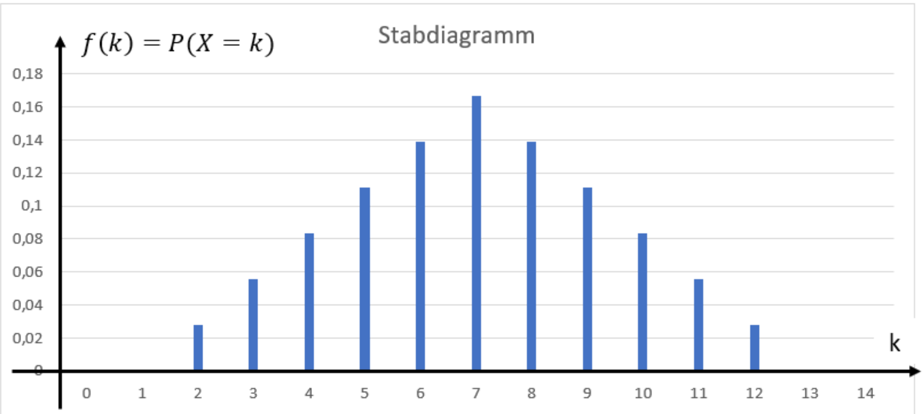
5.2 Diskrete Zufallsvariable

Maturaskript BHS – Teil B (16 Seiten)

Cluster: BAfEP/BASOP/BRP

Grundkompetenzen:

- **5.2** den Begriff der Zufallsvariablen verstehen und anwenden; Verteilungsfunktion und Kenngrößen (Erwartungswert und Varianz) einer diskreten Zufallsvariablen bestimmen, interpretieren und damit argumentieren



Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Prof. Tegischer

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM
2) Gib im Feld „**Volltextsuche**" die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. A_263) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**" und „**GeoGebra**" erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**" erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln	**Weitere Regeln für Lehrpersonen**
▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen. ▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen. ▪ Sie dürfen mein Materialen **NICHT** gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden. ▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden. ▪ Bei einem **Missbrauch** erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.	**WICHTIGSTE REGEL:** LehrerInnen dürfen die Materialien in **Ihrem eigenen Unterricht** verwenden: ▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen. ▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben. ▪ Es ist **nicht erlaubt**, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben. ▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

B_P_5.2 Diskrete Zufallsvariable

1. Diskrete Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Verteilungsfunktion

Eine **diskrete Zufallsvariable X** ist eine Funktion, die jedem Elementarereignis aus dem Grundraum eine ganze Zahl zuordnet.

$$X: \Omega \to \mathbb{Z}$$

Video

Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung f** gibt die Wahrscheinlichkeit P an, mit der die Zufallsvariable X den Wert $k \in \mathbb{Z}$ annimmt.

$$f: \mathbb{Z} \to [0; 1] \quad mit\ f(k) = P(X = k)$$

Sprechweise: f gibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable X an.

Musterbeispiel 1: Ein Würfel wird zwei Mal geworfen. Der Grundraum Ω besteht aus allen Elementarereignissen (gesamt 36):

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), \dots, (6,6)\}$$

Schritt 1: Zufallsversuch & Grundraum

Der **Grundraum** entspricht der **Definitionsmenge** der **Zufallsvariable**

Die diskrete Zufallsvariable X ordnet jedem Elementarereignis die Summe der Augenzahlen zu. Bei zwei Würfen kann die Summe einen Wert zwischen 2 und 12 annehmen:

Schritt 2: Was soll die **diskrete Zufallsvariable** darstellen?
In diesem Beispiel: Summe der beiden Augenzahlen

Elementarereignisse	k Summe der Augenzahlen	$P(X = k)$
$(1,1)$	2	$P(X = 2) = \frac{1}{36} = 0{,}02\dot{7} = 2,\dot{7}\%$
$(1,2), (2,1)$	3	$P(X = 3) = \frac{2}{36} = 0{,}0\dot{5} = 5,\dot{5}\%$
$(1,3), (3,1), (2,2)$	4	$P(X = 4) = \frac{3}{36} = 0{,}08\dot{3} = 8,\dot{3}\%$
$(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)$	5	$P(X = 5) = \frac{4}{36} = 0,\dot{1} = 11,\dot{1}\%$
$(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)$	6	$P(X = 6) = \frac{5}{36} = 0{,}13\dot{8} = 13,\dot{8}\%$
$(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (4,3), (3,4)$	7	$P(X = 7) = \frac{6}{36} = 0{,}1\dot{6} = 16,\dot{6}\%$
$(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)$	8	$P(X = 8) = \frac{5}{36} = 0{,}13\dot{8} = 13,\dot{8}\%$
$(3,6), (6,3), (5,4), (4,5)$	9	$P(X = 9) = \frac{4}{36} = 0,\dot{1} = 11,\dot{1}\%$
$(4,6), (6,4), (5,5)$	10	$P(X = 10) = \frac{3}{36} = 0{,}08\dot{3} = 8,\dot{3}\%$
$(5,6), (6,5)$	11	$P(X = 11) = \frac{2}{36} = 0{,}0\dot{5} = 5,\dot{5}\%$
$(6,6)$	12	$P(X = 12) = \frac{1}{36} = 0{,}02\dot{7} = 2,\dot{7}\%$

Schritt 3: Berechnung der **Wahrscheinlichkeiten** und Bestimmung der Wahrscheinlichkeits-verteilung.

$$f: \Omega \to [0; 1]$$

$$f(k) = P(X = k)$$

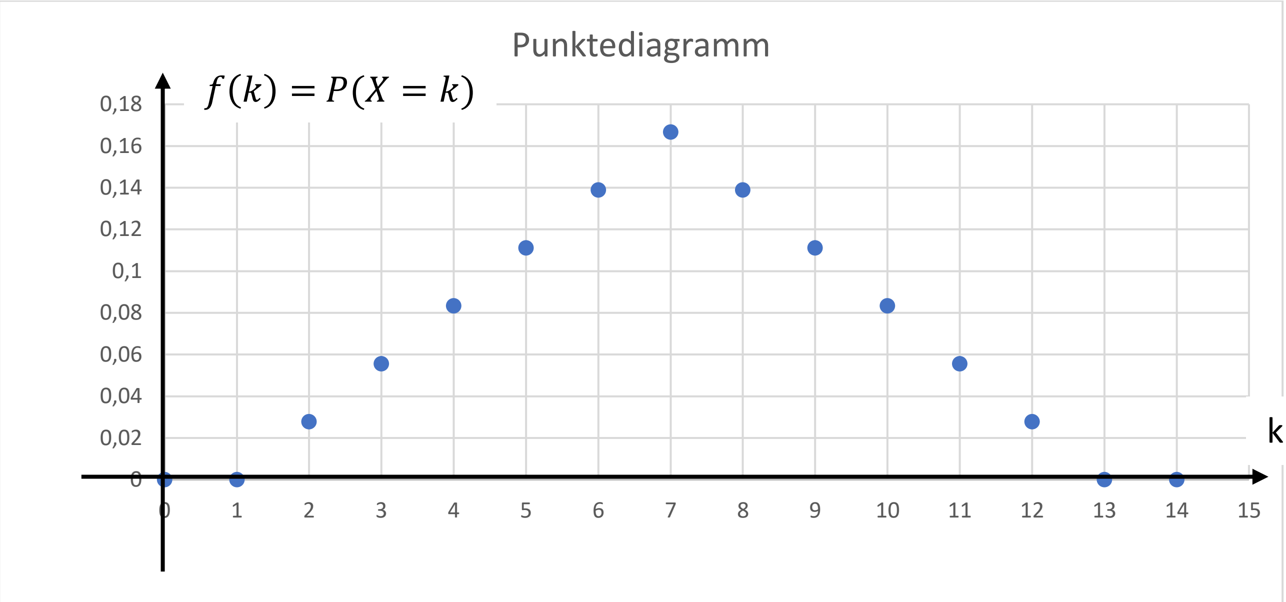
$$f(3) = P(X = 3) = 0{,}0\dot{5}$$

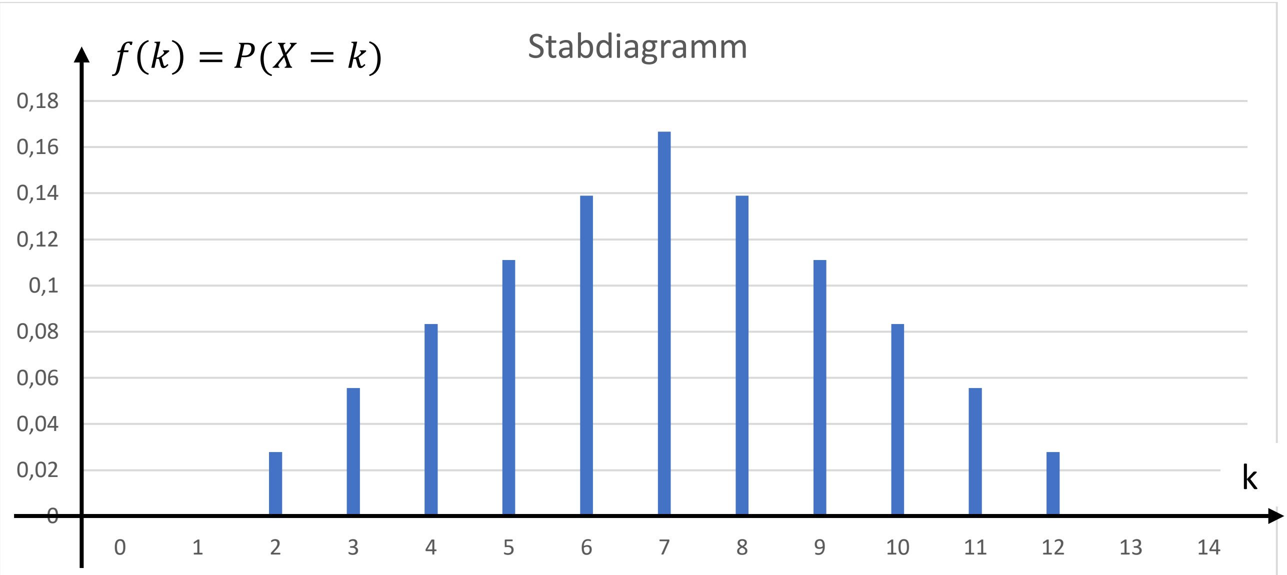
Meistens lässt man f weg:

$$P(X = 12) = 0{,}02\dot{7}$$

Bemerkung: Die Wahrscheinlichkeitsverteilung nimmt für alle anderen Zahlen, die nicht in der Wertemenge {2,3,4,5,...,12} liegen, den Wert 0 an. $\rightarrow P(X=1)=0$

Graphische Darstellung





<u>Mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung können weitere Berechnungen durchgeführt werden:</u>

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen kleiner als 5 ist?

Gesucht: $\boldsymbol{P(X<5)}$

$$\boldsymbol{P(X<5)} = P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}=\frac{6}{36}=0{,}1\dot{6}=16{,}\dot{6}\%$$

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen größer als 10 ist?

Gesucht: $\boldsymbol{P(X>10)}$

$$\boldsymbol{P(X > 10)} = P(X = 11) + P(X = 12) = \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = 0{,}08\dot{3} = 8,\dot{3}\%$$

Verteilungsfunktion:

Die Verteilungsfunktion F einer diskreten Zufallsvariable ordnet jedem $k \in \mathbb{Z}$ die Wahrscheinlichkeit zu, mit der die **Zufallsvariable X höchstens** den **Wert k** annimmt. $F: \mathbb{Z} \to [0;1]\ mit\ F(k) = P(X \leq k)$
Unterschied Wahrscheinlichkeitsverteilung f – Verteilungsfunktion F ▪ $f(3) = P(X = 3)$ … gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Zufallsvariable den Wert 3 einnimmt. ▪ $F(3) = P(X \leq 3)$ … gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Zufallsvariable höchstens den Wert 3 einnimmt.

Fortsetzung Musterbeispiel 1:

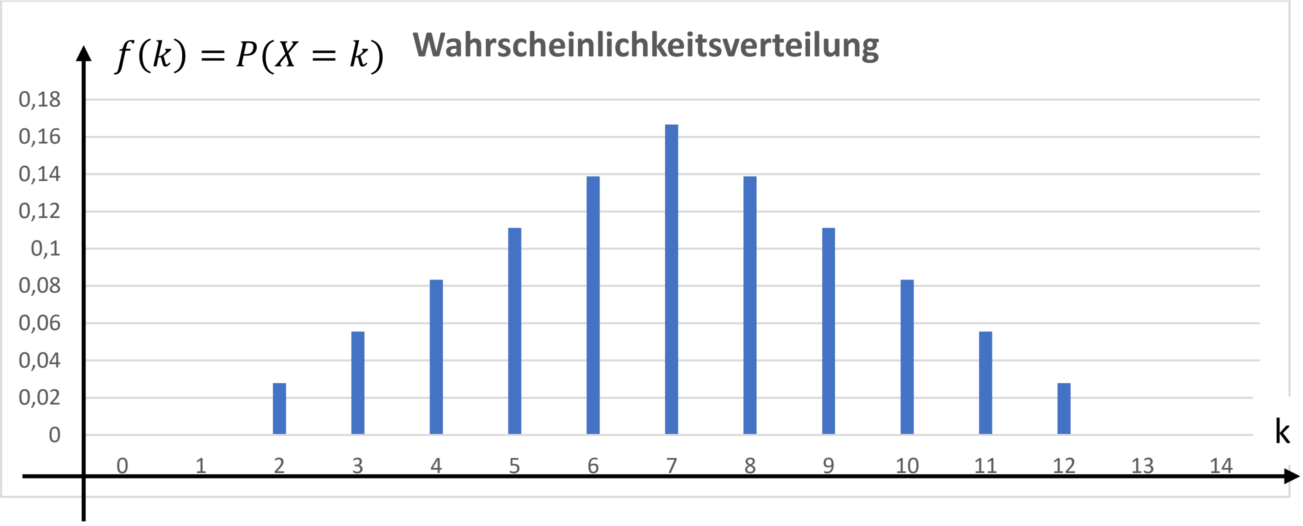
Bei der Verteilungsfunktion werden die Wahrscheinlichkeiten auf-addiert (je nach Wert):

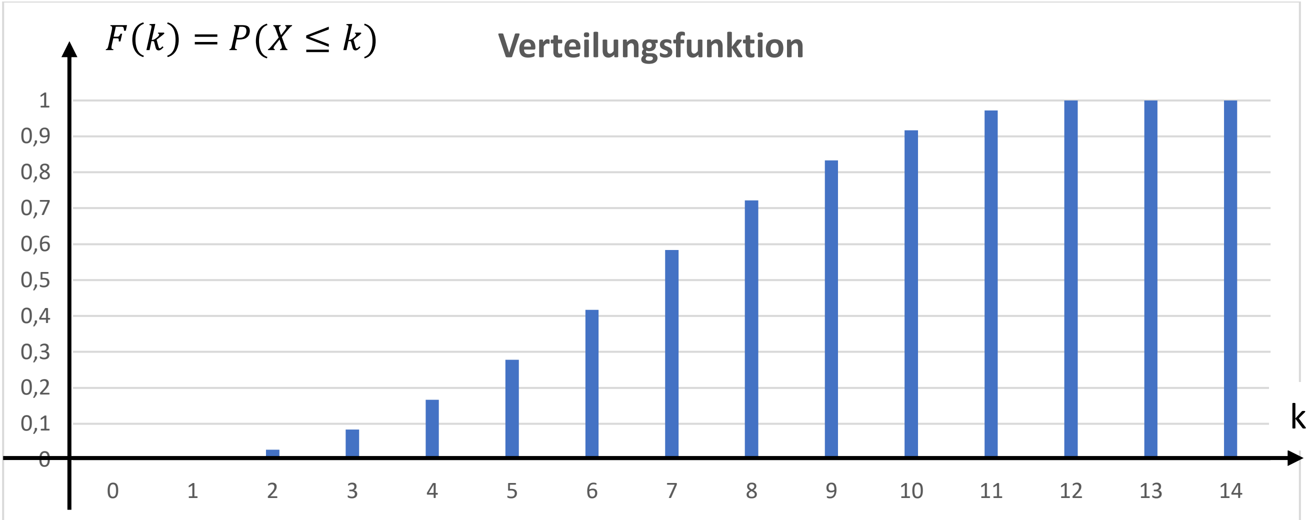
Elementarereignisse	k	**Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(X = k)$**	**Verteilungsfunktion $P(X \leq k)$**
(1,1)	2	$\frac{1}{36} = 0{,}02\dot{7} = 2,\dot{7}\%$	$P(X \leq 2) = 0{,}02\dot{7} = 2,\dot{7}\%$
(1,2), (2,1)	3	$\frac{2}{36} = 0{,}0\dot{5} = 5,\dot{5}\%$	$P(X \leq 3) = 0{,}08\dot{3} = 8,\dot{3}\%$
(1,3), (3,1), (2,2)	4	$\frac{3}{36} = 0{,}08\dot{3} = 8,\dot{3}\%$	$P(X \leq 4) = 0{,}1\dot{6} = 16,\dot{6}\%$
(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)	5	$\frac{4}{36} = 0,\dot{1} = 11,\dot{1}\%$	$P(X \leq 5) = 0{,}2\dot{7} = 27,\dot{7}\%$
(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)	6	$\frac{5}{36} = 0{,}13\dot{8} = 13,\dot{8}\%$	$P(X \leq 6) = 041\dot{6} = 41,\dot{6}\%$
(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (4,3), (3,4)	7	$\frac{6}{36} = 0{,}1\dot{6} = 16,\dot{6}\%$	$P(X \leq 7) = 0{,}58\dot{3} = 58,\dot{3}\%$
(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)	8	$\frac{5}{36} = 0{,}13\dot{8} = 13,\dot{8}\%$	$P(X \leq 8) = 0{,}7\dot{2} = 72,\dot{2}\%$
(3,6), (6,3), (5,4), (4,5)	9	$\frac{4}{36} = 0,\dot{1} = 11,\dot{1}\%$	$P(X \leq 9) = 0{,}8\dot{3} = 83,\dot{3}\%$
(4,6), (6,4), (5,5)	10	$\frac{3}{36} = 0{,}08\dot{3} = 8,\dot{3}\%$	$P(X \leq 10) = 0{,}91\dot{6}$ $= 91,\dot{6}\%$
(5,6), (6,5)	11	$\frac{2}{36} = 0{,}0\dot{5} = 5,\dot{5}\%$	$P(X \leq 11) = 0{,}97\dot{2}$ $= 97,\dot{2}\%$
(6,6)	12	$\frac{1}{36} = 0{,}02\dot{7} = 2,\dot{7}\%$	$P(X \leq 12) = 1 = 100\ \%$

Bemerkung – Rechenweg:

- $P(X \leq 3) = P(X = 2) + P(X = 3)$

- $P(X \leq 5) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$
- $P(X \leq 8) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8)$





Bei der Verteilungsfunktion werden die Wahrscheinlichkeiten auf-addiert.

Bsp. 1) Ein Würfel (1-6) wird geworfen. Die Zufallsvariable X gibt die Augenzahl an.

a. Welche Werte kann die Zufallsvariable X annehmen?
b. Erstelle die Tabelle für die Wahrscheinlichkeitsverteilung. Zeichne ein Stabdiagramm.
c. Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:
   (1) $P(X = 3)$ (2) $P(X \geq 2)$ (3) $P(X < 10)$ (4) $P(2 < X \leq 5)$
d. Erstelle eine Tabelle der Verteilungsfunktion. Stelle die Verteilungsfunktion graphisch als Stabdiagramm dar.

Bsp. 2) Eine Münze (Kopf, Zahl) wird vier Mal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl von Kopf an.

a. Welche Werte kann die Zufallsvariable X annehmen?
b. Erstelle mit Hilfe eines vereinfachten Baumdiagramms die Tabelle für die Wahrscheinlichkeitsverteilung. Zeichne ein Stabdiagramm.
   Bemerkung:
   - Für die Wahrscheinlichkeiten $P(X = 1)$ & $P(X = 3)$ gibt es jeweils 4 Pfade.
   - Für die Wahrscheinlichkeiten $P(X = 2)$ gibt es 6 Pfade.
c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Mal Kopf geworfen wird.

d. Berechne und interpretiere folgenden Ausdruck im gegebenen Kontext: $P(1 \leq X \leq 2)$
e. Erstelle eine Tabelle der Verteilungsfunktion. Stelle die Verteilungsfunktion graphisch als Stabdiagramm dar.

Bsp. 3) Ein Würfel (1-6) wird drei Mal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gewür Fünfer an.

Video

a. Welche Werte kann die Zufallsvariable X annehmen?
b. Erstelle mit Hilfe eines Baumdiagramms (Fünfer / Kein Fünfer) die Tabelle für die Wahrscheinlichkeitsverteilung. Zeichne ein Punktdiagramm.
c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Mal ein Fünfer gewürfelt wird.
d. Berechne und interpretiere folgenden Ausdruck im gegebenen Kontext: $P(X < 2)$

Bsp. 4) Ein Würfel (1-6) wird zwei Mal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt das Produkt der beiden Augenzahlen an.

a. Bestimme die Grundmenge Ω.
b. Bestimme die Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung und stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung graphisch dar.
c. Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:
(1) $P(X = 4)$ (2) $P(X \geq 15)$ (3) $P(X < 10)$ (4) $P(8 < X \leq 19)$

Bsp. 5) In einer Urne liegen Kugeln mit folgenden Nummernwerten: 12, 14, 16, 18

Es werden zwei Kugeln nacheinander (mit Zurücklegen) gezogen.

a. Die Zufallsvariable X gibt die Summe der Nummernwerte der Kugel an. Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung als Tabelle und graphisch als Diagramm dar.
b. Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:
(1) $P(X = 26)$ (2) $P(X \geq 35)$ (3) $P(X < 10)$ (4) $P(20 < X \leq 30)$
c. Bestimme die Werte der Verteilungsfunktion und stelle sie graphisch dar.

Bsp. 6) Am Strand haben von 20 ausgewählten Personen vier Personen die Sonnencreme zu Hause vergessen. Es werden von diesem Personenkreis drei verschiedene nach dem Zufallsprinzip ausgewählt. Die Zufallsvariable X gibt an, wie viele Menschen bei der Kontrolle eine Sonnencreme haben.

a. Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Hilfe einer Tabelle und graphisch als Punktdiagramm. Berechne die Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe eines Baumdiagramms.
b. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Personen eine Sonnencreme haben?

Brettspiel (B_288)

Bei einem Spiel gewinnt diejenige Person, die als erstes ein vorgegebenes Muster auf ihrem Spielbrett mit roten und grünen Farbsteinen ausgelegt hat.
Bei einem Spielzug wird zuerst mit 2 Zahlenwürfeln („normale" Würfeln mit den Augenzahlen 1 bis 6) geworfen. Die aus den Augenzahlen gebildete Summe (Augensumme) bestimmt, wie viele Farbsteine man auf das Spielbrett legen darf.
Anschließend wird für jeden zu legenden Farbstein die Farbe gewürfelt. Dazu wird ein spezieller Farbwürfel mit 4 grünen und 2 roten Seiten verwendet.
Ein Spielzug besteht daher aus dem Werfen der 2 Zahlenwürfel und dem darauffolgenden mehrmaligen Werfen des Farbwürfels.

a) Die Augensumme der beiden Zahlenwürfel kann als Zufallsvariable X betrachtet werden.

– Erstellen Sie eine Tabelle, in der man für alle möglichen Augensummen der beiden Würfel die jeweilige Wahrscheinlichkeit ablesen kann.

– Interpretieren Sie den Ausdruck $\sum_{i=2}^{12}(i \cdot P(X=i)) = 7$ im gegebenen Sachzusammenhang.

2. Erwartungswert, Standardabweichung und Varianz

Video

Wiederholung: Statistik

Datenreihe: $x_1, x_2, \dots, x_n$ (n-Elemente)

Arithmetischer Mittelwert (n Elemente): $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

Arithmetischer Mittelwert (n Elemente) bei k-verschiedenen Elementen mit den absoluten Häufigkeiten $H_1, H_2, \dots, H_k$:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot H_1 + x_2 \cdot H_2 + \cdots + x_K \cdot H_k}{n} = x_1 \cdot \frac{H_1}{n} + x_2 \cdot \frac{H_2}{n} + \cdots + x_k \cdot \frac{H_k}{n} = \boldsymbol{x_1 \cdot h_1 + x_2 \cdot h_2 + \cdots + x_k \cdot h_k}$$

Der arithmetische Mittelwert kann durch Umformen mit Hilfe der **relativen Häufigkeiten** dargestellt werden.

Bemerkung: Das Gesetz der großen Zahlen besagt, dass bei einer ausreichend großen Versuchsserie ($n \to \infty$) die relativen Häufigkeiten gegen die Wahrscheinlichkeit streben. Somit strebt auch der arithmetische Mittelwert der Versuchsserie gegen den Erwartungswert der Zufallsvariablen.

$$\bar{x} = \boldsymbol{x_1 \cdot h_1 + x_2 \cdot h_2 + \cdots + x_k \cdot h_k}$$

Für die **relativen Häufigkeiten** setzen wir nun die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k_i)$ ein. $x_1, \dots, x_n$ geben die Werte der Zufallsvariablen $k_1, \dots, k_n$ an.

Es gilt: Erwartungswert $E(X) = \mu = k_1 \cdot P(X = k_1) + k_2 \cdot P(X = k_2) + \cdots + k_n \cdot P(X = k_n)$

μ … griechischer Buchstaben „MÜ"

Analog gilt dies für die Varianz und Standardabweichung.
Bei einer sehr, sehr großen Versuchsreihe strebt die empirische Standardabweichung gegen die Standardabweichung der Zufallsvariable X (analog für empirische Varianz und Varianz).

- Varianz $V(X)$ der Zufallsvariable:

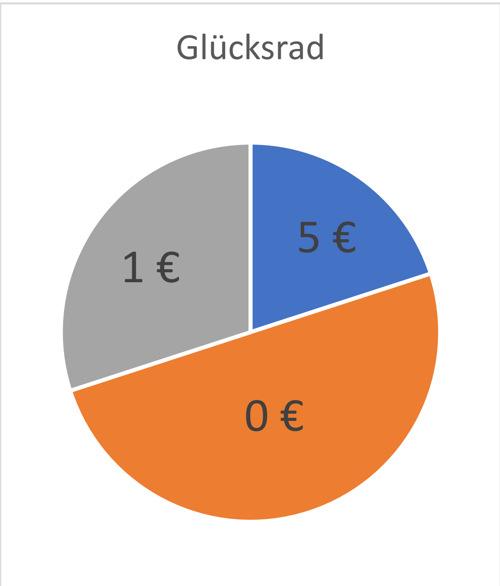
$$V(X) = \sigma^2 = (k_1 - \mu)^2 \cdot P(X = k_1) + (k_2 - \mu)^2 \cdot P(X = k_2) + \cdots + (k_n - \mu)^2 \cdot P(X = k_n)$$

- Die Zahl „SIGMA" $\sigma = \sqrt{V(X)}$ heißt Standardabweichung der Zufallsvariable X

Bemerkung:
- Die **Standardabweichung** gibt die **durchschnittliche Entfernung** vom **Erwartungswert E(X)** an.
- Die **Varianz** gibt die **quadrierte durchschnittliche Entfernung** vom **Erwartungswert E(X)** an.

Begriffe in der beschreibenden Statistik	Begriffe in der Wahrscheinlichkeitsrechnung
Relative Häufigkeit	Wahrscheinlichkeit
Variable – Merkmal	Zufallsvariable
Arithmetischer Mittelwert	Erwartungswert
Empirische Varianz	Varianz
Empirische Standardabweichung	Standardabweichung

Musterbeispiel: Bei einem Glücksrad beträgt der Einsatz pro Spiel 2 €. Martin versucht sein Glück:



Zu 50 % geht Martin leer aus (0 €), zu 30 % gewinnt er zumindest 1 € von seinem Einsatz zurück & zu 20 % bekommt er den Hauptgewinn: 5€.

Fragestellung 1: Berechne den Erwartungswert dieses Glücksrades. Die Zufallsvariable X nimmt dabei den Wert der Auszahlungsbetrages an (0, 1, 5).

Ist es ratsam, bei diesem Glücksspiel sein Glück zu versuchen?

- $P(X = 0) = 0{,}5$
- $P(X = 1) = 0{,}3$
- $P(X = 5) = 0{,}2$

$\mu = 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}2 = 1{,}3$

Der Erwartungswert beträgt 1,3.

Antwort: Im Durchschnitt gewinnt der Spieler 1,3 €. Nachdem der Einsatz 2 € beträgt, verliert er jedoch im Schnitt 70 Cent. Es ist nicht ratsam, dieses Glücksspiel zu spielen.

Bemerkung: Spiele, bei denen der Erwartungswert gleich dem Einsatz ist, werden als faire Spiele bezeichnet.

Fragestellung 2: Berechne die Varianz und die Standardverteilung.

$$V(X) = (0 - 1{,}3)^2 \cdot 0{,}5 + (1 - 1{,}3)^2 \cdot 0{,}3 + (5 - 1{,}3)^2 \cdot 0{,}2$$
$$V(X) = 0{,}845 + 0{,}027 + 2{,}738 = 3{,}61$$
$$\sigma = \sqrt{3{,}61} = 1{,}9$$

Bsp. 7) Ein zehnseitiger Würfel mit den Augenzahlen 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4 wird einmal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt die Augenzahl an.

a. Ermittle die Wahrscheinlichkeitsverteilung.
b. Berechne den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung der Zufallsvariable X.

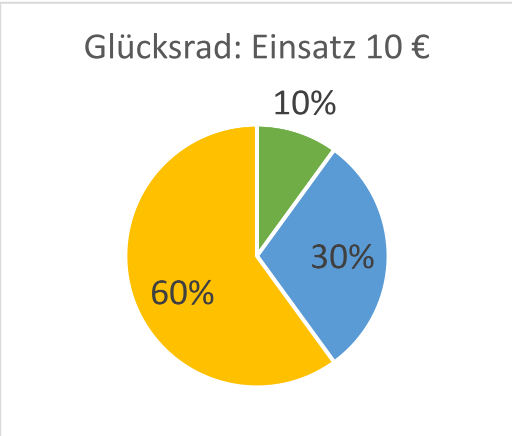
Bsp. 8) Im Casino erhältst du beim Spiel Roulette für das richtige Setzen einer Farbe (Schwarz/Rot) den doppelten Betrag zurück. Robin setzt 20 € auf die Farbe Schwarz. Die Zufallsvariable X gibt den Auszahlungsbetrag an.

a. Vervollständige die Tabelle:

Zufallsvariable	**Wahrscheinlichkeit**
Robin verliert: $X = 0$	
Robin gewinnt: $X = 40$	

b. Berechne den Erwartungswert der Zufallsvariable X. Interpretiere im gegebenen Sachzusammenhang.

Bsp. 9a) Bei einem Glücksrad kann man auf folgende Farben setzen: Der Einsatz beträgt 10€. Die Zufallsvariable X gibt den Gewinn beim Drehen des Glücksrades an.



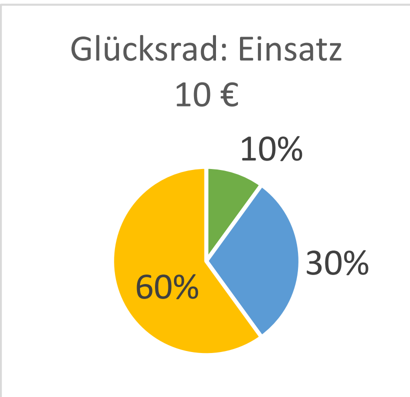
Zu 60 % geht man beim Glücksrad leer aus. Zu 30 % erhält man 15 €. Zu 10 % erhält der Spieler 30 €.

a. Berechne den **Erwartungswert** dieses Glücksrades. Die Zufallsvariable X nimmt dabei den Wert des Gewinns an (0, 15, 30).
Ist es ratsam, bei diesem Glücksspiel zu spielen?

b. Berechne die Varianz und Standardabweichung der Zufallsvariable X.

Bsp. 9b) Bei einem weiteren Glücksrad sind die **Gewinnmöglichkeiten** deutlich anders:

Zu 60 % geht man bei diesem Glücksrad leer aus. Zu 30 % erhält man 1 €. Zu 10 % erhält der Spieler 120 €.



a. Berechne den **Erwartungswert** dieses Glücksrades. Die Zufallsvariable X nimmt dabei den Wert des Gewinns an (0, 1, 120).
Vergleiche den Erwartungswert mit dem ersten Glücksrad aus Aufgabe 24a. Ist es sinnvoll, hier sein Glück zu versuchen? Welches Risiko besteht?

b. Berechne die Varianz und Standardabweichung der Zufallsvariable X. Interpretiere diese Werte mit dem vorherigen Glücksrad.

Bsp. 10) Bei einer Verlosung werden 15 000 Lose zu je 5 € verkauft. Der Slogan dieser Verlosung ist *„man gewinnt mit jedem Los einen Geldbetrag – deine Chance auf 10 000€"*. Ein Mathematiker ist skeptisch und hat sich die Details der Verlosung genauer angeschaut. Folgende Informationen hat er von den Initiatoren bekommen:

Im **Lostopf** gewinnt man mit…

- 8000 Losen 1 €,
- 6000 Losen 2 €,
- 500 Losen 5 €,
- 499 Losen 10 €,
- und einem einzigen Los: 10 000 €.

Berechne den **Erwartungswert** der Zufallsvariable X (X gibt den Auszahlungsbetrag an).

Interpretiere den Erwartungswert im gegebenen Sachzusammenhang. Gib ein **Kommentar** zum Slogan ab.

Bsp. 11) Bei einem Glücksrad gewinnt man mit einer Wahrscheinlichkeit von…

- 50 %: 0 €
- 30 %: 5 €
- 20 %: 15 €

Fragestellung: Wie groß darf der Einsatz maximal sein, dass das Glücksrad für einen Spieler / eine Spielerin vorteilhaft ist?

Bsp. 12) Bei einem weiteren Glücksrad gewinnt man mit einer Wahrscheinlichkeit von…

- 20 %: 1 €
- 30 %: 2 €
- 50 %: x €

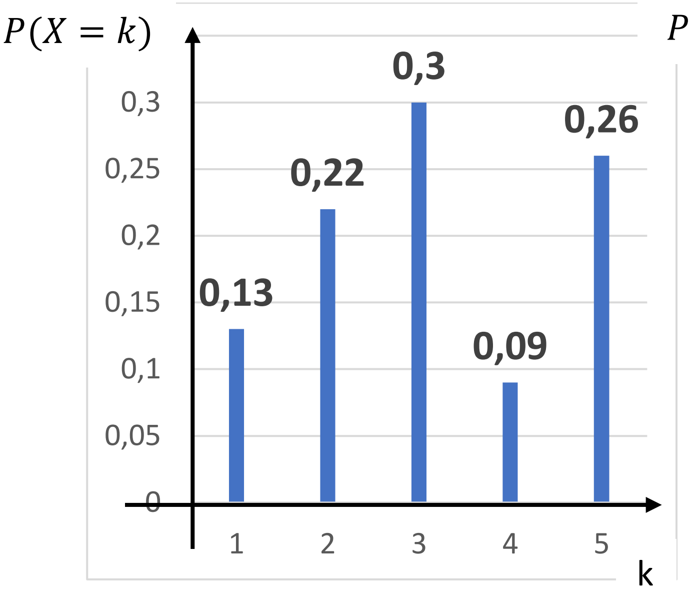
Fragestellung: Der Einsatz beträgt 3€. Wie groß muss die Variable x sein, dass das Glücksrad für den Spieler / die Spielerin vorteilhaft ist?

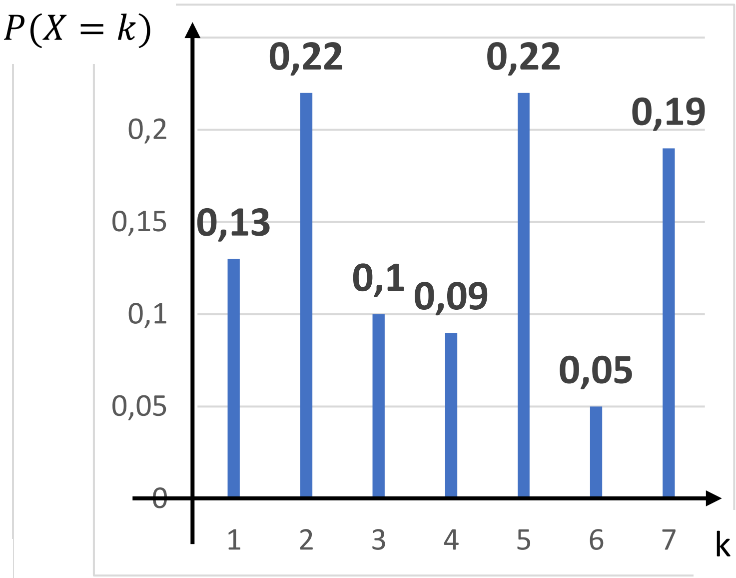
Bsp. 13) Die Seitenflächen eines Würfels sind mit 2, 6, 9, 14, 18 und x beschriftet. Die sechste Seitenfläche ist leider bedeckt und somit unbekannt.

Die Zufallsvariable X gibt die Augenzahl des Würfels an.

a. Es ist bekannt, dass der Erwartungswert des Würfels 15 ist. Welche Zahl muss somit auf der verdeckten Seitenfläche stehen?
b. Berechne anschließend die Varianz und die Standardabweichung der Zufallsvariable X.

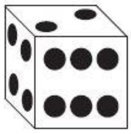
Bsp. 14) Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariable X. Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsvariable X.





Brettspiele * (B_257)

Beim Würfeln mit einem fairen Spielwürfel treten die Augenzahlen 1 bis 6 jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf.



b) Bei einem Brettspiel wird mit einem fairen Spielwürfel gewürfelt und man rückt mit der Spielfigur so viele Felder vor, wie die gewürfelte Augenzahl angibt. Würfelt man im ersten Wurf einen Sechser, so würfelt man ein zweites Mal und rückt die dabei gewürfelte Augenzahl zusätzlich vor.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Felder, die man vorrücken darf.

- Stellen Sie eine Tabelle auf, der man alle möglichen Werte dieser Zufallsvariablen X und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten entnehmen kann.
- Berechnen Sie den Erwartungswert von X.
- Interpretieren Sie die Bedeutung des Erwartungswertes in diesem Sachzusammenhang.

Gummibärchen ziehen * (B_354)

Gummibärchen werden in unterschiedlichen Farben hergestellt.

c) Eine kleine Packung Gummibärchen enthält 5 rote Gummibärchen und je 1 grünes, 1 gelbes und 1 weißes Gummibärchen. Es wird ein Gummibärchen nach dem anderen zufällig aus der Packung genommen und nicht wieder zurückgelegt. Dieser Vorgang wird so lange wiederholt, bis ein rotes Gummibärchen gezogen wird.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der benötigten Züge, bis ein rotes Gummibärchen gezogen wird.

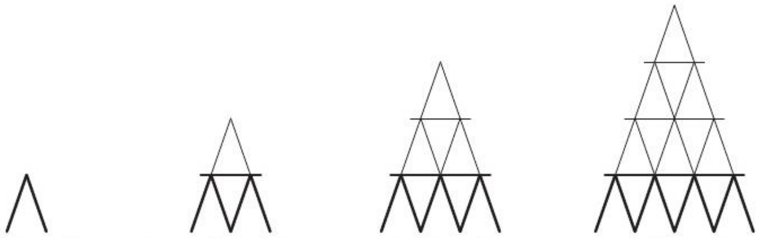
- Erstellen Sie eine Tabelle, der man die möglichen Werte dieser Zufallsvariablen X und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten entnehmen kann.
- Berechnen Sie den Erwartungswert von X.
- Interpretieren Sie die Bedeutung des Erwartungswertes im gegebenen Sachzusammenhang.

Kartenhaus * (B_520)

Aus Spielkarten kann man ein Kartenhaus bauen (siehe nebenstehendes Foto).

Bildquelle: https://pixabay.com/de/kartenhaus-zerbrechlich-geduld-763246/ [02.10.2019].

In der nachstehenden Abbildung sind Kartenhäuser, die aus einer unterschiedlichen Anzahl von Stockwerken bestehen, in der Ansicht von vorne skizziert.



1-stöckiges Haus 2-stöckiges Haus 3-stöckiges Haus 4-stöckiges Haus

c) Bei einem Glücksspiel wird ein Kartenspiel mit 32 Karten verwendet, das genau 4 Asse enthält. Bryan zieht zufällig und ohne hinzusehen 1 Karte. Ist die gezogene Karte ein Ass, so gewinnt er € 20. Ist die gezogene Karte kein Ass, so verliert er € 5.

Die Zufallsvariable X gibt den Gewinn bei diesem Spiel in € an.

1) Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

2) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Münzen (2) * (B_493)

c) In einer Geldbörse sind 5 Ein-Euro-Münzen und 7 Zwei-Euro-Münzen. Dorian zieht nacheinander und ohne Zurücklegen 2 zufällig ausgewählte Münzen.

Die Zufallsvariable X gibt diejenigen Geldbeträge an, die Dorian erhalten kann.
$P(X = x_i)$ ist die Wahrscheinlichkeit, genau den Geldbetrag x_i zu erhalten.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle für das oben beschriebene Zufallsexperiment.

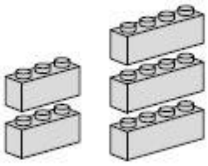
x_i			
$P(X = x_i)$			

2) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

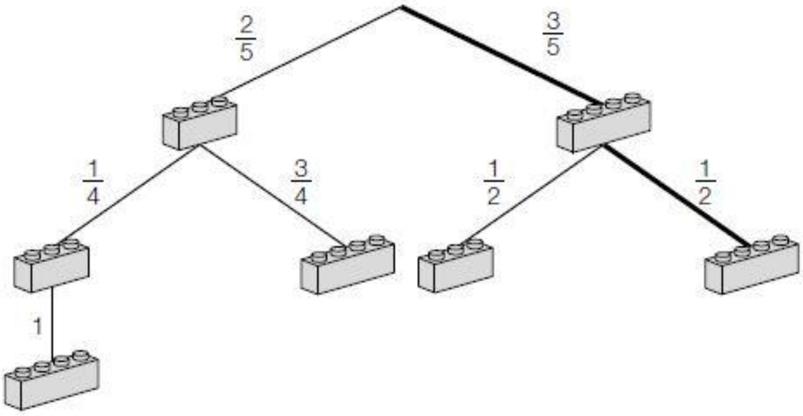
Lego * (B_409)

Legosteine sind Bausteine aus Kunststoff, die von einem dänischen Unternehmen produziert werden.

c) Tobias spielt mit 5 Legosteinen: 2 Steine mit 3 Noppen in einer Reihe und 3 Steine mit 4 Noppen in einer Reihe (siehe nachstehende Abbildung).



Er zieht zufällig (also ohne die Anzahl der Noppen zu sehen oder zu ertasten) einen Legostein nach dem anderen und legt sie aneinander. Er zieht so lange, bis die entstehende Mauer mindestens 7 Noppen lang ist.
Das nachstehende Baumdiagramm zeigt seine möglichen Züge und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.



– Beschreiben Sie, welches Ereignis E durch den fett gezeichneten Pfad beschrieben wird.

Die Zufallsvariable X beschreibt die gesamte Anzahl der Noppen in der Mauer.

– Bestimmen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten mithilfe des Baumdiagramms und tragen Sie diese in der nachstehenden Tabelle ein.

x_i	7	8	10
$P(X = x_i)$			

Die Zufallsvariable Y beschreibt die Anzahl der Züge, die Tobias benötigt, um eine Mauer mit mindestens 7 Noppen zu erhalten.

– Berechnen Sie den Erwartungswert dieser Zufallsvariablen Y.

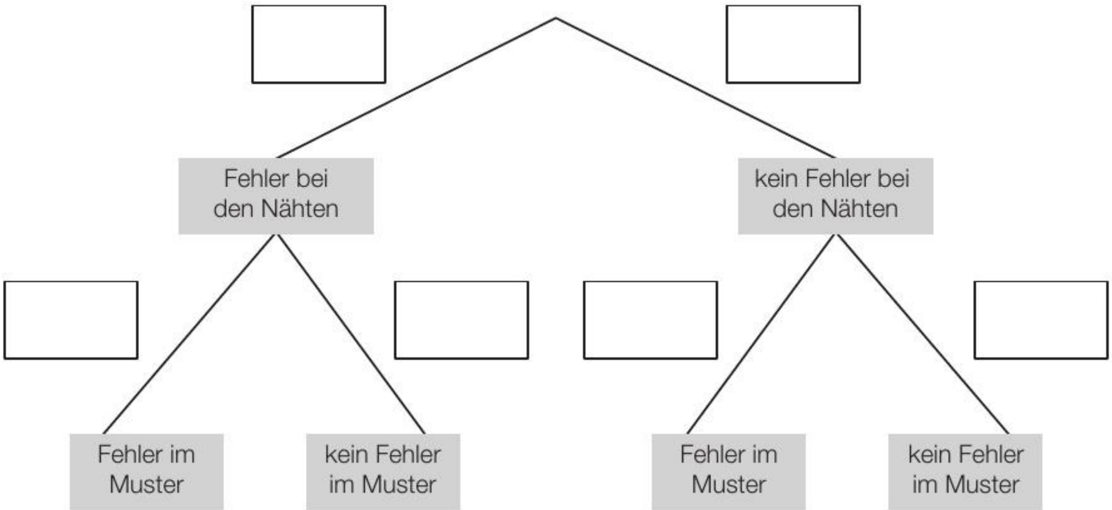
Regenschirm * (B_181)

c) Für einen Kunsthandwerksmarkt werden Regenschirme angefertigt.

Bei der Herstellung der Regenschirme treten unabhängig voneinander 2 Arten von Fehlern auf. Man weiß aus Erfahrung:

- Bei durchschnittlich 1 von 5 Regenschirmen treten Fehler bei den Nähten auf.
- Bei durchschnittlich 30 % der Regenschirme treten Fehler im Muster auf.

1) Ergänzen Sie die Wahrscheinlichkeiten im nachstehenden Baumdiagramm.



Regenschirme, die beide Fehler aufweisen („III. Wahl"), werden um € 2 pro Stück verkauft.
Regenschirme, die nur einen von beiden Fehlern aufweisen („II. Wahl"), werden um € 15 pro Stück verkauft.
Regenschirme, die keinen Fehler aufweisen („I. Wahl"), werden um € 30 pro Stück verkauft.

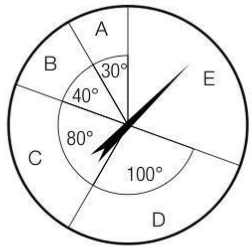
2) Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle.

	I. Wahl	II. Wahl	III. Wahl
Einnahmen pro Regenschirm in Euro	30	15	2
Wahrscheinlichkeit			

3) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Einnahmen pro verkauftem Regenschirm.

Spielshow * (B_574)

a) Ein Glücksrad ist in die Sektoren A, B, C, D und E unterteilt. In der Mitte des Glücksrads ist ein drehbarer Zeiger montiert, der im Rahmen einer Spielshow gedreht wird. (Siehe nebenstehende Abbildung.)



Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger des Glücksrads nach einer Drehung auf einen bestimmten Sektor zeigt, ist direkt proportional zum Winkel des jeweiligen Sektors.

Zeigt der Zeiger auf den Sektor A, so werden 10 Punkte gewonnen.
Zeigt der Zeiger auf den Sektor B, so werden 16 Punkte gewonnen.
Zeigt der Zeiger auf den Sektor C, so werden 20 Punkte gewonnen.
Zeigt der Zeiger auf den Sektor D, so werden 25 Punkte gewonnen.
Zeigt der Zeiger auf den Sektor E, so werden 31 Punkte verloren.

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl derjenigen Punkte, die nach einmaligem Drehen des Zeigers gewonnen bzw. verloren werden.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle durch Eintragen der fehlenden Wahrscheinlichkeiten.

Sektor	A	B	C	D	E
x_i	10	16	20	25	–31
$P(X = x_i)$					

2) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.
3) Interpretieren Sie den Erwartungswert von X im gegebenen Sachzusammenhang.

Sportgeschäft (B_263)

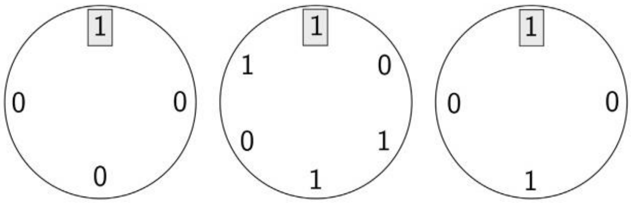
d) Als Werbestrategie wird den Besuchern ein Gewinnspiel angeboten. Jeder Besucher darf mit einem fairen Spielwürfel, bei dem die Augenzahlen 1 bis 6 mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten, einmal würfeln. Zeigt der Würfel die Augenzahl 6, gewinnt man einen 10-Euro-Gutschein, bei der Augenzahl 5 gewinnt man einen 5-Euro-Gutschein. Bei jeder anderen Augenzahl gewinnt man nichts.

– Berechnen Sie den Erwartungswert des Gewinns eines Besuchers.
– Interpretieren Sie die Bedeutung des Erwartungswerts im gegebenen Sachzusammenhang.

Vergnügungspark (4) (B_293)

Ein neuer Vergnügungspark wird geplant.

c) Im Vergnügungspark wird es einen Glücksspielautomaten mit den 3 nachstehend dargestellten Rädern geben.



Wirft man eine 1-Euro-Münze ein, drehen sich die Räder unabhängig voneinander und kommen nach einer kurzen Zeit zum Stillstand, wobei pro Rad genau eine zufällige Zahl sichtbar ist. Die Zufallsvariable X bezeichnet die Anzahl der sichtbaren Einsen auf den 3 Rädern.

– Ordnen Sie den beiden Wahrscheinlichkeiten jeweils die passende Berechnung aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$P(X = 1)$	
$P(X \geq 1)$	

A	$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
B	$1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
C	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
D	$1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$

Erscheint auf allen 3 Rädern die Zahl 1, so ist der Gewinn G = € 5. Erscheint auf allen 3 Rädern die Zahl 0, so ist der Gewinn G = € 2. Bei allen anderen Resultaten verfällt der Einsatz, also G = € –1.

– Berechnen Sie den zu erwartenden Gewinn für diesen Glücksspielautomaten.

Weihnachtsmarkt * (B_479)

d) Jemand beobachtete auf dem Weihnachtsmarkt das Kaufverhalten und bestimmte die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

Anzahl *n* der Marmeladegläser	Wahrscheinlichkeit für den Kauf von *n* Marmeladegläsern pro Person
0	0,24
1	0,38
2	0,16
3	0,12
4	
≥ 5	0

1) Vervollständigen Sie die obige Tabelle durch Eintragen des fehlenden Wertes.

2) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der gekauften Marmeladegläser pro Person.

Würfelspass * (B_499)

Würfelspaß ist ein Spiel, das mit herkömmlichen fairen Spielwürfeln gespielt wird, bei denen die Augenzahlen 1 bis 6 jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit als Würfelergebnis auftreten.
Die Spieler/innen müssen Aufträge erfüllen.

b) Auftrag „Nur nicht 2“:
Es werden 5 Würfel gleichzeitig geworfen. Zeigt dabei kein einziger Würfel die Augenzahl 2, so erhält man 10 Punkte. Für jeden Würfel, der die Augenzahl 2 zeigt, werden 2 Punkte von diesen maximal erreichbaren 10 Punkten abgezogen.

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Würfel, die dabei die Augenzahl 2 zeigen.

In der nachstehenden Tabelle sollen die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X und die Anzahl der jeweils erreichten Punkte dargestellt werden.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$ (gerundete Werte)	0,4019	0,4019		0,0322	0,0032	0,0001
erreichte Punkte				4		

1) Vervollständigen Sie in der obigen Tabelle die Zeile „erreichte Punkte“.

2) Ergänzen Sie in der obigen Tabelle die fehlende Wahrscheinlichkeit.

3) Bestimmen Sie den Erwartungswert für diejenige Zufallsvariable, die die Anzahl der erreichten Punkte beschreibt.