
$\neg B$	$P(A \cap \neg B)$	$P(\neg A \cap \neg B)$	$P(\neg B)$
	$P(A)$	$P(\neg A)$	1

Es gelten folgende Beziehungen:

- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \neg B)$
- $P(\neg A) = P(\neg A \cap B) + P(\neg A \cap \neg B)$
- $P(B) = P(A \cap B) + P(\neg A \cap B)$

- $P(\neg B) = P(A \cap \neg B) + P(\neg B \cap \neg B)$
- $P(A) + P(\neg A) = \mathbf{1} = P(B) + P(\neg B)$

Musterbeispiel: In einer Klasse haben **70%** der SchülerInnen im Fach Mathematik eine positive Note. **10%** der SchülerInnen haben im Fach Englisch UND im Fach Mathematik eine negative Note. **55%** der SchülerInnen sind im Fach Mathematik und Englisch positiv.

Schritt 1: Trage die Werte aus der Angabe in eine Vier-Felder-Tafel ein:

	$M: positiv$	$M: negativ$	
$E: positiv$	**0,55**		
$E: negativ$		**0,1**	
	0,7		1

Schritt 2: Ergänze die restlichen Werte (durch Additionen).

	$M: positiv$	$M: negativ$	
$E: positiv$	**0,55**	0,2	0,75
$E: negativ$	0,15	**0,1**	0,25
	0,7	0,3	1

Aufgabe 1: Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler negativ in Englisch ist, wenn man bereits weiß, dass er auch in Mathematik negativ ist.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Durch Umformen erhält man folgende Formel:

$$\boldsymbol{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Gesucht:

$P(Englisch\ negativ \mid Mathematik\ negativ)$

$$P(Englisch\ negativ|Mathematik\ negativ) = \frac{P(E\ negativ \cap M\ negativ)}{P(M\ negativ)}$$

$$P(Englisch\ negativ|Mathematik\ negativ) = \frac{0{,}1}{0{,}3} = 0{,}333\ldots \approx 33{,}3\ \%$$

Aufgabe 2: Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler positiv in Mathematik ist, wenn man bereits weiß, dass er in Englisch negativ ist.

$$P(M\ positiv|E\ negativ) = \frac{P(M\ positiv \cap E\ negativ)}{P(E\ negativ)}$$

$$P(Englisch\ negativ|Mathematik\ negativ) = \frac{0{,}15}{0{,}25} = 0{,}6 = 60\ \%$$

Bsp. 1) In einer Schulklasse mit 30 Schülern wird das Ergebnis der letzten beiden Schularbeiten (Deutsch & Sportkunde) mit Hilfe einer Vier-Felder-Tafel dargestellt:

	$\boldsymbol{D: positiv}$	$\boldsymbol{D: negativ}$	
$\boldsymbol{SPK: positiv}$	16	5	21
$\boldsymbol{SPK: negativ}$	6	3	9
	22	8	30

Tipp: Schreibe die Vier-Felder-Tafel zuerst mit relativen Häufigkeiten an.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Schüler…

a. in Deutsch eine negative Note geschrieben hat.
b. in Deutsch und Sportkunde eine positive Note geschrieben hat.
c. in Deutsch eine negative Note geschrieben hat, wenn man bereits weiß, dass er Sportkunde positiv war.
d. in Sportkunde eine positive Note geschrieben hat, wenn man bereits weiß, dass er Deutsch positiv war.
e. in Deutsch eine negative Note geschrieben hat, wenn man bereits weiß, dass er Sportkunde negativ war.
f. in Sportkunde eine negative Note geschrieben hat, wenn man bereits weiß, dass er Deutsch negativ war.

Bsp. 2) Von der letzten **Französisch-Schularbeit** wurden die Daten mit Hilfe einer Vier-Felder-Tafel dargestellt.

	$\boldsymbol{F: positiv}$	$\boldsymbol{F: negativ}$	
$\boldsymbol{männlich}$	0,26	0,17	0,43
$\boldsymbol{weiblich}$	0,52	0,05	0,57
	0,78	0,22	1

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein/e zufällig ausgewählte/r SchülerIn…

a. in Französisch eine positive Note geschrieben hat.
b. in Französisch eine positive Note geschrieben hat und männlich war.
c. in Französisch eine negative Note geschrieben hat, wenn man bereits weiß, dass er männlich war.
d. weiblich war, wenn man bereits weiß, dass sie in Französisch positiv war.
e. männlich war, wenn man bereits weiß, dass er in Französisch negativ war.
f. in Französisch eine negative Note geschrieben hat, wenn man bereits weiß, dass sie weiblich war.

Bsp. 3) In einer Volksschulgruppe interessieren sich 43% der Kinder für Pferde. 30% aller Kinder mögen Pferde und Katzen. 6 % der Kinder mögen weder Pferde noch Katzen.

a. Vervollständige die Vier-Felder-Tafel:

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewähltes Kind …

b. Katzen mag.

c. keine Pferde mag.

d. Katzen mag, wenn man weiß, dass das Kind Pferde nicht mag.

e. Pferde mag, wenn man weiß, dass das Kind Katzen mag.

f. Katzen nicht mag, wenn man weiß, dass das Kind Pferde nicht mag.

g. Pferde nicht mag, wenn man weiß, dass das Kind Katzen mag.

Bsp. 4) In einem Stadion sind 67 % der ZuschauerInnen männlich. Insgesamt 10 % sind weiblich und Nichtraucher. 15 % der ZuschauerInnen sind männlich und Raucher.

a. Vervollständige die Vier-Felder-Tafel:

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein/e zufällig gewählte/r ZuschauerIn …

b. männlich ist, wenn man weiß, dass er Raucher ist.

c. raucht, wenn man weiß, dass es sich um eine Frau handelt?

d. weiblich ist, unter der Bedingung, dass sie nicht raucht.

Bsp. 5) Die Vier-Felder-Tafel zeigt das Ergebnis einer Umfrage einer Personengruppe (männlich/weiblich) über die Präferenz von Fast-Food.

	Person mag Fast-Food	Person mag kein Fast-Food	
männlich	97	27	124
weiblich	58	84	142
	155	111	266

Aufgabe: Stelle die Vier-Felder-Tafel als **Baum-Diagramm** dar (1. Stufe: männlich/weiblich, 2. Stufe: Fast-Food/kein Fast-Food). Berechne dazu alle dafür benötigten Wahrscheinlichkeiten.

Bsp. 6) In einer Urne befinden sich 12 rote und 20 blaue Murmeln. Martin zieht zwei Mal ohne Zurücklegen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass Martin…

a. beim ersten Zug eine blaue Murmel zieht.

b. beim zweiten Zug eine blaue Murmel zieht, wenn man weiß, dass er beim ersten Zug eine rote Murmel gezogen hat.

c. beim zweiten Zug eine rote Murmel zieht, wenn man weiß, dass er beim ersten Zug eine rote Murmel gezogen hat.

Satz von Bayes

Video

SCAN MICH

Herleitung:

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

$$P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B) \mid : P(A)$$

Durch Umformen ($: P(A)$) erhält man:

$$P(B|A) = \frac{\boldsymbol{P(B) \cdot P(A|B)}}{\boldsymbol{P(A)}}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A \cap B) + P(A \cap \neg B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(B) \cdot P(A|B) + P(\neg B) \cdot P(A|\neg B)}$$

Bsp. 7) Laut einer Studie sind etwa 0,1 % aller Europäerinnen und Europäer HIV-positiv. Mit Hilfe eines HIV-Selbsttests kann die Krankheit nachgewiesen werden. Der Test liefert aber nur für 90% aller HIV-infizierten Personen das richtige Ergebnis. Für gesunde Personen liefert der Test zu 98% das richtige Testergebnis. Verwende folgende Ereignisse:

Ereignis A: Die Person ist HIV-positiv

Ereignis B: Der Selbsttest ist positiv

Ein Europäer bzw. eine Europäerin wird zufällig ausgewählt und auf HIV getestet.

g. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person HIV-positiv ist?

h. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Selbsttest der Person positiv ist?

i. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person wirklich HIV-positiv ist, wenn der Selbsttest positiv ist?

j. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person HIV-positiv ist, wenn der Selbsttest negativ ist?

k. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person HIV-negativ ist, wenn der Selbsttest positiv ist?

Bsp. 8) Etwa 7 % der erwachsenen Menschen leiden an einer Gluten-Unverträglichkeit. Ein Stuhltest liefert das korrekte Ergebnis zu 80 % bei einem betroffenen Menschen. Leider liefert der Stuhltest auch zu 3 % einen falsch-positiven Test bei gesunden Menschen.

a. Zeichne ein **zweistufiges Baumdiagramm** (Stufe 1: Unverträglichkeit/keine Unverträglichkeit, Stufe 2: Test positiv/negativ) und trage die Wahrscheinlichkeiten ein.

In weiterer Folge wird eine Person zufällig ausgewählt. Berechne jeweils mit dem Satz von Bayes:

b. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person keine Gluten-Unverträglichkeit hat, wenn der Test ein positives Ergebnis geliefert hat?

c. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person eine Gluten-Unverträglichkeit hat, wenn der Test ein negatives Ergebnis geliefert hat?

d. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person eine Gluten-Unverträglichkeit hat, wenn der Test ein positives Ergebnis geliefert hat?

Bsp. 9) Zu einem bestimmten Zeitpunkt waren 3 % aller Österreicherinnen und Österreicher am Corona-Virus erkrankt. Mit Hilfe eines Antigen-Tests kann die Erkrankung nachgewiesen werden. Bei gesunden Menschen liefert der Test zu 95 % ein korrektes Ergebnis. Bei kranken Menschen liefert der Antigen-Test zu 70 % ein korrektes Ergebnis. Für die folgenden Berechnungen wird zufällig eine Person aus Österreich ausgewählt:

Zeichne ein **zweistufiges Baumdiagramm** (Stufe 1: Corona-Virus-Erkrankung/gesund, Stufe 2: Test positiv/negativ) und trage die Wahrscheinlichkeiten ein.

In weiterer Folge wird eine Person zufällig ausgewählt. Berechne mit Hilfe des Satz von Bayes:

a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person Corona-positiv ist, wenn der Test ein positives Ergebnis geliefert hat?
b. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person mit dem Corona-Virus nicht infiziert ist, wenn der Test ein negatives Ergebnis angezeigt hat?

Bsp. 10) Es ist bekannt, dass 14 % aller Kinder auf Gräser allergisch sind. Ein Allergietest auf Gräser zeigt bei 99,2 % aller betroffenen Kinder eine positive Reaktion. Fälschlicherweise liefert der Allergie-Test aber auch bei 3,2 % der gesunden Kinder einen positiven Test.

Zeichne ein **zweistufiges Baumdiagramm** (Stufe 1: Allergie auf Gräser/keine Allergie, Stufe 2: Test positiv/negativ) und trage die Wahrscheinlichkeiten ein.

In weiterer Folge wird ein Kind zufällig ausgewählt. Berechne mit Hilfe des Satz von Bayes:

a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind diese Allergie nicht hat, obwohl der Allergie-Test ein positives Ergebnis geliefert hat?
b. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind allergisch auf Gräser ist, wenn der Allergie-Test ein positives Ergebnis angezeigt hat?

Bsp. 11) Bei einer Umfrage über psychische Erkrankungen haben 1200 Personen mitgemacht. 314 Personen haben angegeben, dass sie in den letzten 365 Tagen nachweislich eine psychische Erkrankung hatten. Ein Institut hat einen neuen Fragebogen erstellt, mit dem psychische Erkrankungen entdeckt werden sollen. Bei psychisch kranken Personen hat der Fragebogen eine Erfolgswahrscheinlichkeit von 97 %. Bei gesunden Menschen liefert der Fragebogen leider bei 10 % der Personen falsche Ergebnisse.

Zeichne ein **zweistufiges Baumdiagramm** (Stufe 1: Psychische Erkrankung/keine Psychische Erkrankung, Stufe 2: Fragebogen weist P.E nach/Fragebogen weist keine P.E. nach) und trage die Wahrscheinlichkeiten ein.

In weiterer Folge wird eine Person zufällig ausgewählt. Berechne mit Hilfe des Satz von Bayes:

a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person eine psychische Erkrankung hat, wenn der Fragebogen keine Erkrankung feststellt?
b. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person keine Psychische Erkrankung hat, obwohl der Fragebogen bei der Person eine psychische Erkrankung festgestellt hat.

Wenn A und B (stochastisch) unabhängig voneinander sind:			
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$	bzw.	$P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B)$	
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	bzw.	$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$	
Wenn A und B unvereinbar sind:			
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	bzw.	$P(A \vee B) = P(A) + P(B)$	

Handyproduktion * (B_517)

Ein Unternehmen produziert die zwei Handymodelle H_1 und H_2.
Dabei werden die beiden Mikrochip-Sorten M_1 und M_2 benötigt.
Für die Produktion der Mikrochips werden unter anderem die Rohstoffe Silicium (R_1) und Kupfer (R_2) benötigt.

Die nachstehende Tabelle, die der Matrix ***R*** entspricht, beschreibt den Mengenbedarf an Rohstoffen (in ME) für die Herstellung je eines Stücks der beiden Mikrochip-Sorten.

	M_1	M_2
R_1	5	7
R_2	1	2

Die nachstehende Tabelle, die der Matrix ***S*** entspricht, beschreibt den Mengenbedarf an Mikrochips (in Stück) für die Herstellung je eines Stücks der beiden Handymodelle.

	H_1	H_2
M_1	5	1
M_2	0	4

d) Die häufigsten Fehler, die bei den Handymodellen H_1 und H_2 auftreten, sind Displayfehler und Akkufehler.

Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen diese beiden Fehler auftreten, sind in der nachstehenden Vierfeldertafel dargestellt.

	Displayfehler	kein Displayfehler	Summe
Akkufehler	0,01	0,02	0,03
kein Akkufehler	0,01	0,96	0,97
Summe	0,02	0,98	1,00

1) Beschreiben Sie ein Ereignis im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet wird.
$1 - 0{,}96 = 0{,}04$

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob die beiden Ereignisse „Displayfehler" und „Akkufehler" voneinander unabhängig sind.

Bei einem Handy ist ein Displayfehler aufgetreten.

3) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter dieser Bedingung auch ein Akkufehler auftritt.

Hotelrenovierung (1) (B_210)

Ein Hotel wird renoviert.

a) Ein Viertel aller Hotelzimmer wird als Raucherzimmer angeboten. Bei der Renovierung wurden zwei Drittel aller Raucherzimmer und 40 % aller Nichtraucherzimmer erneuert.

– Erstellen Sie ein Baumdiagramm mit allen gegebenen Daten.
– Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewähltes Zimmer renoviert wurde.
– Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewähltes renoviertes Zimmer ein Nichtraucherzimmer ist.

Interneteinkäufe (B_216)

Das Einkaufen im Internet erfreut sich immer größerer Beliebtheit.

a) Ein Marktforschungsinstitut führte eine Umfrage unter 5 000 Personen über ihr Einkaufsverhalten durch. Unter den Befragten befanden sich 3 000 Frauen. Die Umfrage ergab, dass 3 450 aller Befragten, davon 1 050 Männer, Einkäufe im Internet erledigen.

– Interpretieren Sie den nachstehend berechneten Prozentsatz im gegebenen Sachzusammenhang.
$\frac{3450 - 1050}{3000} = 80\ \%$

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte befragte Person, die im Internet Einkäufe erledigt, eine Frau ist.

Kaffeeautomat * (B_285)

Der Elternverein einer Schule entschließt sich, einen Kaffeeautomaten für Schüler/innen und Lehrer/innen anzuschaffen.

c) An 80 von insgesamt 200 Schultagen hat Chiara Nachmittagsunterricht.

An Schultagen mit Nachmittagsunterricht trinkt sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % Kaffee, an Schultagen ohne Nachmittagsunterricht beträgt diese Wahrscheinlichkeit 20 %.

1) Erstellen Sie für diesen Sachverhalt ein mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten beschriftetes Baumdiagramm.

2) Beschreiben Sie ein mögliches Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit folgendermaßen berechnet wird:
$P(E) = \frac{120}{200} \cdot 0{,}8 = 0{,}48$

3) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Chiara heute Nachmittagsunterricht hat unter der Voraussetzung, dass sie heute Kaffee getrunken hat.

Konten * (B_387)

Von den Kunden einer Bankfiliale besitzen 80 % ein Gehaltskonto und 40 % ein Sparkonto.
25 % der Kunden der Bankfiliale besitzen sowohl ein Gehalts- als auch ein Sparkonto.
G bezeichnet das Ereignis, dass ein Kunde ein Gehaltskonto besitzt.
S bezeichnet das Ereignis, dass ein Kunde ein Sparkonto besitzt.

a) – Übertragen Sie die Werte der Angabe in die entsprechenden Felder der unten stehenden Vierfeldertafel.
– Ermitteln Sie die Werte in den restlichen Feldern und tragen Sie diese ein.

	besitzt Gehaltskonto	besitzt kein Gehaltskonto	Summe
besitzt Sparkonto			
besitzt kein Sparkonto			
Summe			

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 10 zufällig ausgewählten Kunden mindestens 2 Kunden weder ein Gehalts- noch ein Sparkonto besitzen.

b) – Überprüfen Sie nachweislich, ob die Ereignisse G und S voneinander unabhängig sind.

Leihwagen * (B_318)

Ein Leihwagen-Unternehmen hat in seinem Fuhrpark 2 Modelle. Modell 1 ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,62 verliehen, Modell 2 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Modelle gleichzeitig verliehen sind, beträgt 0,35.

A bezeichnet das Ereignis, dass Modell 1 verliehen ist, und B bezeichnet das Ereignis, dass Modell 2 verliehen ist.

a) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 1 Modell nicht verliehen ist.

b) – Übertragen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Angabe in die entsprechenden Felder der unten stehenden Vierfeldertafel.
– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten in den restlichen Feldern und tragen Sie diese ein.

	A	nicht A	Summe
B			
nicht B			
Summe			

– Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau einer der beiden Leihwagen verliehen ist.

c) – Zeigen Sie, dass die beiden Ereignisse A und B nicht unabhängig voneinander sind.
– Beschreiben Sie in Worten, welches Ereignis durch die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,35}{0,4} = 0,875$$

bestimmt wird.

Seminarprüfungen * (B_548)

c) Eine Kommission untersucht die Ergebnisse mehrerer Prüfungen. Dabei wird beim Prüfungsergebnis zwischen „positiv“ und „negativ“, beim Geschlecht der Studierenden zwischen „männlich“ und „weiblich“ unterschieden.
In der nachstehenden Vierfeldertafel sind die relativen Häufigkeiten für eine bestimmte Prüfung angegeben.

	männlich	weiblich	Summe
positiv	0,38		0,72
negativ			0,28
Summe	0,58	0,42	1

1) Ergänzen Sie die leeren Felder der obigen Vierfeldertafel.

Von den Studierenden wird eine Person zufällig ausgewählt.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person männlich ist, wenn bekannt ist, dass die Person ein negatives Prüfungsergebnis hat.

Bei einer anderen Prüfung geht die Kommission von einer (stochastischen) Unabhängigkeit zwischen dem Prüfungsergebnis und dem Geschlecht aus.

3) Ergänzen Sie unter Berücksichtigung dieser Voraussetzung die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in der nachstehenden Vierfeldertafel.

	männlich	weiblich	Summe
positiv			0,80
negativ			0,20
Summe	0,55	0,45	1

Spam (1) * (B_418)

Als *Spam* werden unerwünscht zugestellte E-Mails bezeichnet.

b) Nach Expertenschätzungen sind 80 % aller E-Mails Spam.
In 8 % aller E-Mails kommt das Wort „Konto“ vor.
7 % aller E-Mails enthalten das Wort „Konto“ und sind Spam.

S bezeichnet das Ereignis, dass ein zufällig ausgewähltes E-Mail Spam ist, $\overline{S}$ bezeichnet das Gegenereignis von S.

K bezeichnet das Ereignis, dass ein zufällig ausgewähltes E-Mail das Wort „Konto“ enthält, $\overline{K}$ bezeichnet das Gegenereignis von K.

– Vervollständigen Sie die nachstehende Vierfeldertafel so, dass sie den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.

	S	$\overline{S}$	Summe
K			
$\overline{K}$			
Summe			

– Lesen Sie aus der Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit ab, dass ein zufällig ausgewähltes E-Mail kein Spam ist und das Wort „Konto“ enthält.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E wird in diesem Zusammenhang durch folgenden Ausdruck ermittelt:

$$P(E) = \frac{0{,}07}{0{,}08}$$

– Beschreiben Sie dieses Ereignis im gegebenen Sachzusammenhang.

Speiseeis* (B_455)

Ein Restaurant stellt nach eigener Rezeptur Speiseeis für Nachspeisen her.

Aus den 6 Rohstoffen Milch, Obers, Eier, Zucker, Schokolade und Vanille werden die 2 Zwischenprodukte Schokoladeeis und Vanilleeis hergestellt.
Die Mengen in Gramm für die Herstellung jeweils einer Portion Eis sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

	Schokoladeeis Z_1	Vanilleeis Z_2
Milch R_1	10	25
Obers R_2	40	30
Eier R_3	20	15
Zucker R_4	5	10
Schokolade R_5	20	0
Vanille R_6	0	10

Das Schokoladeeis und das Vanilleeis werden für die Nachspeisen Früchtebecher und Bananensplit verwendet.
Die dazu jeweils benötigten Eisportionen sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

	Früchtebecher E_1	Bananensplit E_2
Schokoladeeis Z_1	2	0
Vanilleeis Z_2	1	3

Die Verflechtung, die den Bedarf an Rohstoffen für jeweils eine Nachspeise angibt, kann durch die Matrix ***V*** beschrieben werden.

d) Nach einer längeren Lagerung der Milch und der Eier besteht die Gefahr, dass diese Rohstoffe zu einem bestimmten Zeitpunkt t verdorben sind.

A bezeichnet das Ereignis, dass die Milch zum Zeitpunkt t verdorben ist. Das Ereignis A tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 % ein.
B bezeichnet das Ereignis, dass die Eier zum Zeitpunkt t verdorben sind. Das Ereignis B tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % ein.
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 % sind beide Rohstoffe zum Zeitpunkt t verdorben.

Die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Ereignisse können in einer Vierfeldertafel dargestellt werden.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Vierfeldertafel so, dass sie den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.

	A	nicht A	Summe
B			
nicht B			
Summe			

2) Zeigen Sie, dass die beiden Ereignisse A und B voneinander abhängig sind.

Viruserkrankung (B_198)

In einem kleinen Ort verbreitet sich eine neuartige Virusinfektion.

b) Ein neues Medikament soll bei der Bekämpfung des Virus helfen. Leider hat es auch Nebenwirkungen. 2 % der erkrankten Personen leiden an Kopfschmerzen, 1 % an Schwindelanfällen. 0,2 % weisen beide Symptome auf.
In der folgenden Rechnung wurde die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der Nebenwirkungen auftritt, ermittelt:

$$P(\text{„mindestens 1 Nebenwirkung“}) = 0{,}02 + 0{,}01 = 0{,}03$$

– Erklären Sie, welcher Fehler dabei gemacht wurde.
– Stellen Sie die Berechnung richtig.

c) Bei einer Gesundenuntersuchung wird ein Virustest durchgeführt. Damit können 99 % der Virusträger/innen erkannt werden, noch bevor die Krankheit ausbricht. 10 % der Untersuchten sind tatsächlich Virusträger/innen. Leider zeigt der Test auch bei 2 % der gesunden Personen eine Infektion an.

– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person gesund ist, unter der Voraussetzung, dass eine Virusinfektion diagnostiziert wurde.

Wohnungen (2) * (B_424)

Der Fachverband der Immobilien- und Vermögenstreuhänder erstellt Statistiken zu den Trends auf dem Immobilienmarkt. Es werden die ortsüblichen Kaufpreise und Mieten erhoben. Die Höhe der Kaufpreise bzw. der Mieten hängt in der Regel stark von der Größe, der Ausstattung und der Lage der Wohnungen ab.

d) In einer Landeshauptstadt werden 90 % der Wohnungen als Wohnungen mit mittlerem Wohnwert eingestuft, 10 % der Wohnungen als Wohnungen mit gutem Wohnwert. 20 % der Wohnungen haben eine Größe von weniger als 60 m². 16 % aller Wohnungen haben eine Größe von weniger als 60 m² und einen mittleren Wohnwert.

– Vervollständigen Sie die nachstehende Vierfeldertafel so, dass sie den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.

	Wohnungsgröße weniger als 60 m²	Wohnungsgröße mindestens 60 m²	Summe
mittlerer Wohnwert			
guter Wohnwert			
Summe			

– Weisen Sie nach, dass die Merkmale „Wohnungsgröße“ und „Wohnwert“ (stochastisch) abhängig voneinander sind.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Wohnung weniger als 60 m² Wohnfläche hat, wenn man weiß, dass sie einen mittleren Wohnwert hat.

Ölbohrungen * (B_221)

Eine Ölgesellschaft führt Probebohrungen in Texas und in Alaska durch. Erfahrungsgemäß findet man bei einer Bohrung in Texas mit einer Wahrscheinlichkeit von 85 % und bei einer Bohrung in Alaska mit einer Wahrscheinlichkeit von 65 % Öl.

d) Von allen Arbeiter/innen der Ölgesellschaft arbeiten 30 % in Alaska, die übrigen bei Bohrungen in Texas. Insgesamt sprechen 65 % aller Arbeiter/innen Spanisch. Ein Sechstel aller in Alaska tätigen Arbeiter/innen spricht Spanisch.

– Übertragen Sie die Werte der Angabe in die entsprechenden Felder der untenstehenden Vierfeldertafel.
– Ermitteln Sie die Werte der restlichen Felder und tragen Sie diese in die entsprechenden Felder ein.

	Arbeiter/innen in Alaska	Arbeiter/innen in Texas	Summe
Spanisch sprechend			
nicht Spanisch sprechend			
Summe			