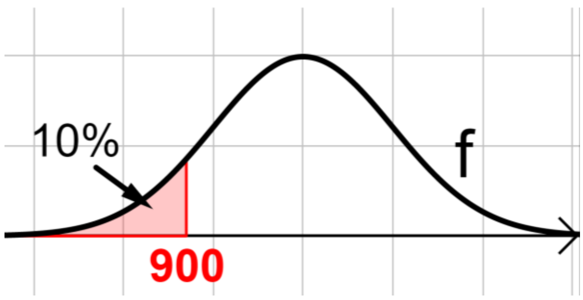
5.1 Normalverteilung: Bestimmung der Parameter

Maturaskript BHS – Teil B (11 Seiten)

Cluster: HLFS/HUM

Grundkompetenzen:

- **B_W_5.1** Erwartungswert bzw. Standardabweichung einer normalverteilten Zufallsvariablen bei bekannten Bedingungen (Wahrscheinlichkeit, Intervallgrenzen) mittels Technologieeinsatz bestimmen



Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Prof. πegischer

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM

2) Gib im Feld „**Volltextsuche**“ die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. A_263) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**“ und „**GeoGebra**“ erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**“ erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln	**Weitere Regeln für Lehrpersonen**
▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen. ▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen. ▪ Sie dürfen mein Materialen **NICHT** gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden. ▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden. ▪ Bei einem **Missbrauch** erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.	**WICHTIGSTE REGEL:** LehrerInnen dürfen die Materialien in **Ihrem eigenen Unterricht** verwenden: ▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen. ▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben. ▪ Es ist **nicht erlaubt**, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben. ▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

[Video](#)

Bestimmung von Parametern der Normalverteilung

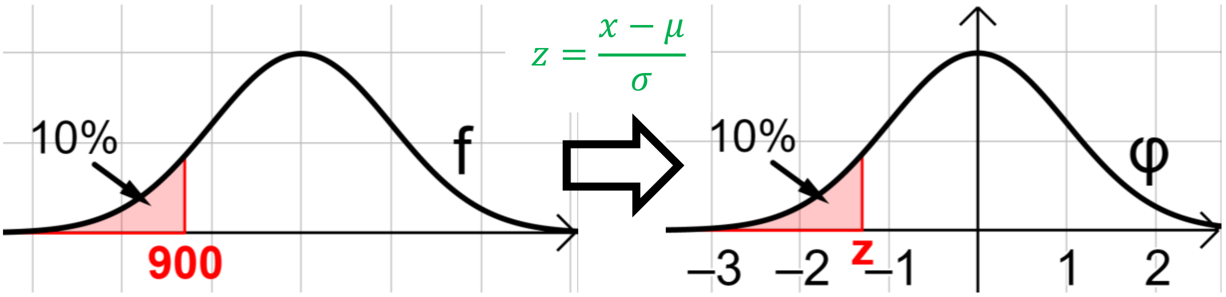
Umkehraufgabe Typ 1: Erwartungswert μ ist gesucht

Musterbeispiel: Die Lebensdauer eines Rasenmähers ist annähernd normalverteilt mit den Parametern μ und σ. Die Standardabweichung beträgt 50 Stunden. Berechne den **Erwartungswert**, wenn 10% der Rasenmäher eine maximale Lebensdauer von 900 Stunden haben.

$$P(X \leq 900) = 0{,}1$$

Bestimmung ohne Technologie – Transformation zur Standardnormalverteilung

Graphische Veranschaulichung:



Schritt 1: Bestimmung des Wertes für z. Es gilt: $\phi(z) = 0{,}1 \rightarrow$ ϕ-Tabelle:

z	$\phi(z)$	$\phi(-z)$
	0,	0,
1,28	8997	**1003**
1,29	9015	0985

$$z = -1{,}28$$

Schritt 2: Bestimmung des Erwartungswertes

$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad \rightarrow \quad \mu = x - z \cdot \sigma$ Werte einsetzen: $-1{,}28 = \frac{900-\mu}{50}$

Umformen der Formel: $\mu = 900 + 1{,}28 \cdot 50 = 964$ Stunden.

GeoGebra – CAS (Gleichung lösen):

$$\text{Normal}(m, 50, 900) = 0.1$$

NLöse: $\{\mathbf{m = 964.07758}\}$

Bsp. 1) Eine Abfüllanlage für Fruchtsäfte liefert normalverteilte Füllungen. Die Standardabweichung beträgt stets $\sigma = 6\,ml$. Der Erwartungswert kann beliebig eingestellt werden.

[Video 19](#)

Wie muss man den Erwartungswert einstellen, wenn…

(i) 85% der Flaschen höchstens 600 ml enthalten sollen.	(i) 20% der Flaschen mindestens 1200 ml enthalten sollen.

Video

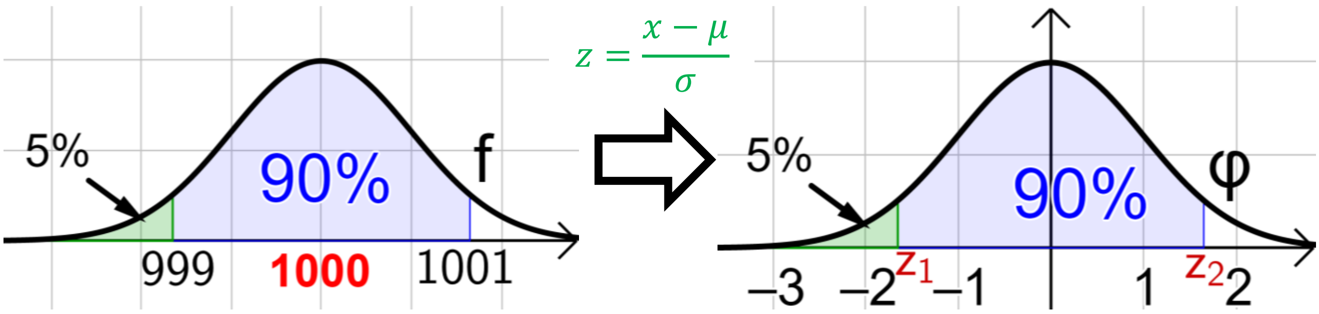
Umkehraufgabe Typ 2: Standardabweichung σ ist gesucht

Musterbeispiel: Eine Abfüllanlage für Fruchtsäfte liefert normalverteilte Füllungen. Bei der Produktion von 1000 ml – Flaschen beträgt der Erwartungswert $\mu = 1000\ ml$. Welche Standardabweichung darf die Abfüllanlage haben, wenn 90 % der Flaschen um maximal ± 1 ml von der erwünschten Füllmenge abweichen.

$$P(999 \leq X \leq 1001) = 0{,}9$$

Bestimmung ohne Technologie – Transformation zur Standardnormalverteilung

Graphische Veranschaulichung:



Schritt 1: Bestimmung des Wertes für z_1 oder z_2. Es gilt:

$\phi(z_1) = 0{,}05$

$\phi(z_2) = 0{,}95$

z	$\phi(z)$	$\phi(-z)$
	0,	0,
1,64	9495	0505
1,65	9505	0495

$z_1 = -1{,}645$

$z_2 = 1{,}645$

Schritt 2: Bestimmung der Standardabweichung

$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow \sigma = \frac{x-\mu}{z}$ Werte einsetzen z.B. über 999 und z_1: $-1{,}645 = \frac{999-1000}{\sigma}$

Umformen der Formel: $\sigma = \frac{999-1000}{-1{,}645} = \frac{-1}{-1{,}645} = 0{,}608$

Ergebnis: Die Standardabweichung darf höchstens 0,608 ml betragen.

GeoGebra – CAS (Gleichung lösen):

$$\text{Normal}(1000, s, 999) = 0.05$$

NLöse: $\{s = 0.60796\}$

Bsp. 2) Eine Abfüllanlage für Erdbeermarmelade liefert normalverteilte Füllungen.

a. Mit dieser Abfüllanlage werden 450g-Marmeladengläser befüllt. Der Erwartungswert $\mu = 450g$. Welchen Wert darf die Standardabweichung höchstens annehmen, wenn…

(i) …98% der Marmeladengläser um maximal ± 2 Gramm vom Erwartungswert abweichen dürfen.	(ii) … 90% der Gläser eine Füllmenge von 450,5 Gramm nicht überschreiten dürfen.

b. Mit dieser Abfüllanlage werden weitere Marmeladengläser verschiedener Größen befüllt. Die Standardabweichung σ beträgt 3 Gramm. Wie groß ist der Erwartungswert, wenn…

(i) 60% der Gläser maximal 260 Gramm Erdbeermarmelade enthalten.	(ii) 90% der Gläser mindestens 600 Gramm Erdbeermarmelade enthalten.

Bsp. 3) Die Lebensdauer einer Maschine ist annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert von 2000 Stunden.

a. Wie groß ist die Standardabweichung σ, wenn die Lebensdauer von 86% der Maschinen zwischen 1800 Stunden und 2200 Stunden beträgt.

Video

SCAN MICH

b. Welchen Wert darf die Standardabweichung höchstens annehmen, wenn eine Maschine mit 92%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens 1980 Stunden einsatzfähig sein soll.

c. In Zukunft möchten die Hersteller die Lebensdauer der Maschine vergrößern. Dabei wird gewünscht, dass die Laufzeit von 95% der Maschinen über 2200 Stunden liegen soll. Die Standardabweichung der neuen Maschine soll 50 Stunden betragen. Berechne den Erwartungswert.

Betonrohre* (B_452)

d) Der Durchmesser von Betonrohren des Modells D kann als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 100$ mm angenommen werden. Bei 3 % der Rohre ist der Durchmesser kleiner als 98 mm.

1) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung σ.

Durchmesser einer Stahlwelle * (B_019)

Ein Unternehmen stellt auf computergesteuerten Drehmaschinen Stahlwellen für Elektromotoren in Massenproduktion her.

b) Bei Maschine B sind die Durchmesser der hergestellten Stahlwellen annähernd normalverteilt mit der Standardabweichung $\sigma = 0{,}02$ mm. Ein Durchmesser von 9,97 mm wird von 0,1 % der Stahlwellen unterschritten.

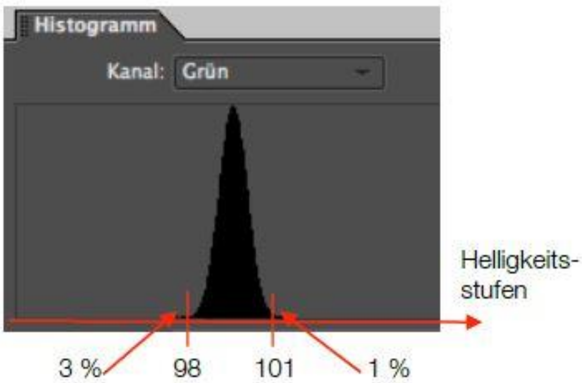
– Ermitteln Sie den zugehörigen Erwartungswert μ.

Fotografie (B_047)

1924 wurden erstmals Kleinbildkameras in Serie gefertigt. Die Automatisierung der bis dahin überwiegend mechanisch funktionierenden Fotoapparate startete in den 1960er Jahren.

d) Da das menschliche Auge grün-sensibel ist, haben Sensoren von Digitalkameras mehr grün-sensible Rezeptoren und der Rauscheffekt ist bei der Farbe grün geringer.

– Interpretieren Sie die nebenstehende Grafik: Beschreiben Sie, was die Werte „3 %“ und „1 %“ bedeuten.
(Die Beschreibung kann entweder über mathematische Ausdrücke oder in Worten erfolgen.)



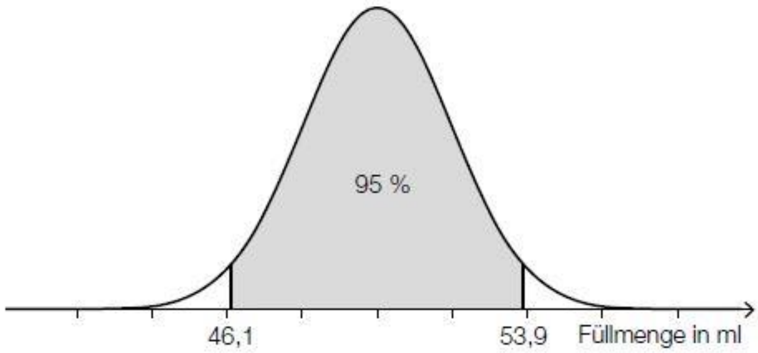
Anhand der in der Grafik dargestellten Werte kann bei bekanntem Sigma der Erwartungswert μ berechnet werden.

– Erstellen Sie die dazu benötigte Gleichung mit $\sigma = 0{,}72$.

Hotelrenovierung (1) (B_210)

Ein Hotel wird renoviert.

d) Im Zuge der Renovierung wurden neue Shampoo-Fläschchen bestellt. Die Füllmenge der Fläschchen kann als annähernd normalverteilte Zufallsvariable angenommen werden. Die Füllmenge von 95 % aller Fläschchen liegt im unten dargestellten symmetrischen Intervall um den Erwartungswert.



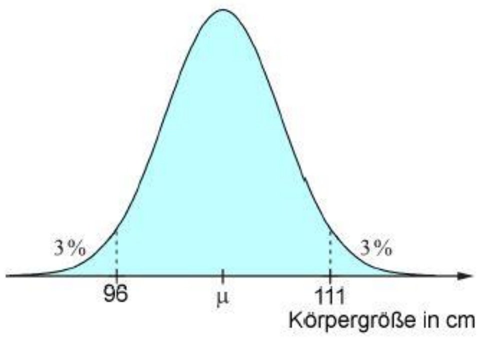
– Bestimmen Sie den Erwartungswert und die zugehörige Standardabweichung.
– Beschreiben Sie, wie sich die Kurve ändern würde, wenn die Standardabweichung bei gleichbleibendem Erwartungswert kleiner wäre.

Körpergröße von Kindergartenkindern (B_235)

Bei den Vorsorgeuntersuchungen von Kindern wird auch die Körpergröße überprüft, um bei Auffälligkeiten rechtzeitig Therapiemaßnahmen setzen zu können.

a) Die nebenstehende Glockenkurve nach Gauß schematisiert die Größenverteilung von 4-jährigen Kindern.
Die 3 % am oberen und am unteren Ende weisen auf die auffällig großen bzw. die auffällig kleinen Kinder hin.

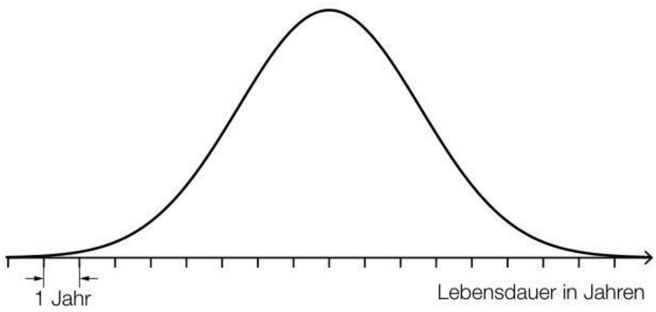
– Interpretieren Sie die Kurve in Bezug auf die Verteilung der Körpergröße von 4-jährigen Kindern und den Erwartungswert μ.
– Berechnen Sie die Standardabweichung σ.



Küchengerät * (B_557)

Ein neues Küchengerät wird auf den Markt gebracht.

b) Die Lebensdauer des Küchengeräts wird als normalverteilt mit einem Erwartungswert von 10 Jahren angenommen. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion dieser Normalverteilung. Der Abstand zwischen zwei Markierungen auf der Achse entspricht 1 Jahr.



Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Küchengerät dieses Typs eine Lebensdauer von maximal 7 Jahren hat, beträgt 12 %.

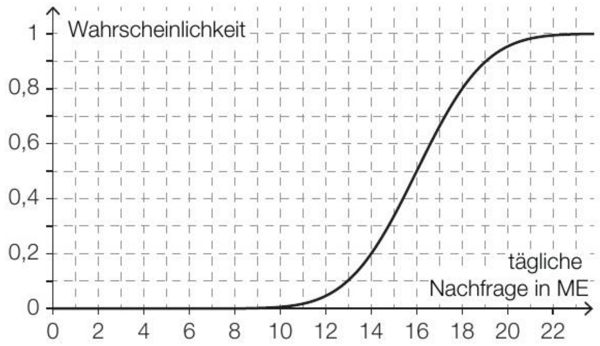
1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung diese Wahrscheinlichkeit.

2) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung.

Obsthändler * (B_489)

Ein Obsthändler plant die Renovierung seiner Geschäftsräume.

c) Die tägliche Nachfrage X nach einer bestimmten Obstsorte ist bei diesem Obsthändler annähernd normalverteilt. Der Graph der zugehörigen Verteilungsfunktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Lesen Sie aus der Abbildung den Erwartungswert μ und die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 14)$ ab.

μ = ______________________ ME

$P(X \leq 14)$ = ______________________

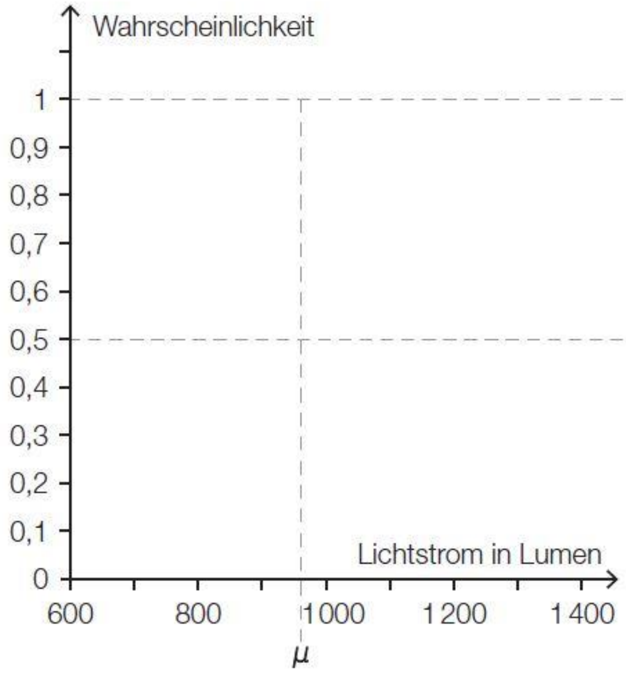
2) Ermitteln Sie mithilfe der abgelesenen Werte die Standardabweichung von X.

LED-Lampen (2) * (B_315)

Traditionelle Glühlampen wurden wegen ihrer geringen Energieeffizienz in der EU schrittweise verboten. Als Alternative zu den Glühlampen bieten Hersteller LED-Lampen an.

c) Laut einem Ratgeber für LED-Lampen kann der Lichtstrom von 12-Watt-LED-Lampen als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ angenommen werden. Dabei liegen 95 % der Lichtstromwerte in dem um μ symmetrischen Intervall von 780 Lumen bis 1 140 Lumen.

– Berechnen Sie den Erwartungswert μ des Lichtstroms für 12-Watt-LED-Lampen.
– Berechnen Sie die Standardabweichung σ des Lichtstroms für 12-Watt-LED-Lampen.
– Skizzieren Sie den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion in der nachstehenden Abbildung.



– Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte 12-Watt-LED-Lampe einen Lichtstrom von bis zu 900 Lumen hat.

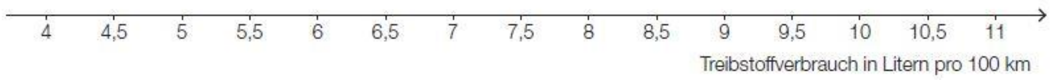
Leihwagen * (B_318)

Ein Leihwagen-Unternehmen hat in seinem Fuhrpark 2 Modelle. Modell 1 ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,62 verliehen, Modell 2 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Modelle gleichzeitig verliehen sind, beträgt 0,35.

A bezeichnet das Ereignis, dass Modell 1 verliehen ist, und B bezeichnet das Ereignis, dass Modell 2 verliehen ist.

d) Der Treibstoffverbrauch von Modell 1 ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 6{,}9$ Liter pro 100 km. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt dieser Treibstoffverbrauch im Intervall [5,6; 8,2].

- Ermitteln Sie die Standardabweichung dieser Normalverteilung.
- Zeichnen Sie den Graphen der Dichtefunktion dieser Normalverteilung in die unten stehende Abbildung ein. Berücksichtigen Sie dabei den Erwartungswert und die Standardabweichung.



- Beschreiben Sie, wie sich eine kleinere Standardabweichung auf den Graphen der Dichtefunktion auswirken würde.

Länge eines Werkstücks * (B_309)

In einer Fertigungsanlage werden Werkstücke erzeugt, deren Längen erfahrungsgemäß normalverteilt sind.

b) Die Länge eines Werkstücks ist normalverteilt mit $\mu = 72{,}3$ mm.
Werkstücke, die zu lang oder zu kurz sind, sind Ausschuss und werden aussortiert.
Abweichungen von bis zu $\pm 0{,}9$ mm vom Erwartungswert werden toleriert.

- Berechnen Sie für eine Standardabweichung von $\sigma = 0{,}5$ mm die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Werkstück aussortiert wird.
- Berechnen Sie, wie groß die Standardabweichung sein müsste, damit der Ausschussanteil 2 % beträgt.

Magneten (B_081)

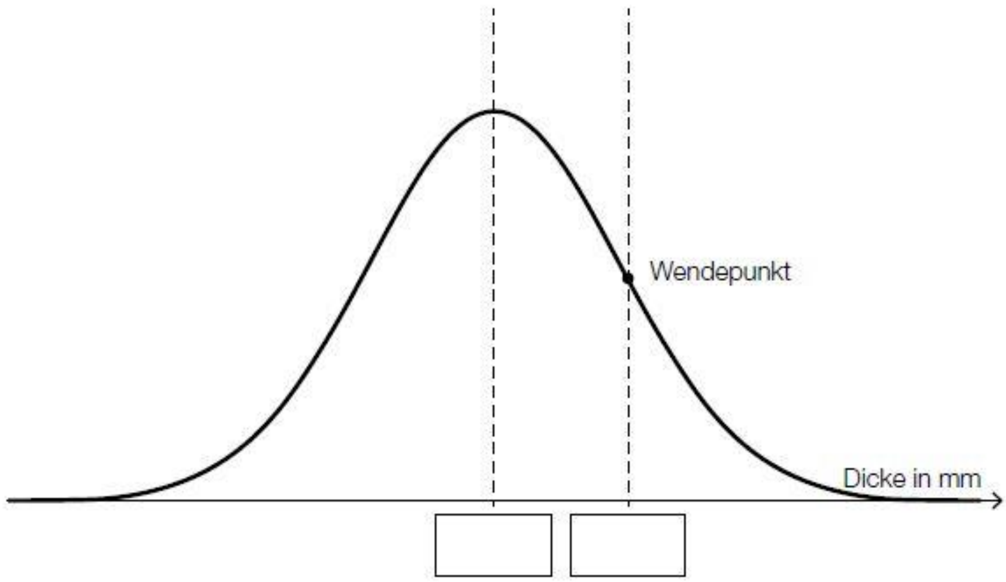
Ein Unternehmen stellt Dauermagneten für verschiedene technische Anwendungen her.
Ein Magnet aus dem Werkstoff Ferrit wird auf seinen Curie-Punkt erhitzt, in einer Spule magnetisiert, und anschließend wieder abgekühlt.
Der Abkühlungsprozess verläuft nach folgender Differenzialgleichung:

$$\frac{dT(t)}{dt} = k \cdot (T_U - T(t))$$

t … Zeit ab Beginn der Abkühlung in Minuten (min)
$T(t)$ … Temperatur des Werkstoffes zur Zeit t in °C
T_U … Umgebungstemperatur in °C
$k > 0$ … Proportionalitätsfaktor (in min^{-1})

c) Die erforderliche Länge (= Sollwert) der Magneten für den Einbau in elektronische Geräte ist 2,5 mm.
Messungen haben ergeben, dass die Magnetlänge normalverteilt ist mit dem Erwartungswert $\mu = 2{,}5$ mm und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}05$ mm.

– Tragen Sie in der nachstehenden Abbildung die fehlenden Beschriftungen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.



Magnete, die zu lang oder zu kurz sind, sind Ausschuss und werden aussortiert. Abweichungen von bis zu ±0,1 mm vom Erwartungswert werden toleriert.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Magnet aussortiert wird.

Der Produktionsprozess wird so verändert, dass eine Verringerung der Ausschussquote auf 1 % bei gleichbleibenden Toleranzgrenzen erreicht wird.

– Ermitteln Sie die neue Standardabweichung σ bei unverändertem μ.

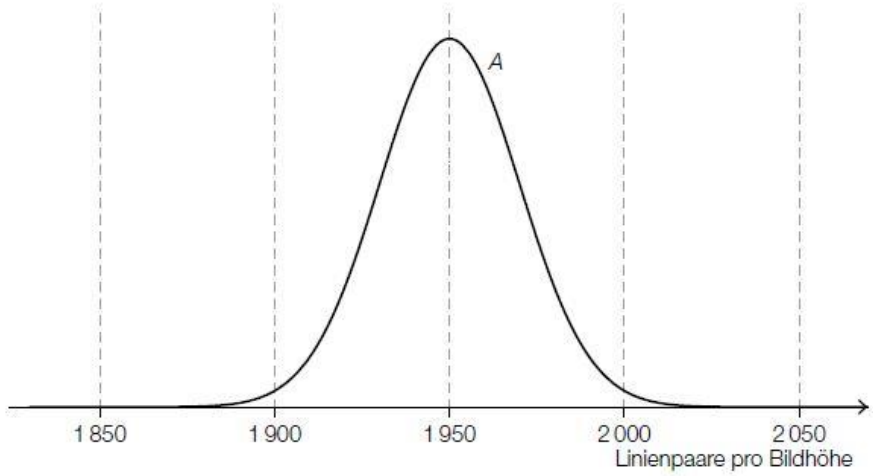
Qualitätstest bei Objektiven (1) * (B_326)

Um das Objektiv einer Digitalkamera zu testen, fotografiert man eine genormte Tafel (Test-Chart) mit einem Test-Motiv und lässt das Foto von einer speziellen Software auswerten.

c) Ein für Digitalkameras relevantes Qualitätsmerkmal ist die Anzahl der Linienpaare pro Bildhöhe (LP/BH).

Für einen bestimmten Objektiv-Typ ist diese Kenngröße annähernd normalverteilt. Die Objektive werden von 3 verschiedenen Herstellern – *A*, *B* und *C* – jeweils mit dem Erwartungswert μ = 1 950 LP/BH und der Standardabweichung σ_A, σ_B bzw. σ_C produziert.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion für Hersteller *A* dargestellt.



1) Skizzieren Sie in der obigen Abbildung den Graphen der zugehörigen Dichtefunktion für Hersteller *B*, wenn für die Standardabweichungen gilt: $\sigma_A < \sigma_B$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein neu produziertes Objektiv des Herstellers *C* mindestens 1 900 LP/BH darstellen kann, beträgt 97,7 %.

2) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung σ_C.

Schweinezucht (1) (B_168)

Bei Schweinen wird die Rückenspeckdicke gemessen.

b) Man nimmt an, dass die Rückenspeckdicke normalverteilt ist. Unter bestimmten Umständen wird eine Dicke zwischen 9 mm und 14 mm als ideal erachtet.

- Berechnen Sie die Standardabweichung, wenn der Erwartungswert der Rückenspeckdicke 11,5 mm ist und 90 % der Schweine im idealen Bereich liegen.
- Stellen Sie den Sachverhalt mithilfe der Gauß'schen Glockenkurve grafisch dar.

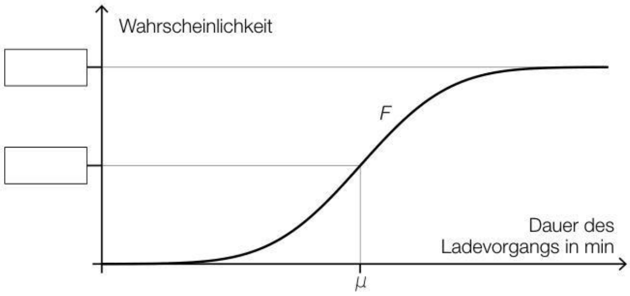
Smartphone-Akkus * (B_563)

b) Die Dauer eines Ladevorgangs bei einem bestimmten Akkutyp kann als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ angenommen werden.

1) Geben Sie mithilfe von μ und σ dasjenige Intervall an, in dem die Dichtefunktion negativ gekrümmt ist.

] ______ ; ______ [

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Verteilungsfunktion F dargestellt.



2) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

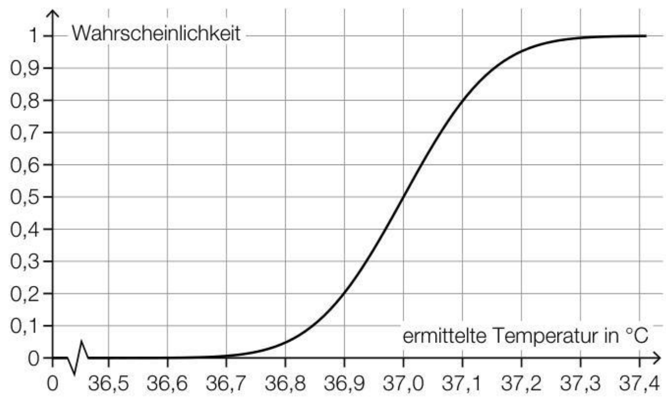
Es gilt: $\mu = 92$ min und $F(86) = 0{,}12$

3) Berechnen Sie die Standardabweichung σ.

Thermometer * (B_540)

Ein digitales Thermometer wird zur Messung der Temperatur des Wassers in einem Becken verwendet. Ausgehend von einem Startwert nähert sich die angezeigte Temperatur der tatsächlichen Temperatur des Wassers an.

c) Ein Unternehmen produziert Thermometer. Im Rahmen einer Qualitätskontrolle werden die produzierten Thermometer unter jeweils gleichen Bedingungen getestet.
Die ermittelten Temperaturen können als annähernd normalverteilt angenommen werden.
In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Verteilungsfunktion dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Erwartungswert μ ab.

μ = ________________ °C

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit ab, dass die ermittelte Temperatur höchstens 36,9 °C beträgt.

3) Ermitteln Sie die Standardabweichung σ.