5.2/5.3 Regression & Korrelationskoeffizient

Maturaskript BHS – Teil B (20 Seiten)

Cluster: HAK (W2)

Grundkompetenzen:

- **B_W2_5.2** lineare, quadratische, kubische und exponentielle Regression bei zweidimensionalen Datenmengen erklären, mittels Technologieeinsatz zugehörige Regressions funktionen bestimmen, grafisch darstellen, Ergebnisse interpretieren und im Regressionskontext argumentieren; Methode der kleinsten Quadrate erklären und interpretieren
- **B_W_5.3** Korrelationskoeffizient nach Pearson mittels Technologieeinsatz ermitteln und interpretieren

Prof. πegischer

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM

2) Gib im Feld „**Volltextsuche**" die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. A_263) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**" und „**GeoGebra**" erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**" erstellt.

Lizenzbedingungen:

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

B_W_5.2/5.3: Regression

Biologieunterricht * (B_573)

Im Biologieunterricht werden verschiedene Tierarten und ihre Lebensweisen betrachtet.

b) Auf einem Arbeitsblatt sind die Körperlängen verschiedener Säugetiere sowie deren Sprungweiten angegeben (siehe nachstehende Tabelle).

	Körperlänge in m	Sprungweite in m
Fuchs	0,7	2,8
Känguru	1,4	10
Löwe	1,8	4,5
Mauswiesel	0,2	1,2
Mensch (Weltrekord)	1,8	8,9
Tiger	2	5

Datenquelle: https://www.zoo.ch/sites/default/files/media/file/Weitspringen.pdf [03.08.2022].

Die Sprungweite soll in Abhängigkeit von der Körperlänge betrachtet werden.
Mathias behauptet, dass die obige Tabelle die Wertetabelle einer entsprechenden Funktion ist.

1) Begründen Sie, warum die Behauptung von Mathias falsch ist.

Susanne vermutet, dass die Sprungweite in Abhängigkeit von der Körperlänge näherungsweise durch die quadratische Funktion f beschrieben werden kann.

2) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der quadratischen Funktion f auf.

CeBIT (B_093)

Jedes Jahr im Frühjahr findet die CeBIT, die Messe für Informationstechnik, in Hannover statt.

a) Die folgende Tabelle zeigt die Besucherzahlen (in 1 000) von 2004 bis 2013:

2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
510	480	450	480	495	400	334	339	312	280

– Ermitteln Sie unter Annahme eines linearen Zusammenhangs der Daten die entsprechende Ausgleichsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2004.
– Stellen Sie die Daten und die Ausgleichsfunktion grafisch dar.
– Erklären Sie die Bedeutung des Vorzeichens des Korrelationskoeffizienten.
– Berechnen Sie, wie viele Besucher/innen aufgrund dieses Modells im Jahr 2015 erwartet werden können.

E-Reader * (B_224)

Ein Unternehmen bringt einen neuen E-Reader auf den Markt. Die nachstehende Tabelle beschreibt die Entwicklung der Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader in einer bestimmten Region.

Zeit in Wochen	Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader
1	179
2	364
3	674
4	981
5	1 310
6	1 700
7	2 055
8	2 280
9	2 470
10	2 500
11	2 540
12	2 545

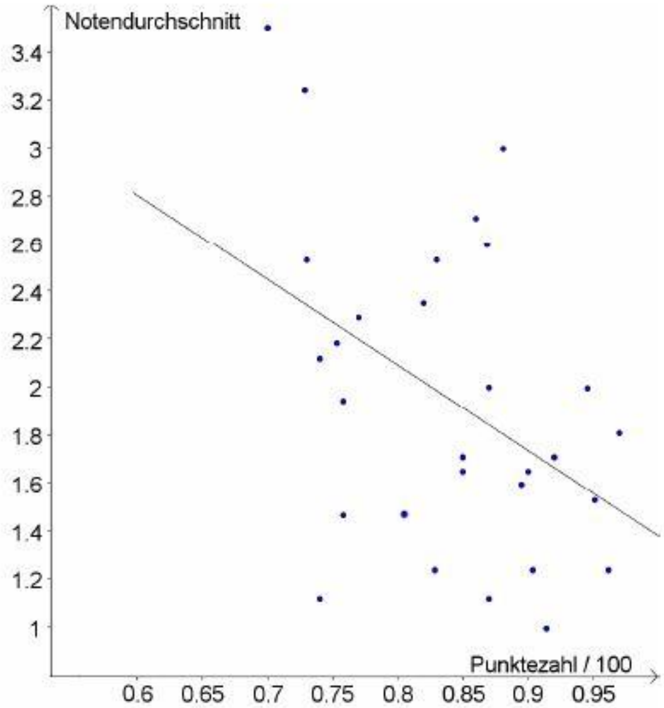
a) Betrachtet man nur die 5 Zahlenpaare im Zeitintervall [3; 7], so zeigt sich ein annähernd linearer Verlauf.

– Ermitteln Sie die Regressionsgerade für das Zeitintervall [3; 7].
– Interpretieren Sie die Steigung dieser Regressionsgeraden im Sachzusammenhang.

Eignungsprüfung (B_238)

Um eine Bildungsanstalt besuchen zu können, muss eine Eignungsprüfung positiv abgelegt werden.

c) Ein gutes Abschneiden bei der Eignungsprüfung ist keine Garantie für eine erfolgreiche Schullaufbahn.
Der Zusammenhang zwischen den Ergebnissen der Eignungsprüfung einer Klasse und dem jeweiligen Notendurchschnitt am Ende des 2. Jahrgangs wurde in einem Punktwolken-Diagramm mit Regressionsgerade dargestellt:



– Kreuzen Sie den zu dieser Regression passenden Korrelationskoeffizienten an. *[1 aus 5]*

$r \approx -1{,}4$	☐
$r \approx -0{,}9$	☐
$r \approx -0{,}4$	☐
$r \approx 0{,}5$	☐
$r \approx 0{,}9$	☐

– Beurteilen Sie den Schulerfolg von Schülerinnen/Schülern, die bei der Eignungsprüfung zwischen 70 und 75 Punkte erreichten, und von Schülerinnen/Schülern, die dabei mehr als 90 Punkte erreichten.
– Geben Sie für jene Schüler/innen, die einen Notendurchschnitt ≤ 1,5 hatten, die Spannweite der Ergebnisse der Eignungsprüfung an.

Erneuerbare Energie in Österreich * (B_559)

b) In der nachstehenden Tabelle sind die Werte der Energieproduktion durch Photovoltaik und Windkraft in Österreich in Terajoule (TJ) für die Jahre 2008 bis 2015 angegeben.

Jahr	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Energieproduktion durch Photovoltaik und Windkraft in TJ	7349	7211	7750	7597	10078	13605	16672	20799

Die Energieproduktion soll in Abhängigkeit von der Zeit t näherungsweise durch die lineare Funktion f beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion f auf. Wählen Sie dabei $t = 0$ für das Jahr 2008.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von f im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

Fahrzeugtests (2) (B_159)

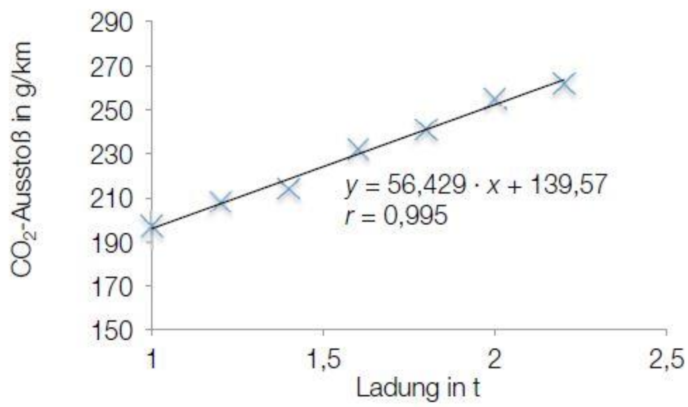
Die Firma Cargo-Car führt in der Entwicklungsphase eines neuen Transporters Tests durch.

a) In Testreihen wurde der Kraftstoffverbrauch – abhängig von der Ladung – erhoben. In der folgenden Tabelle ist für 8 Testfahrten die Reichweite pro Liter Kraftstoffverbrauch bei einer vorgegebenen Ladung in Tonnen angegeben:

Reichweite in km	12,46	12,10	11,81	11,32	10,94	10,81	10,79	10,23
Ladung in t	1	1,05	1,3	1,4	1,52	1,7	1,9	2,1

– Geben Sie an, welche Variable hier als unabhängig und welche als abhängig anzunehmen ist.
– Ermitteln Sie die lineare Regressionsgerade und stellen Sie diese mit den gegebenen Daten dar.
– Beschreiben Sie, wie man die Regressionsgerade zu einer Punktewolke ermittelt.

b) Bei der Auswertung einer Testreihe ergab sich folgende Regressionsgerade y:



Ein Mitarbeiter möchte die geschätzte CO_2-Emission bei einer Ladung von 1,5 Tonnen und bei einer Ladung von 2,5 Tonnen ermitteln.

– Berechnen Sie die gesuchten Werte.
– Interpretieren Sie den in der Grafik angegebenen Korrelationskoeffizienten r.

Größe von Mädchen * (B_353)

In der nachstehenden Tabelle ist angegeben, wie groß Mädchen eines bestimmten Alters durchschnittlich sind.

Alter (in Jahren)	durchschnittliche Körpergröße (in Zentimetern)
0	51,5
1	74,0
2	85,4
3	95,4
4	102,8
5	109,5
6	115,3

c) In der nachstehenden Tabelle sehen Sie, wie schwer Mädchen eines bestimmten Alters durchschnittlich sind.

Alter (in Jahren)	durchschnittliche Masse (in Kilogramm)
1	9,3
2	12,2
3	14,5
4	16,6
5	19,0
6	21,0

Aufgrund der gegebenen Daten kann man vermuten, dass die Abhängigkeit der durchschnittlichen Masse von der durchschnittlichen Körpergröße annähernd durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann. Die Werte für die durchschnittliche Körpergröße entnehmen Sie der im Einleitungstext gegebenen Tabelle.

– Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten für den linearen Zusammenhang zwischen durchschnittlicher Körpergröße und durchschnittlicher Masse.
– Interpretieren Sie diesen Korrelationskoeffizienten.

Intelligenzquotient (B_236)

Der Intelligenzquotient (IQ) ist eine Kenngröße zur Bewertung des allgemeinen intellektuellen Leistungsvermögens (Intelligenz) eines Menschen. Er vergleicht die Intelligenz eines Menschen mit der mittleren Intelligenz der Gesamtbevölkerung im selben Zeitraum und im vergleichbaren Alter.

c) Eine Gruppe von 10 Schülerinnen und Schülern machte einen Intelligenztest. Dieselben Schüler/innen füllten einen Fragebogen aus, der Aufschluss über das Selbstbewusstsein gibt (je höher die Punktezahl, desto größer das Selbstbewusstsein). Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

IQ-Punkte x	101	96	120	105	103	90	107	98	110	103
Selbstbewusstsein y	3	1	4	3	4	2	5	2	4	2

– Ermitteln Sie die Gleichung der Regressionsgeraden.
– Stellen Sie die Punktwolke und die Regressionsgerade grafisch dar.
– Berechnen Sie mithilfe dieses Modells das Selbstbewusstsein eines Schülers oder einer Schülerin mit einem IQ von 110.

Internet (2) * (B_467)

a) In der nachstehenden Tabelle sind Daten zur weltweiten Nutzung des Internets angegeben.

Zeit t seit dem Ende des Jahres 1995 in Jahren	1	2	3	4	5
Anzahl der Internetnutzer/innen in Millionen	16	36	70	147	248

Datenquelle: https://www.internetworldstats.com/emarketing.htm [27.08.2019].

Die Anzahl der Internetnutzer/innen in Millionen soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren durch die Exponentialfunktion f beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung dieser Exponentialfunktion f in der Form $f(t) = a \cdot b^t$.

2) Beschreiben Sie die Bedeutung des Parameters a im gegebenen Sachzusammenhang.

Kino * (B_519)

b) Die nachstehende Tabelle gibt die jährlichen Nettoeinnahmen aller Kinos in Österreich für einige Jahre an.

Jahr	2005	2006	2011	2012	2015
jährliche Nettoeinnahmen in Millionen Euro	94,8	104,3	115,7	118,5	127,2

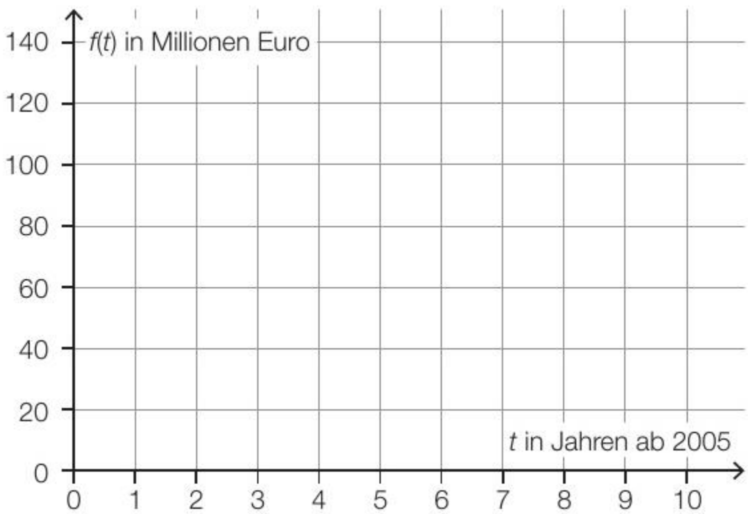
Datenquelle: https://www.statistik.at/web_de/statistiken/menschen_und_gesellschaft/kultur/kinos_und_filme/045075.html [04.08.2021].

Die jährlichen Nettoeinnahmen in Millionen Euro sollen in Abhängigkeit von der Zeit t durch die lineare Funktion f beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion f auf. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2005.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von f im gegebenen Sachzusammenhang.

3) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen von f ein.



Kraftstoffverbrauch (B_176)

Der Kraftstoffverbrauch eines Kraftfahrzeugs ist unter anderem abhängig von der gefahrenen Geschwindigkeit.

v … Geschwindigkeit in Kilometern pro Stunde (km/h)
$K(v)$ … Kraftstoffverbrauch bei einer konstanten Geschwindigkeit v in Litern pro 100 Kilometer (L/100 km)

d) Bei einem Test eines PKWs ergaben sich für den 4. Gang folgende Verbrauchswerte:

v in km/h	80	90	100	110	120
$K(v)$ in L/100 km	5,1	5,65	6,25	6,9	7,6

Zur Beschreibung des Kraftstoffverbrauchs kann man ab 80 km/h ein Modell verwenden, bei dem der Verbrauch mit zunehmender Geschwindigkeit konstant steigt.

– Argumentieren Sie, welcher Funktionstyp diesem Modell gerecht wird.
– Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Funktion mittels Regression.

Kupferbestimmung (B_094)

Um die Konzentration von Kupferlösungen zu ermitteln, wird bei der photometrischen Kupferbestimmung die Absorption des Lichts bei einer definierten Wellenlänge am dunkelblauen Kupfertetraaminkomplex gemessen. Zuerst wird über die Messung der Absorption von Kupferlösungen bekannter Konzentration eine Kalibriergerade bestimmt.
Die Absorption von 4 Eichlösungen wurde gemessen:

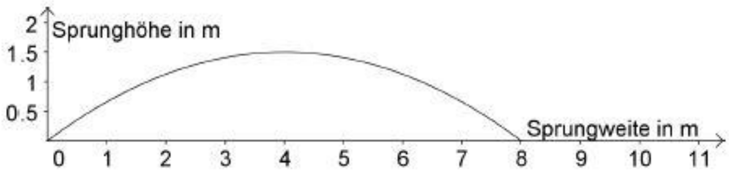
Konzentration Cu^{2+} (in g pro L)	0,08	0,16	0,24	0,32
Absorption	0,06	0,13	0,19	0,27

g … Gramm
L … Liter

b) – Berechnen Sie anhand der Tabelle mithilfe der linearen Regression die Kalibriergerade.
– Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten r.
– Interpretieren Sie die Bedeutung des Korrelationskoeffizienten r.

Kängurusprünge (B_240)

b) Der nachstehende Graph zeigt den Sprung eines Kängurus.



Der Sprung kann mit einer Polynomfunktion 2. Grades im angegebenen Definitionsbereich beschrieben werden.

– Berechnen Sie die Funktionsgleichung mithilfe quadratischer Regression. Runden Sie die Koeffizienten auf Hundertstel.
– Lesen Sie die benötigten Werte aus dem Graphen ab.

Körpergrößen von Kindern (B_228)

Die nachstehende Tabelle gibt die durchschnittlich gemessene Körpergröße am Ende eines Lebensjahres von Buben im Kindesalter im Laufe ihrer Entwicklung an. Als Geburtsgröße wird eine durchschnittliche Größe von 50 cm angenommen.

t … Alter in Jahren (a)
G … Körpergröße in Zentimetern (cm)
$\frac{\Delta G}{\Delta t}$ … jährliche Änderungsrate in cm/a

t in a	G in cm	$\frac{\Delta G}{\Delta t}$ in cm/a
1	77	27
2	89	12
3	97	8
4	104	7
5	111	7
6	117	6

a) – Stellen Sie die Körpergröße G in Abhängigkeit vom Alter t als Punktediagramm in einem Koordinatensystem dar.
– Ermitteln Sie den Zusammenhang der beiden Größen über eine lineare Regression und zeichnen Sie die Trendlinie.
– Beschreiben Sie, was der Korrelationskoeffizient der ermittelten Funktion G aussagt.

Körpermaße (1) * (B_533)

b) Von 9 zufällig ausgewählten Mädchen einer anderen Altersgruppe wurden die Oberarmlänge und die Körpergröße gemessen:

Körpergröße in cm	165	164	166	159	163	170	158	168	172
Oberarmlänge in cm	34,5	34,7	34,6	34,0	34,5	35,0	33,8	34,9	34,9

Die Oberarmlänge soll in Abhängigkeit von der Körpergröße näherungsweise durch die lineare Funktion g beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion g auf.

2) Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die lineare Funktion g ein geeignetes Modell zur Beschreibung dieser Abhängigkeit ist.

3) Interpretieren Sie den Wert der Steigung der linearen Funktion g im gegebenen Sachzusammenhang.

Leistungsdiagnostik im Sport * (B_417)

Bei höherer Belastung benötigt der Körper mehr Sauerstoff und produziert als „Abfallprodukt" Laktat.

Ab einer gewissen Laktatkonzentration ist das Herz-Kreislauf-System nicht mehr in der Lage, die arbeitenden Muskeln mit genügend Sauerstoff zu versorgen. Diese Laktatkonzentration heißt *anaerobe Schwelle*.

b) Bei einem bestimmten Sportler wird die Herzschlagfrequenz in Abhängigkeit von der Laufgeschwindigkeit bestimmt:

Laufgeschwindigkeit in Kilometern pro Stunde	11,0	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5	14,0	14,5
Herzschlagfrequenz in min^{-1}	140	150	162	168	175	182	190	200

Die Herzschlagfrequenz in Abhängigkeit von der Laufgeschwindigkeit soll mithilfe einer linearen Ausgleichsfunktion beschrieben werden.

– Bestimmen Sie eine Gleichung dieser linearen Ausgleichsfunktion.

Marketingausgaben * (B_304)

Die Marketingabteilung einer Handelskette möchte wissen, ob ihre Werbemaßnahmen wirken. Die Buchhaltung liefert Informationen über die monatlichen Umsätze. Die Umsätze von 10 aufeinanderfolgenden Monaten mit den entsprechenden Marketingausgaben liefern folgende Daten (Beträge in 1.000 Euro):

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Marketingausgaben	24	16	20	26	14	16	20	12	18	22
Umsatz	200	184	220	230	180	164	185	150	182	210

a) – Ermitteln Sie den Korrelationskoeffizienten zwischen Marketingausgaben und Umsatz.
– Interpretieren Sie diesen Korrelationskoeffizienten.

b) – Ermitteln Sie die Gleichung derjenigen Regressionsgeraden, die den Umsatz in Abhängigkeit von den Marketingausgaben beschreibt.
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden im Hinblick auf den Umsatz und die Marketingausgaben.

Maschinenring (B_182)

Vier landwirtschaftliche Betriebe, die Weizen anbauen, haben sich zu einem Maschinenring zusammengeschlossen.

b) Die nebenstehende Tabelle zeigt die erzielten Preise für Weizen in den Qualitätsstufen A und B für einen Zeitraum von 10 Jahren.

Der Zusammenhang der Preise zwischen den Weizenqualitäten A und B wird mithilfe der linearen Regression untersucht.

	Preis pro 1 000 kg	
Jahr	*A*	*B*
1	€ 98	€ 112
2	€ 108	€ 117
3	€ 88	€ 101
4	€ 82	€ 97
5	€ 105	€ 116
6	€ 189	€ 202
7	€ 135	€ 165
8	€ 91	€ 106
9	€ 184	€ 205
10	€ 157	€ 186

– Erstellen Sie eine Gleichung der Regressionsgeraden.

– Interpretieren Sie die Bedeutung eines Korrelationskoeffizienten von $r = 0{,}989$ im gegebenen Sachzusammenhang.

– Stellen Sie die Punkte und die Regressionsgerade in einem passenden Koordinatensystem grafisch dar.

Oberflächenspannung von Wasser (B_268)

Die Oberfläche von Wasser verhält sich ähnlich einer gespannten, elastischen Folie. Diese Oberflächenspannung von Wasser ist abhängig von dessen Temperatur und kann näherungsweise durch die folgende Funktion σ beschrieben werden:

$$\sigma(T) = 59{,}2 + 53{,}8 \cdot \ln\left(\frac{644 - T}{273{,}15}\right) \text{ mit } 273{,}15 \leq T \leq 370$$

T… Wassertemperatur in Kelvin (K)
$\sigma(T)$ … Oberflächenspannung bei einer Wassertemperatur T in Mikronewton pro Meter (µN/m)

d) Die Oberflächenspannung in Abhängigkeit von der Temperatur kann vereinfacht auch durch eine lineare Funktion beschrieben werden.

Temperatur in K	275	285	295	305	315	325	335	345	355
Oberflächenspannung in µN/m	75,38	73,90	72,38	70,82	69,21	67,55	65,83	64,06	62,23

– Ermitteln Sie für diese Daten eine lineare Ausgleichsfunktion.

– Interpretieren Sie die Steigung dieser Ausgleichsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.

Planeten (1) (B_167)

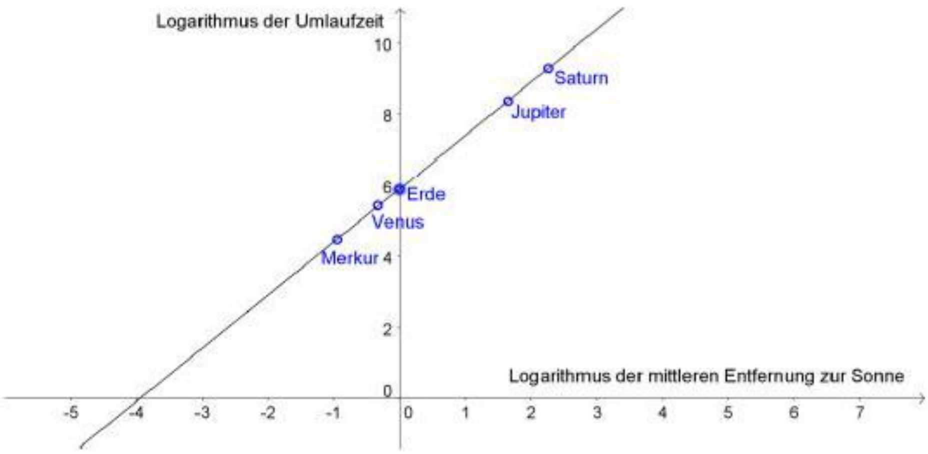
In der nachstehenden Tabelle sind die Entfernungen von Planeten zur Sonne in AE (AE = astronomische Einheit = mittlere Entfernung von der Sonne zur Erde) und deren Umlaufzeiten um die Sonne angegeben.

	Merkur	Venus	Erde	Jupiter	Saturn
mittlere Entfernung x zur Sonne in astronomischen Einheiten (AE)	0,39	0,72	1	5,2	9,54
gerundete Umlaufzeit y in Tagen (d)	88	225	365	4 330	10 760

b) Die Anwendung der natürlichen Logarithmusfunktion auf die Werte der obigen Tabelle führt auf die folgende Tabelle:

		Merkur	Venus	Erde	Jupiter	Saturn
Logarithmus der mittleren Entfernung zur Sonne in astronomischen Einheiten (AE)	x	–0,94	–0,33	0	1,65	2,26
Logarithmus der Umlaufzeit in Tagen (d)	y	4,48	5,42	5,9	8,37	9,28

Die logarithmierten Werte müssen auf einer Geraden liegen. Durch Bestimmung der Regressionsgeraden kann man Ungenauigkeiten ausgleichen.



– Berechnen Sie die Gleichung der Regressionsgeraden.
– Berechnen Sie mithilfe der Regressionsgeraden die Umlaufzeit in Tagen für den Mars (mittlere Entfernung zur Sonne = 1,53 AE).

– Erklären Sie, warum die beiden im Folgenden angegebenen Korrelationskoeffizienten für die in der Grafik dargestellten Regression nicht richtig sein können.

$r_1 \approx -0{,}999$
$r_2 \approx 1{,}01$

Rasenmähroboter * (B_542)

Immer öfter erledigen Rasenmähroboter die Mäharbeiten in Gärten.

d) Die nachstehende Tabelle zeigt die Preisentwicklung für ein bestimmtes Rasenmähroboter-Modell.

Zeit ab Beginn des Jahres 2015 in Monaten	3	6	12	18	24	36	48
Verkaufspreis in €	1 204	1 199	1 137	1 089	1 032	985	889

Der Verkaufspreis soll in Abhängigkeit von der Zeit t durch die lineare Funktion p beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion p auf. Wählen Sie $t = 0$ für den Beginn des Jahres 2015.
2) Berechnen Sie, nach welcher Zeit der Rasenmähroboter gemäß der linearen Funktion p einen Verkaufspreis von € 700 hat.

Reisekosten (B_193)

Die Tarife bei Fahrten mit dem Zug hängen normalerweise von der zurückgelegten Fahrtstrecke ab. Die in dieser Aufgabe verwendeten Bezeichnungen sind:

x … Fahrtstrecke in Kilometern (km)
$T(x)$ … Tarif in Euro (€) für die Fahrtstrecke x

a) In der nachstehenden Tabelle sind die 2012 gültigen Tarife für eine Fahrt mit der ÖBB (2. Klasse ohne Vorteilsticket) ausgehend vom Bahnhof Wien West zum angegebenen Endbahnhof angeführt.

Bahnhof	Fahrtstrecke x in km	Tarif in €
St. Pölten	60	11,00
Linz	190	31,20
Salzburg	317	47,50
Innsbruck	572	58,30
Landeck	647	58,70
Bregenz	770	64,30

– Bestimmen Sie mittels Regressionsrechnung eine Polynomfunktion 3. Grades, die die Abhängigkeit des Tarifs von der zu fahrenden Fahrtstrecke beschreibt.
– Stellen Sie die Funktion gemeinsam mit den angegebenen Werten in einem Diagramm dar und achten Sie dabei auf eine sinnvolle Skalierung der Achsen.

Schlafdauer * (B_492)

Es wurden verschiedene Untersuchungen zur durchschnittlichen täglichen Schlafdauer unterschiedlicher Personengruppen durchgeführt.

a) Das Ergebnis einer Befragung von 50 Personen zur Schlafdauer ist in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Schlafdauer in Stunden	6	7	8	9	10
Anzahl der Personen	3	16	20	10	1

1) Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Schlafdauer dieser 50 Personen.

Bei 9 Personen wurden die Schlafdauer und die Fernsehzeit erhoben:

Schlafdauer in Stunden	6	7	7	8	8	9	9	10	10
Fernsehzeit in Stunden	4	4	2	3	3	2	2	1	2

Die Fernsehzeit soll in Abhängigkeit von der Schlafdauer beschrieben werden.

2) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.

3) Interpretieren Sie das Vorzeichen der Steigung der Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.

4) Berechnen Sie gemäß diesem Modell die Fernsehzeit bei einer Schlafdauer von 7,5 h.

Schlosspark * (B_507)

d) Im Schlosspark wird Schilf gepflanzt. In den ersten Wochen nach der Pflanzung wird die Höhe einer bestimmten Pflanze notiert.

Zeit t nach der Pflanzung in Wochen	1	2	3	4	5	6
Höhe der Pflanze zur Zeit t in cm	30	34	39	44	48	52

Die Höhe dieser Pflanze soll in Abhängigkeit von der Zeit t durch die lineare Funktion h beschrieben werden.

t ... Zeit nach der Pflanzung in Wochen
$h(t)$ ... Höhe der Pflanze zur Zeit t in cm

1) Ermitteln Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion h.

2) Berechnen Sie gemäß diesem Modell die Höhe der Pflanze 20 Wochen nach der Pflanzung.

Sedimente * (B_543)

Sedimente sind in Flüssigkeiten enthaltene Teilchen, die sich unter dem Einfluss der Schwerkraft ablagern.

b) Das Flussbett der Donau verändert sich ständig. Die Seehöhe (Höhe über dem Meeresspiegel) an einer bestimmten Stelle des Flussbetts wurde wiederholt gemessen. Die Messwerte sind in der nachstehenden Tabelle dargestellt.

Zeit seit Beginn des Jahres 1950 in Jahren	Seehöhe des Flussbetts in m
0	142,0
20	141,7
35	141,6
45	141,2
52	141,0

Die Seehöhe des Flussbetts soll in Abhängigkeit von der Zeit durch die quadratische Funktion f beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der quadratischen Funktion f auf.

   t ... Zeit seit Beginn des Jahres 1950 in Jahren
   $f(t)$ ... Seehöhe des Flussbetts zur Zeit t in m

2) Ermitteln Sie mithilfe der quadratischen Funktion f die Seehöhe des Flussbetts zu Beginn des Jahres 2010.

Sozialausgaben (1) * (B_481)

Sozialausgaben sind Geldleistungen, die der Staat Personen in bestimmten Lebenslagen zur Verfügung stellt.

Die Sozialausgaben in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1990 bis 2015 sind in der nachstehenden Tabelle angegeben (Werte gerundet).

Jahr	Sozialausgaben in Milliarden Euro
1990	35,5
1995	51,0
2000	59,8
2005	71,2
2010	87,8
2015	102,5

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2017.* Wien: Verlag Österreich 2016, S. 224.

a) Die Sozialausgaben sollen in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren ab 1990 näherungsweise durch eine lineare Funktion beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion S_1.
   Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1990.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von S_1 im gegebenen Sachzusammenhang.

3) Ermitteln Sie mithilfe von S_1 eine Prognose für die Sozialausgaben im Jahr 2020.

Sport (B_275)

In vielen sportlichen Disziplinen erreichen Athletinnen und Athleten neue Bestmarken und sind dabei oft extremen Belastungen ausgesetzt.

a) In der nachstehenden Tabelle ist die Entwicklung der Marathon-Weltrekordzeit dargestellt.

Jahr	2002	2003	2007	2008	2011	2013	2014
Marathon-Weltrekordzeit in h:min:s	2:05:38	2:04:55	2:04:26	2:03:59	2:03:38	2:03:23	2:02:57

– Ermitteln Sie mit diesem Datensatz die Gleichung derjenigen Regressionsfunktion, die die Marathon-Weltrekordzeit in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren annähert. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2002.
– Ermitteln Sie anhand dieses Modells, in welchem Jahr voraussichtlich die Zwei-Stunden-Marke erreicht werden wird.

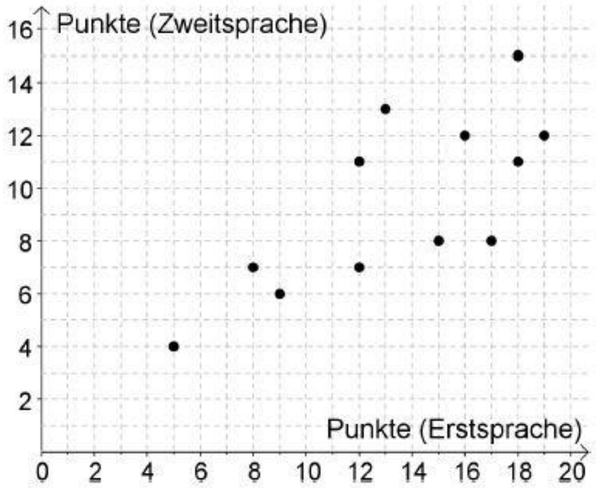
Spracherwerb (B_248)

Die Früh- und Kindergartenpädagogik beschäftigt sich mit der Sprachentwicklung von Kindern im Vorschulalter.

c) Es wird vermutet, dass der Zweitspracherwerb beim Kind umso erfolgreicher verläuft, je besser das Kind seine Erstsprache (Muttersprache) beherrscht.

In einer Vorschulgruppe wurden dazu 12 zweisprachige Kinder in ihrer Muttersprache und ihrer Zweitsprache getestet. Bei den Tests waren jeweils 20 Punkte maximal erreichbar. Das Ergebnis der beiden Tests ist in der nachstehenden Tabelle und in der unten stehenden Abbildung dargestellt:

Punkte Erstsprache	5	8	9	12	12	13	15	16	17	18	18	19
Punkte Zweitsprache	4	7	6	7	11	13	8	12	8	11	15	12



– Bestimmen Sie die Regressionsgerade.
– Zeichnen Sie die Regressionsgerade im obigen Koordinatensystem ein, sodass die Erstsprache die unabhängige und die Zweitsprache die abhängige Variable ist.
– Beurteilen Sie den Wert des Korrelationskoeffizienten im Sachzusammenhang.

Staatseinnahmen und -ausgaben * (B_352)

Die Statistik Austria gibt u.a. Auskunft über die Einnahmen und Ausgaben des Staates Österreich (vgl. Statistik Austria: Struktur der Einnahmen und Ausgaben des Staates, konsolidiert, Jahresdaten – erstellt am 30.09.2013).

a) Die folgende Tabelle gibt die Ausgaben des Staates Österreich für den Zeitraum von 2006 bis 2012 in Milliarden Euro an:

Jahr	Ausgaben in Mrd. Euro
2006	127,293
2007	133,180
2008	139,494
2009	145,333
2010	150,593
2011	151,881
2012	158,735

– Ermitteln Sie mit diesem Datensatz die Gleichung der Regressionsgeraden, die die Ausgaben in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren annähert. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2006.
– Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die Regressionsgerade ein geeignetes Modell darstellt, um die Entwicklung der Ausgaben zu beschreiben.
– Berechnen Sie anhand dieses Modells näherungsweise die Ausgaben im Jahr 2015.

Streaming * (B_501)

Ein Fernsehsender entschließt sich, einen Streaming-Dienst für Filme auf den Markt zu bringen. Damit können Filme über das Internet abgespielt werden.
Die Zeit nach der Markteinführung in Monaten wird mit t bezeichnet.

b) In der nachstehenden Tabelle ist die Anzahl der Kunden für einen bestimmten Zeitraum angegeben.

Zeit t in Monaten	18	20	24	26	28
Anzahl der Kunden	23800	32200	54600	68000	81900

Die Anzahl der Kunden soll in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.

Studienabschlüsse* (B_450)

b) Folgende Tabelle gibt die jeweilige Anzahl der Studienabschlüsse an öffentlichen Universitäten in Österreich in den Jahren 2007 bis 2014 an:

Jahr	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Anzahl der Studienabschlüsse an öffentlichen Universitäten	22121	23910	27232	27926	31115	34460	37312	34300

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Bildung in Zahlen 2014/15. Tabellenband.* Wien: Statistik Austria 2016, S. 320.

Jemand vermutet, dass sich die Anzahl der Studienabschlüsse in Abhängigkeit von der Zeit t näherungsweise durch eine lineare Funktion beschreiben lässt.

1) Ermitteln Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der zugehörigen linearen Funktion f. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2007.

2) Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die Regressionsfunktion ein geeignetes Modell darstellt, um die Entwicklung der Anzahl der Studienabschlüsse zu beschreiben.

3) Ermitteln Sie, mit wie vielen Studienabschlüssen gemäß diesem Modell im Jahr 2020 zu rechnen ist.

Tagestemperatur (B_252)

b) An einem Tag im Oktober hat man einen Temperaturverlauf gemessen, der durch eine Polynomfunktion 3. Grades mit $f(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$ angenähert werden kann.

t ... Zeit nach Mitternacht in Stunden
$f(t)$ ... Temperatur zum Zeitpunkt t in °C

t	2	5	8	11	14	17	20	23
$f(t)$	5,4	4,3	8,3	12,2	15,3	14	9,1	7,2

– Erstellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine zu den angegebenen Werten passende Polynomfunktion 3. Grades. (Runden Sie dabei die Koeffizienten auf 4 Nachkommastellen.)
– Berechnen Sie den Differenzenquotient dieser Polynomfunktion für das Intervall [6; 12].
– Beschreiben Sie, was dieser Differenzenquotient für das Intervall im Sachzusammenhang aussagt.

W-LAN * (B_475)

In einer Fabrikshalle wird mit Access-Points und Repeatern ein W-LAN eingerichtet.
Ein Access-Point verbindet einen Laptop kabellos mit einem Netzwerk. Ein Repeater verstärkt das Signal.

Die Datenübertragungsrate beschreibt die übertragene Datenmenge pro Zeiteinheit und wird meist in der Einheit Megabit pro Sekunde (Mbit/s) angegeben.

a) Die Datenübertragungsrate zu einem Laptop hängt von seiner Entfernung von einem Access-Point ab.
Es wurden folgende Daten erhoben:

Entfernung in m	2	8	16	30	39	46
Datenübertragungsrate in Mbit/s	547	456	400	139	108	25

Ein Mitarbeiter geht aufgrund der Messwerte von einem annähernd linearen Zusammenhang für die Datenübertragungsrate in Abhängigkeit von der Entfernung aus.

1) Erklären Sie, warum der zugehörige Korrelationskoeffizient negativ sein muss.
2) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.
3) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Funktion im gegebenen Sachzusammenhang.

Wiener Öffis * (B_187)

Wien betreibt das fünftgrößte Straßenbahnnetz weltweit und das fünftgrößte U-Bahn-Netz in der Europäischen Union. Seit 1995 steigt die Zahl der Passagiere ständig an.

a)

Jahr	2002	2005	2008	2011
Fahrgastzahl der Wiener Linien in Millionen	722,4	746,8	803,7	875,0

– Interpretieren Sie das Ergebnis der folgenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang:

$$\frac{875{,}0 - 722{,}4}{722{,}4} \approx 0{,}21$$

Es wird angenommen, dass der Zusammenhang zwischen der Zeit t in Jahren und der Fahrgastzahl der Wiener Linien in Millionen pro Jahr näherungsweise durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2002.

– Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für die Fahrgastzahl im Jahr 2018.

Wasser * (B_550)

b) Auf einer Website ist zu lesen:
„Aktuell liegt der weltweite jährliche Süßwasserbedarf bei geschätzt 4 370 km³, wobei die Grenze der nachhaltigen Nutzung mit 4 000 km³ angegeben wird."

1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent man den aktuellen Süßwasserbedarf reduzieren müsste, um die Grenze der nachhaltigen Nutzung zu erreichen.

Der sogenannte *Earth Overshoot Day* („Welterschöpfungstag") ist ein bestimmter Tag des Jahres, an dem die menschliche Nachfrage an natürlichen Ressourcen (wie zum Beispiel auch Süßwasser) die Kapazität der Erde in diesem Jahr übersteigt. Ab dem darauffolgenden Tag befindet sich die Menschheit in einem Defizit.

Jahr	*Earth Overshoot Day*	Anzahl der Tage im Defizit
1990	10. Oktober	82
1995	3. Oktober	89
2000	22. September	100
2005	24. August	129
2010	6. August	147
2015	3. August	150
2016	3. August	150
2017	30. Juli	154

Datenquelle: https://www.overshootday.org/newsroom/past-earth-overshoot-days/ [24.11.2021].

Die Anzahl der Tage im Defizit soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren beschrieben werden.

2) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der zugehörigen linearen Funktion auf. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1990.

3) Argumentieren Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, dass die lineare Regressionsfunktion ein geeignetes Modell darstellt, um die Entwicklung des *Earth Overshoot Day* zu beschreiben.

4) Ermitteln Sie mithilfe dieses Modells, nach welcher Zeit t sich die Menschheit 364 Tage im Defizit befindet.

Wirkstoffkonzentration (B_369)

Die Konzentration von verabreichten Wirkstoffen im Blut nimmt mit der Zeit ab.

a) In gewissen Zeitabständen wurde die Konzentration des Wirkstoffs im Blut einer Patientin gemessen. Die gemessenen Werte sind in der nachstehenden Tabelle dargestellt.

Zeit nach Beginn der Verabreichung in h	Wirkstoffkonzentration in mg/L
0	1
4	0,65
5	0,5
8	0,25
12	0,15
16	0,1

– Ermitteln Sie mithilfe von exponentieller Regression eine Funktionsgleichung, mit der die Abnahme der Konzentration näherungsweise beschrieben werden kann.
– Stellen Sie die gemessenen Werte und die ermittelte Funktionsgleichung grafisch dar.

Wohnungen (1) * (B_423)

Der Fachverband der Immobilien- und Vermögenstreuhänder erstellt Statistiken zu den Trends auf dem Immobilienmarkt. Es werden die ortsüblichen Kaufpreise und Mieten erhoben. Die Höhe der Kaufpreise bzw. der Mieten hängt in der Regel stark von der Größe, der Ausstattung und der Lage der Wohnungen ab.

a) Für eine österreichische Landeshauptstadt hat der Fachverband der Immobilien- und Vermögenstreuhänder die Mietpreise in Euro pro m² für Wohnungen bis zu 60 m² mit gutem Wohnwert erhoben:

Ende des Jahres ...	Mietpreis in Euro pro m²
2003	8,10
2004	7,90
2005	8,20
2006	8,50
2007	8,80
2008	9,30
2009	9,60
2010	9,70
2011	10,30
2012	10,80

Der Mietpreis in Euro pro m² soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren beschrieben werden.

– Ermitteln Sie mithilfe von linearer Regression eine Gleichung der zugehörigen Funktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Ende des Jahres 2003.
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.
– Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für den Mietpreis pro m² für das Ende des Jahres 2018.

Ein anderes Modell verwendet zur Beschreibung der Mietpreisentwicklung die Funktion B.

$B(t) = 7{,}77 \cdot 1{,}035^t$

t ... Zeit in Jahren ab Ende des Jahres 2003
$B(t)$ ... Mietpreis zur Zeit t in Euro pro m²

– Interpretieren Sie die Bedeutung des Parameters 1,035 im gegebenen Sachzusammenhang.