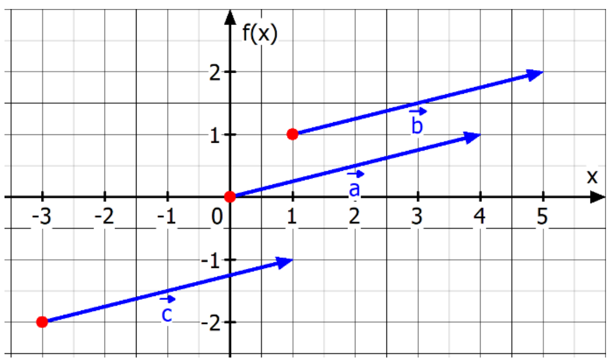
2.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Maturaskript BHS – Teil B (12 Seiten)

Cluster: BAfEP/BASOP/BRP

Grundkompetenzen:

- **B_P_2.1** Vektoren in $\mathbb{R}^2$ verstehen und anwenden



Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Prof. πegischer

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM
2) Gib im Feld „**Volltextsuche**" die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. A_263) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**" und „**GeoGebra**" erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**" erstellt.

Lizenzbedingungen:

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

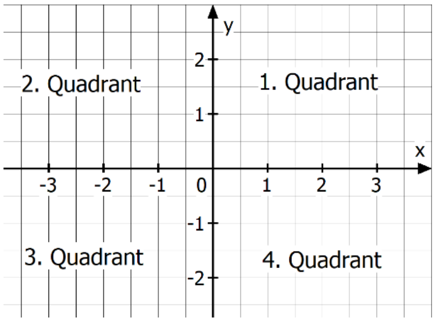
B_P_2.1 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Video 1

1. Grundlagen

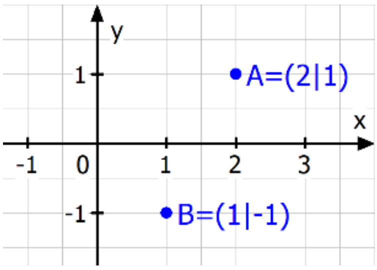
Für die Vektorrechnung sind Koordinatensysteme essenziell. Im zweidimensionalen Raum besitzt ein Koordinatensystem 2 Achsen:

- die x-Achse (waagrecht) und
- die y-Achse (senkrecht)



Diese sind unendlich lang und spannen die vier sogenannten Quadranten auf. Die rechte Graphik zeigt die Positionen der Quadranten. Beim Schnittpunkt der beiden Achsen liegt der Ursprung mit den Koordinaten (0|0).

Im dreidimensionalen Raum kommt eine dritte Achse - die z-Achse - dazu. Punkte und Vektoren besitzen dementsprechend dann auch 3 Koordinaten. Dies kann man – theoretisch bis ins n-dimensionale weiterführen.



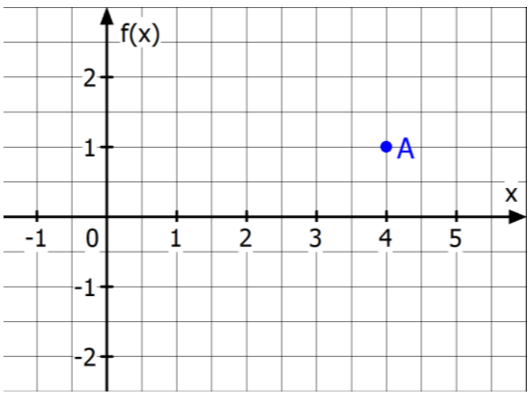
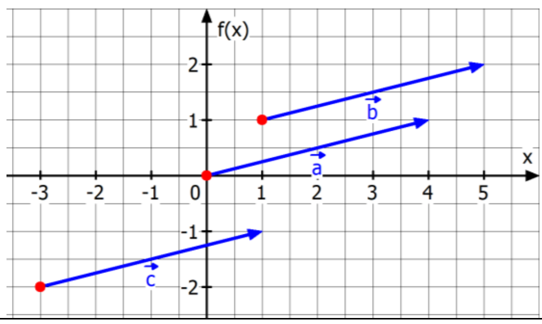
Punkte:

In ein Koordinatensystem lassen sich Punkte eintragen. Diese besitzen, entsprechend ihrer Lage, Koordinaten. Im Bild z.B. haben wir die Punkte A und B, wobei sich A im ersten Quadranten befindet und B im vierten Quadranten. Man schreibt: $A = (2|3)\ bzw.$
$B = (1|-2)$.

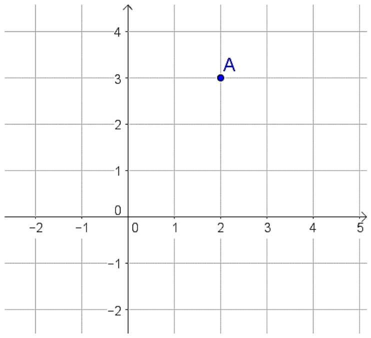
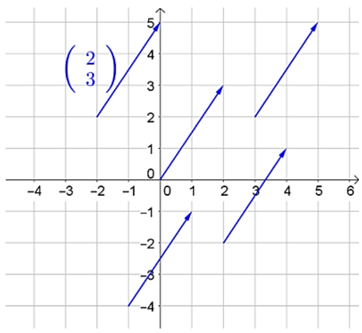
> Einen allgemeinen Punkt schreibt man an als $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x_1}|\boldsymbol{x_2}|\ldots|\boldsymbol{x_n})$ (im n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$) bzw.
> $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$ (im 2-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$) oder $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z})$ (im 3-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$).
> Die erste Koordinate entspricht der x-Koordinate, die zweite der y-Koordinate, die eventuelle dritte der z-Koordinate.
>
> **Punkte werden immer mit Großbuchstaben angegeben!!**

1.1 Geometrische Darstellung von Vektoren

Vektoren wurden in der Unterstufe bereits als **Punkte** in ein Koordinatensystem eingezeichnet. Jedoch kann ein **Vektor** auch als **Pfeil** interpretiert werden. Einem Vektor kann man somit genau einen Punkt oder unendlich viele, gleich lange, parallele Pfeile mit gleicher Orientierung zuordnen.

Vektor als **Punkt** $A = (4|1)$	Vektor als **Pfeil** $\vec{a} = \binom{4}{1}$
Der Vektor gibt dabei die x- und y-Koordinaten des Punktes an. 	▪ Die **x-Koordinate** gibt an, um wie viele Einheiten man sich parallel zur x-Achse bewegt . ❖ Positive x-Koordinate: nach rechts ❖ Negative x-Koordinate: nach links ▪ Die **y-Koordinate** gibt an, um wie viele Einheiten man sich parallel zur y-Achse bewegt. ❖ Positive y-Koordinate: nach oben ❖ Negative y-Koordinate: nach unten 
!! **Großbuchstabe** !!	!! **Kleinbuchstabe** mit einem **Pfeil** !!
Die Darstellung als **Punkt** ist **eindeutig**! Einem Zahlenpaar (=Vektor) entspricht genau ein Punkt!	Die Darstellung als **Pfeil** ist **nicht eindeutig**! Es gibt **unendlich viele Pfeile**, die denselben Vektor darstellen. Diese Pfeile sind aber alle parallel, gleich lang und gleich gerichtet.

Beispiel: Darstellung des Vektors $\vec{v} = \binom{2}{3}$

Darstellung als Punkt $A = (2\|3)$	Mögliche Pfeildarstellungen (unendlich viele!)
	

Definition (Vektor)

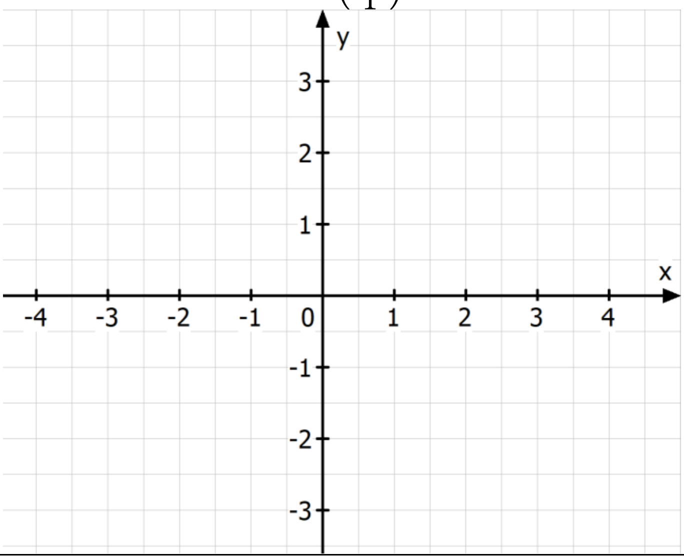
- Ein **Zahlenpaar** $\vec{v} = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ wird als **Vektor** aus $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.
- Analog bezeichnet man ein **Zahlentripel** $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ als **Vektor** aus $\mathbb{R}^3$.
- Ein all**gemeiner Vektor** wird $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ geschrieben.

Vektoren können in **Spaltenform** oder in **Zeilenform** angeschrieben werden.

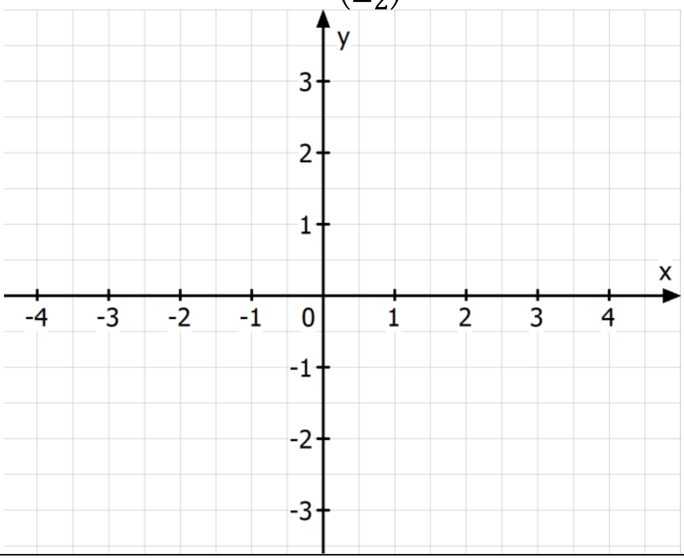
$$\vec{a} = \binom{3}{2} = (3|2) \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1|2|3)$$

Bsp. 1) Zeichne jeweils vier verschiedene Pfeildarstellungen des gegebenen Vektors.

$\vec{a} = \binom{-2}{1}$

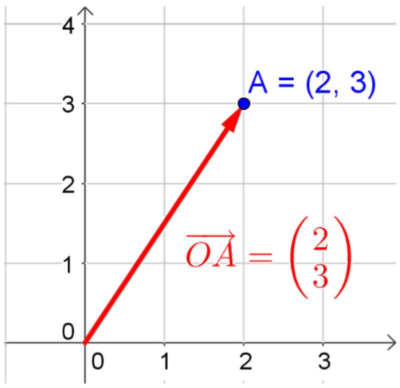


$\vec{b} = \binom{2}{-2}$



1.2 ORTSVEKTOR:

Der **Ortsvektor** von einem Punkt ist der Vektor, der vom **Ursprung** aus auf den **Punkt** zeigt. Sei $A(x_1|x_2|..|x_n)$ ein Punkt der Dimension n, dann ist $\overline{OA} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ dessen Ortsvektor.

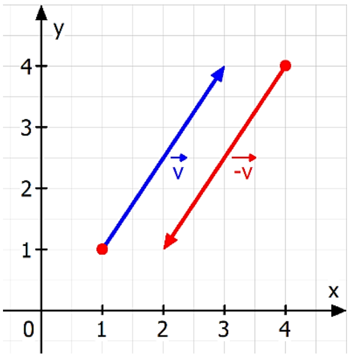


1.3 Gegenvektor und Nullvektor

Wenn ein Vektor $\vec{v}$ gegeben ist, so bezeichnet man den entgegengesetzten Vektor als **Gegenvektor** $-\vec{v}$.

Beispiel: $\vec{v} = \binom{2}{3} \rightarrow -\vec{v} = \binom{-2}{-3}$

Addiert man einen Vektor mit seinem Gegenvektor, dann erhält man den Nullvektor $\vec{v} = \binom{0}{0}$. Vektor und Gegenvektor heben einander auf!!!



Bsp. 2) Gib den Gegenvektor an.

$\vec{a} = \binom{-2}{5} \rightarrow -\vec{a} =$	$\vec{b} = \binom{12}{-3} \rightarrow -\vec{b} =$	$\vec{c} = \binom{-14}{-14} \rightarrow$
$\vec{d} = \binom{8}{9} \rightarrow$	$\vec{e} = \binom{-4}{-4} \rightarrow$	$\vec{f} = \binom{102}{-103} \rightarrow$

2. Rechnen mit Vektoren

2.1 Addition und Subtraktion von Vektoren

Video 2

Seien $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ *und* $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ Vektoren aus dem $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}\backslash\{0\})$. Wenn du Vektoren addieren oder subtrahieren möchtest, musst du dazu die entsprechenden Koordinaten addieren:

$$\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \pm y_1 \\ x_2 \pm y_2 \\ \dots \\ x_n \pm y_n \end{pmatrix}$$

Wichtig ist dabei, dass die Vektoren, die du **addieren** oder **subtrahieren** möchtest, **derselben Dimension n** angehören! D.h. sie haben gleich viele Koordinaten.

Dimension $n = 2$: Addition/Subtraktion im $\mathbb{R}^2$:

Seien $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$ und $\vec{b} = \binom{b_1}{b_2}$ zwei Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$, dann gilt:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \binom{a_1}{a_2} + \binom{b_1}{b_2} = \binom{a_1 + b_1}{a_2 + b_2} \qquad \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \binom{a_1}{a_2} - \binom{b_1}{b_2} = \binom{a_1 - b_1}{a_2 - b_2}$$

Bsp. 3) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \binom{3}{2}, \vec{b} = \binom{-3}{-2}, \vec{c} = \binom{13}{-12}, \vec{d} = \binom{-7}{6}$ *und* $\vec{e} = \binom{-4}{-4}$. Berechne.

$\vec{a} + \vec{b} =$	$\vec{a} - \vec{c} =$	$\vec{b} + \vec{e} =$
$\vec{d} - \vec{a} =$	$\vec{b} - \vec{d} =$	$\vec{c} - \vec{d} =$
$\vec{e} - \vec{a} =$	$\vec{c} + \vec{a} =$	$\vec{b} - \vec{a} =$

Bsp. 4) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} -11 \\ 22 \\ -13 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{e} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$. Berechne.

$\vec{a} + \vec{b} =$	$\vec{a} - \vec{c} =$	$\vec{b} + \vec{e} =$
$\vec{d} - \vec{a} =$	$\vec{b} - \vec{d} =$	$\vec{c} - \vec{d} =$
$\vec{e} - \vec{a} =$	$\vec{c} + \vec{a} =$	$\vec{b} - \vec{a} =$

2.2 PRODUKT EINES VEKTORS MIT EINEM SKALAR

Es seien $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ ein **Vektor** aus dem $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}\backslash\{0\})$ und k eine **reelle Zahl**. Wenn man einen Vektor $\vec{x}$ mit einer reellen Zahl k , einem sogenannten "**Skalar**", multipliziert, werden dabei die einzelnen Koordinaten mit dem Skalar multipliziert:

$$k \cdot \vec{v} = k \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x_1 \\ k \cdot x_2 \\ \dots \\ k \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Bsp. 5) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \binom{3}{2}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$. Berechne.

$2 \cdot \vec{a} =$	$-3 \cdot \vec{a} =$	$10 \cdot \vec{a} =$
$4 \cdot \vec{b} =$	$-0{,}5 \cdot \vec{b} =$	$100 \cdot \vec{b} =$
$0{,}1 \cdot \vec{c} =$	$1{,}5 \cdot \vec{c} =$	$5 \cdot \vec{c} =$

2.3 PRODUKT ZWEIER VEKTOREN (=SKALARPRODUKT)

Seien $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ Vektoren aus dem $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}\backslash\{0\})$. Das Produkt zweier Vektoren nennt man **Skalarprodukt**:

$$\boldsymbol{\vec{x}} \cdot \boldsymbol{\vec{y}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathrm{x}_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$$

Das **Ergebnis** der **Multiplikation** zweier Vektoren **ist KEIN Vektor**, sondern eine **reelle Zahl** (=Skalar).

Dimension $n = 2$: Skalarprodukt

Seien $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$ und $\vec{b} = \binom{b_1}{b_2}$ zwei Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$, dann gilt:

$$\boldsymbol{\vec{a}} \cdot \boldsymbol{\vec{b}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Bsp. 6) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \binom{3}{2}, \vec{b} = \binom{-3}{-2}, \vec{c} = \binom{13}{-12}, \vec{d} = \binom{-7}{6}$ und $\vec{e} = \binom{-4}{-4}$. Berechne.

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$	$\vec{a} \cdot \vec{c} =$	$\vec{b} \cdot \vec{e} =$
$\vec{d} \cdot \vec{a} =$	$\vec{b} \cdot \vec{d} =$	$\vec{c} \cdot \vec{d} =$

Bsp. 7) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bilde das Skalarprodukt.

Anwendung des Skalarprodukts: Menge mal Preis

Beispiel: Acht Jugendliche kaufen sich je ein Getränk um 2,50€. Alle bis auf zwei kaufen auch je eine Portion Pommes um 4,20€. Berechne den Gesamtpreis auf zwei Arten:

Darstellung mit einer Tabelle

	Anzahl	Stückpreis	Gesamt
Getränke	8	2,50	20,00
Pommes	6	4,20	25,20
		Summe	45,20

Darstellung mit Vektoren

Fasse die gekauften Stückzahlen in einem Anzahlvektor $\vec{a}$ und die Preise in einem Stückpreisvektor $\vec{p}$ zusammen.

- ➔ Die 1. Komponente bezieht sich auf die Getränke
- ➔ Die 2. Komponente bezieht sich auf die Pommes

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{p} = \begin{pmatrix} 2{,}50 \\ 4{,}20 \end{pmatrix}$$

Berechnung mit dem **Skalarprodukt**:

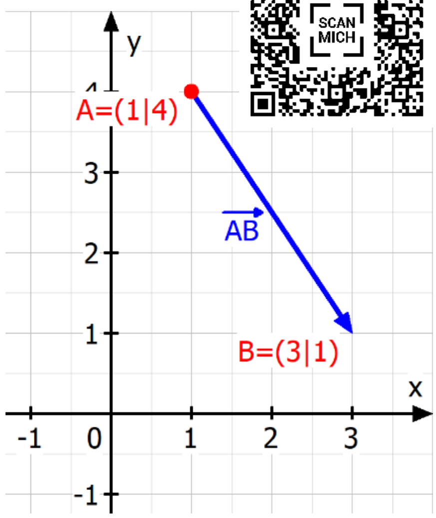
$$\vec{a} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2{,}50 \\ 4{,}20 \end{pmatrix} = 8 \cdot 2{,}50 + 6 \cdot 4{,}20 = 45{,}20€$$

Der Gesamtpreis für Hamburger und Getränke beträgt 45,20 €.

Geometrische Interpretation von Vektoren im $\mathbb{R}^2$

2.1 Berechnen eines Vektors mit Anfangspunkt und Endpunkt

Video



Zwischen **zwei Punkten** kann ein verbindender **Vektor** bestimmt werden. Dies funktioniert mit Hilfe der „**Spitze MINUS Schaft**"-Regel. Dabei möchten wir den Vektor $\overrightarrow{AB}$ bestimmen, der vom Punkt A nach B geht. Der Punkt $B = (3|1)$ entspricht dabei der Spitze (=Endpunkt), der Punkt $A = (1|4)$ dem Schaft (=Anfangspunkt).

Vektor = Endpunkt – Anfangspunkt

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\overrightarrow{BA}$ ist der **Gegenvektor** von $\overrightarrow{AB}$, d.h. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

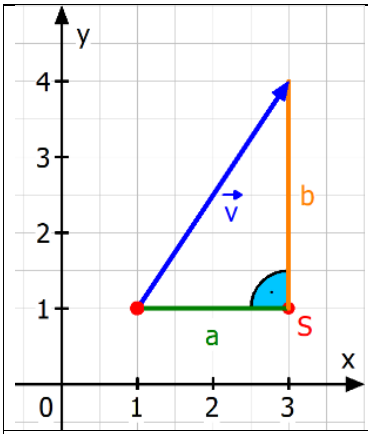
Bemerkung: Genau genommen sind bei dieser Berechnung A und B keine Punkte, sondern die Ortsvektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$, da eine Subtraktion zweier Punkte keinen „Sinn" ergeben würde. Zur Vereinfachung schreiben wir jedoch nur B – A.

Bsp. 8) Gegeben sind die Punkte $A = \binom{3}{2}, B = \binom{-3}{-2}, C = \binom{13}{-12}, D = \binom{-7}{6}$ und $E = \binom{-4}{-4}$. Berechne die Vektoren.

$\overrightarrow{AB} =$	$\overrightarrow{AD} =$	$\overrightarrow{EC} =$
$\overrightarrow{CD} =$	$\overrightarrow{BE} =$	$\overrightarrow{DB} =$

2.2 Betrag eines Vektors (= Länge eines Vektors)

Mit Hilfe von Vektoren kann der Abstand zwischen zwei Punkten berechnet werden. Der Abstand zwischen diesen beiden Punkten entspricht der Länge des zugehörigen Vektors (=Betrag des Vektors):



Unter dem **Betrag eines Vektors** versteht man die **Länge** des **zugehörigen Pfeiles**. Dieser wird mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes berechnet. Es sei $\vec{v} = \binom{a}{b}$ ein Vektor aus dem $\mathbb{R}^2$, dann gilt für seinen Betrag:

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Beispiel: $\vec{v} = \binom{2}{3} \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} \approx 3{,}61$

Für einen **allgemeinen** Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ wird der Betrag analog berechnet: $|\vec{v}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

Bsp. 9) Gegeben sind die Punkte $A = \binom{4}{-2}, B = \binom{5}{2}, C = \binom{1}{7}, D = \binom{3}{-6}$ und $E = \binom{-14}{-14}$. Berechne den Betrag.

$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert =$	$\lvert\overrightarrow{AD}\rvert =$	$\lvert\overrightarrow{EC}\rvert =$
$\lvert\overrightarrow{CD}\rvert =$	$\lvert\overrightarrow{BE}\rvert =$	$\lvert\overrightarrow{DB}\rvert =$

Video

2.3 ADDITION – GEOMETRISCHE INTERPRETATION

Die Addition zweier Vektoren kann auf zwei verschiedene Arten geometrisch gedeutet werden. Anhand des Beispiels $\binom{1}{2}+\binom{2}{2}=\binom{3}{4}$ werden beide Optionen gezeigt:

<table>
<tr><th>Addition von Punkt UND Pfeil</th><th>Addition von Pfeil UND Pfeil</th></tr>
<tr><td>

$\binom{1}{2}+\binom{2}{2}$

PUNKT   PFEIL

An einem Punkt wird ein Pfeil angehängt. In unserem Beispiel wird an den Punkt $(1|2)$ ein Pfeil mit der Richtung $\binom{2}{2}$ angehängt.
Das **Ergebnis** der **Addition** ist der **Punkt** am Ende des **Pfeils** $(3|4)$.

ERGEBNIS = PUNKT

</td><td>

$\binom{1}{2}+\binom{2}{2}$

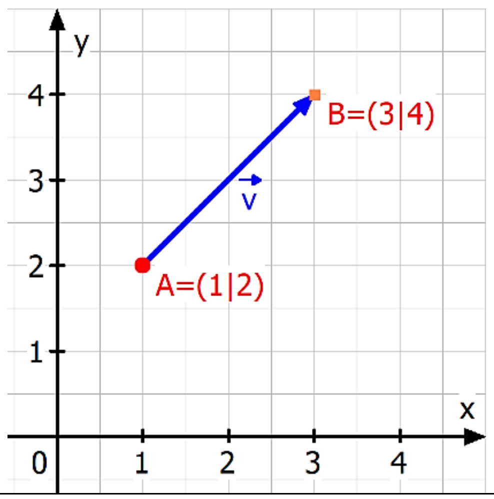
PFEIL   PFEIL

Zwei Pfeile werden aneinandergehängt. In unserem Beispiel wird also ein Pfeil mit der Richtung $\binom{1}{2}$ und ein Pfeil mit der Richtung $\binom{2}{2}$ aneinandergehängt. (beliebiger Startpunkt)
Das **Ergebnis** der Addition ist der **entstehende Verbindungspfeil** mit der Richtung $\binom{3}{4}$ – vom Schaft des ersten Pfeils bis zur Spitze des zweiten Pfeils.

ERGEBNIS = PFEIL

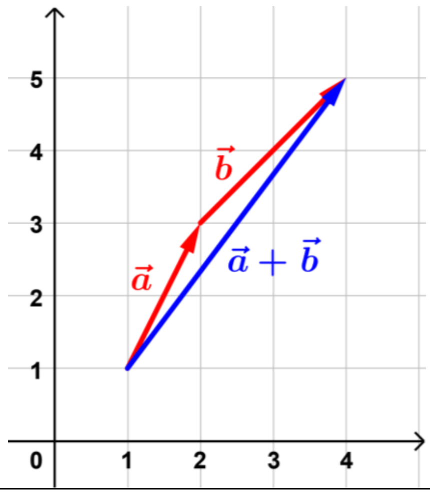
</td></tr>
<tr><td>

$A=\binom{1}{2}, \vec{v}=\binom{2}{2}, B=\binom{3}{4}$



</td><td>

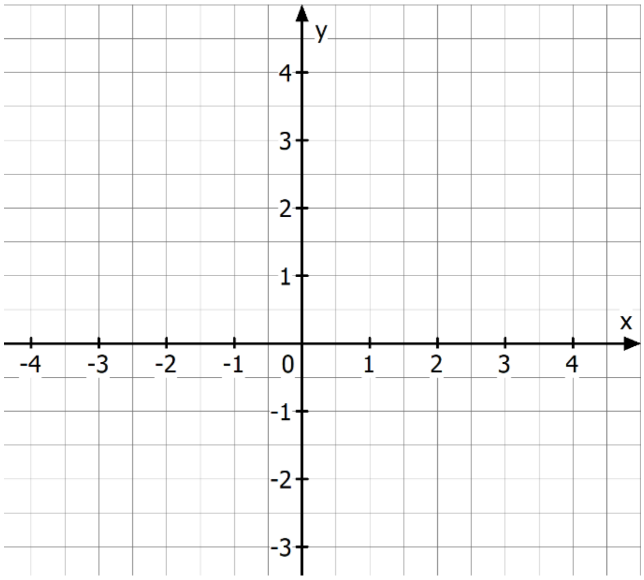
$\vec{a}=\binom{1}{2}, \vec{b}=\binom{2}{2}, \vec{v}=\binom{3}{4}$



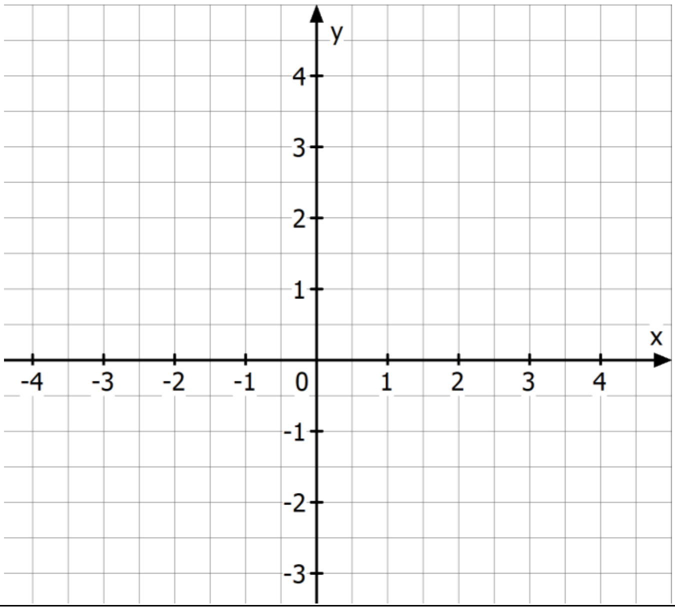
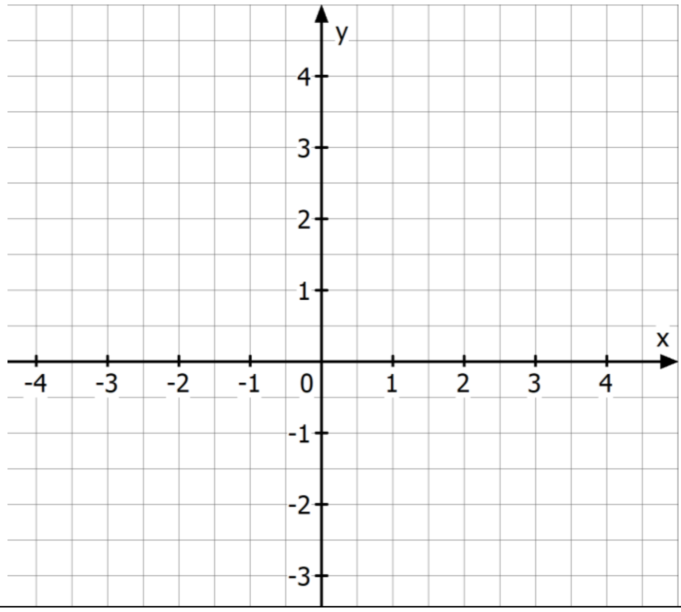
</td></tr>
</table>

Bsp. 10) Addiere die Vektoren geometrisch als **Addition** von **Punkt** und **Pfeil.** Gib die Koordinaten des Endpunktes an B_1 bzw. B_2 an. Kontrolliere rechnerisch.

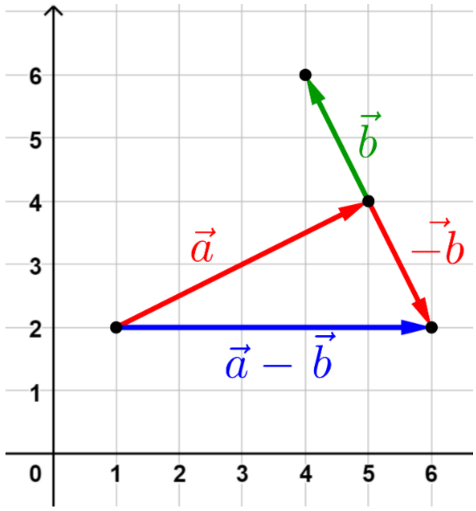
a. $A_1=(-3|-2), v_1=\binom{6}{-1}$	b. $A_2=(4|4), v_2=\binom{-5}{-5}$



Bsp. 11) Addiere die Vektoren geometrisch als **Addition** von **Pfeil** und **Pfeil.** Starte beim Punkt P und gib den entstehenden Vektor an.

$P = (-3\|-2), \vec{a} = \binom{5}{1}, \vec{b} = \binom{2}{4}, \vec{v} = ?$ 	$P = (4\|4), \vec{a} = \binom{-8}{-2}, \vec{b} = \binom{2}{-5}, \vec{v} = ?$ 

2.4 Subtraktion – Geometrische Interpretation



Die Subtraktion zweier Vektoren funktioniert analog zur Addition, jedoch wendet man folgenden Trick an:

$$\vec{a} = \binom{4}{2}, \vec{b} = \binom{-1}{2}$$

Beispiel: $\binom{4}{2} - \binom{-1}{2} = ?$

Man verwandelt die **Subtraktion** in eine **Addition**:

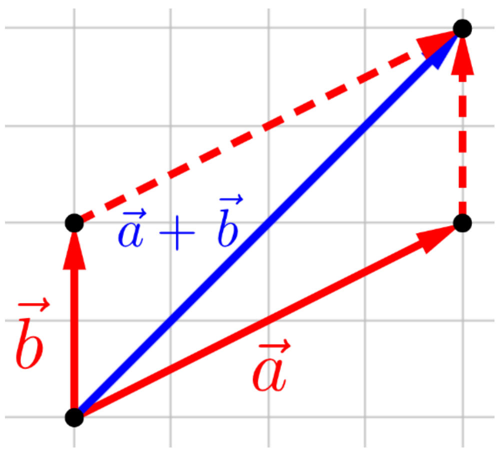
$$\vec{a} - \vec{b} = \binom{4}{2} + \left(-\binom{-1}{2}\right) = \binom{4}{2} + \binom{1}{-2} = \binom{5}{0}$$

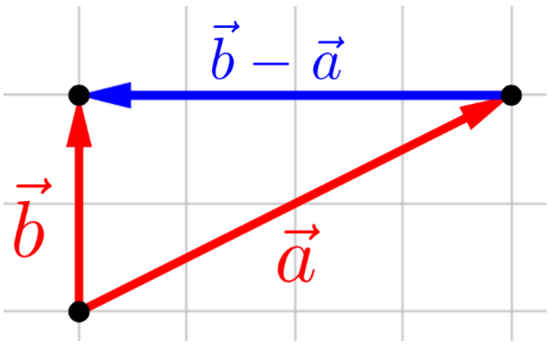
D.h. die Vorzeichen des 2.Vektors werden vertauscht (=Gegenvektor), sodass eine Vektoraddition entsteht.

Kurz gesagt: Die Subtraktion kann als Addition mit dem Gegenvektor dargestellt werden!!

2.5 Parallelogrammregel

Die Summe $\vec{a} + \vec{b}$ entspricht dem vom gemeinsamen Anfangspunkt ausgehenden Pfeil der Diagonale des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

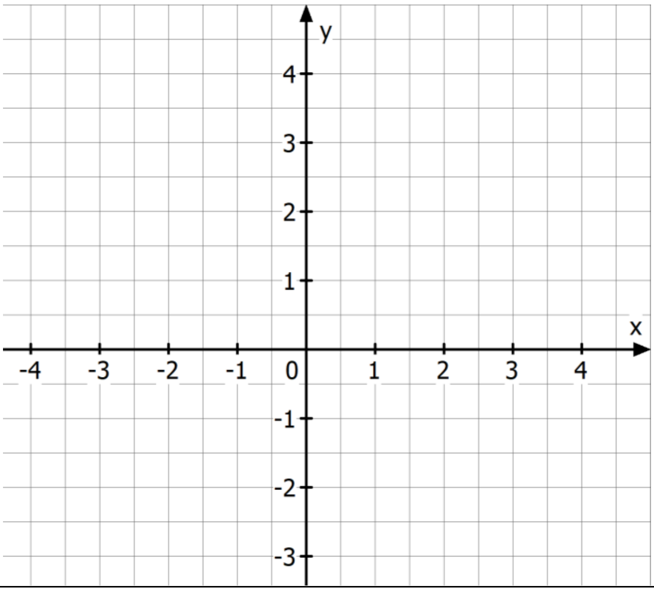
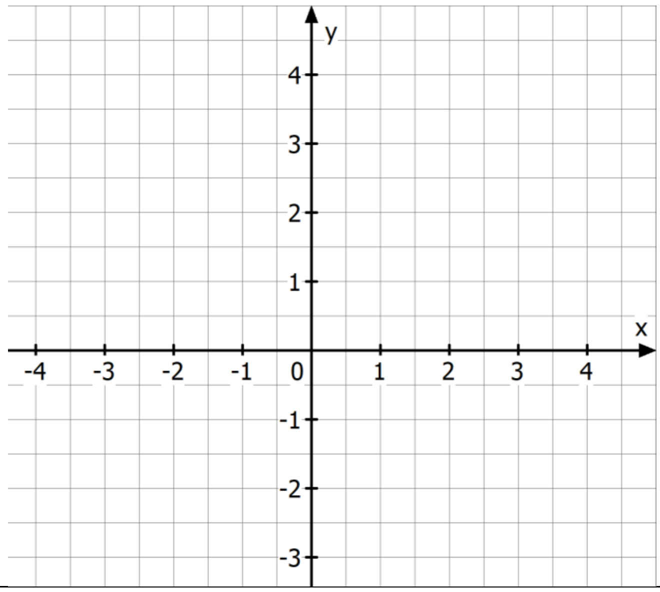




2.6 DIFFERENZREGEL

Die Differenz $\vec{b} - \vec{a}$ entspricht dem Pfeil vom Endpunkt von $\vec{a}$ zum Endpunkt von $\vec{b}$.

Bsp. 12) Subtrahiere die Vektoren $\vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{b}}$ geometrisch. Kontrolliere rechnerisch. **Interpretiere dein Ergebnis als Pfeil**.

$P = (-1\|-2), \vec{a} = \binom{3}{4}, \vec{b} = \binom{2}{1}, \vec{v} = ?$	$P = (4\|4), \vec{a} = \binom{-5}{-3}, \vec{b} = \binom{2}{3}, \vec{v} = ?$
	

2.7 MULTIPLIZIEREN MIT EINEM SKALAR

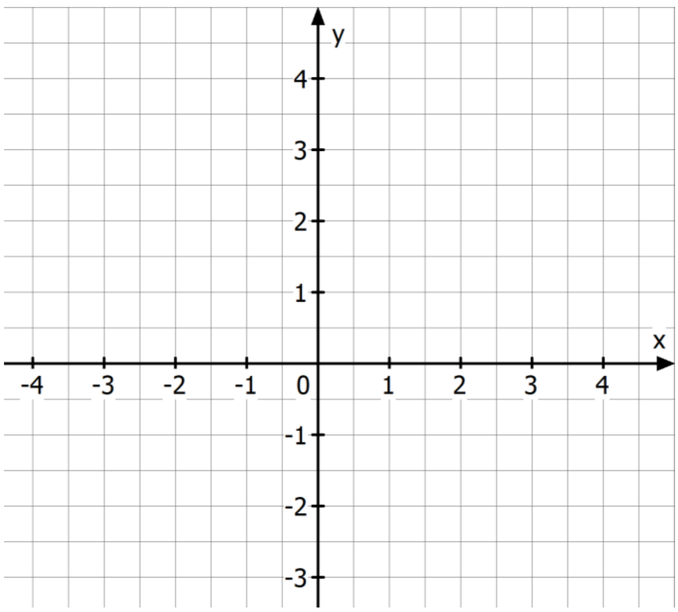
Eine Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl r (Skalar) entspricht einer **Streckung** (für $|r| > 1$) bzw. einer **Stauchung** (für $|r| < 1$) des zugehörigen Pfeiles.

Ist das **Vorzeichen** des Skalars **negativ**, so dreht sich die **Richtung** des **Pfeils** in die **entgegengesetzte Richtung**.

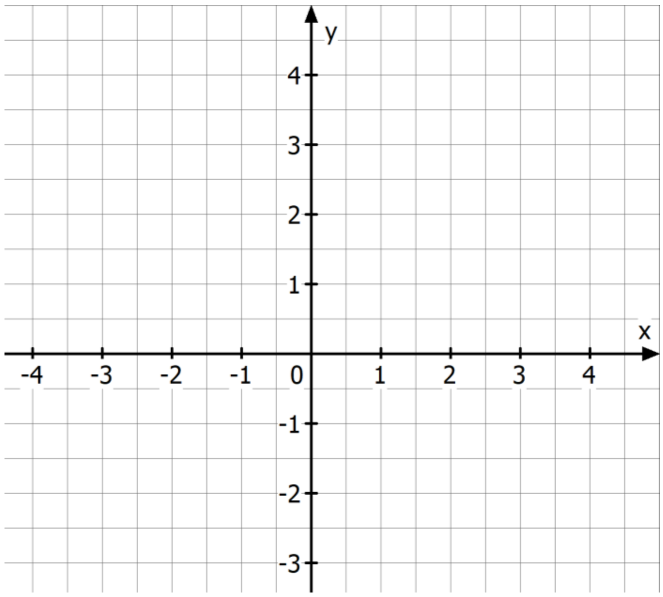
$Vektor\ \vec{a} = \binom{4}{2}$: $\quad 2 \cdot \vec{a} = \binom{8}{4} \quad oder \quad 0{,}5 \cdot \vec{a} = \binom{2}{1}$

Bsp. 13) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \binom{3}{2}, \vec{b} = \binom{-2}{1}, \vec{c} = \binom{12}{-12}, \vec{d} = \binom{1}{1}$ und $P = (3|1)$. Stelle die Rechnungen **geometrisch** dar.

$P + \vec{d} + 2 \cdot \vec{b} - 0{,}5 \cdot \vec{a}$



$P - \frac{1}{6} \cdot \vec{c} - 3 \cdot \vec{d} - 2 \cdot \vec{b}$



Auf der Baustelle (B_333)

Zur Bewegung von Lasten werden auf einer Baustelle verschiedene Hilfsmittel eingesetzt.

a) Mithilfe einer nahezu reibungsfreien festen Seilrolle soll eine Palette hochgehoben werden (siehe Abb. 1).
Auf das Seil wirkt eine Kraft von $F = 1{,}5$ kN unter einem Winkel $\alpha = 35°$.

– Beschriften Sie in Abb. 2 die Kräfte in der Skizze mit $\vec{F}_G$, $\vec{F}$ und $\vec{R}$, wobei $\vec{R}$ die Resultierende ist, die auf die Seilrolle wirkt.
– Berechnen Sie den Betrag der resultierenden Kraft $\vec{R}$.

Abb. 1

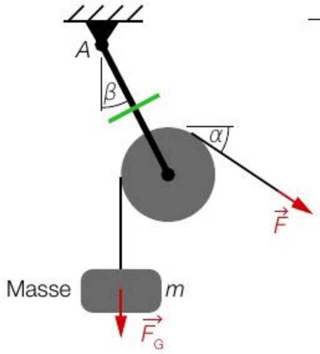
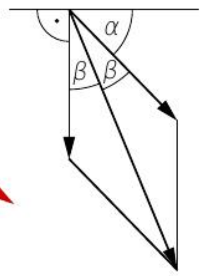


Abb. 2

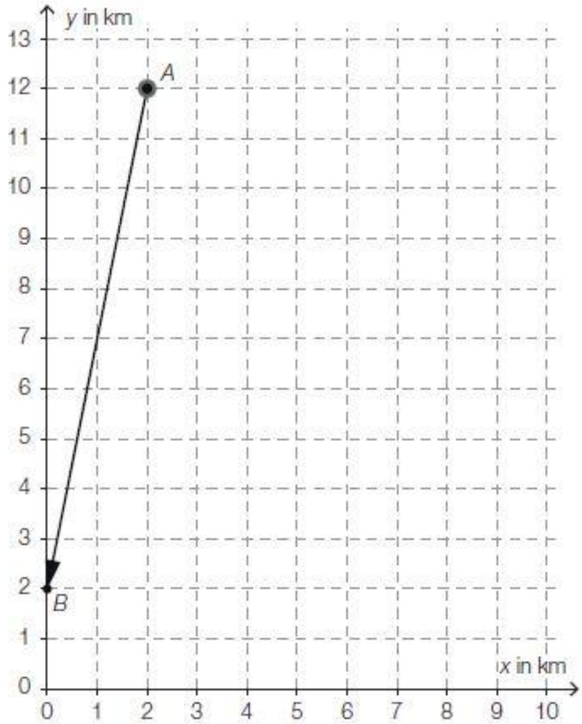


Fahrradrennen (B_251)

Es findet ein Fahrradrennen statt.

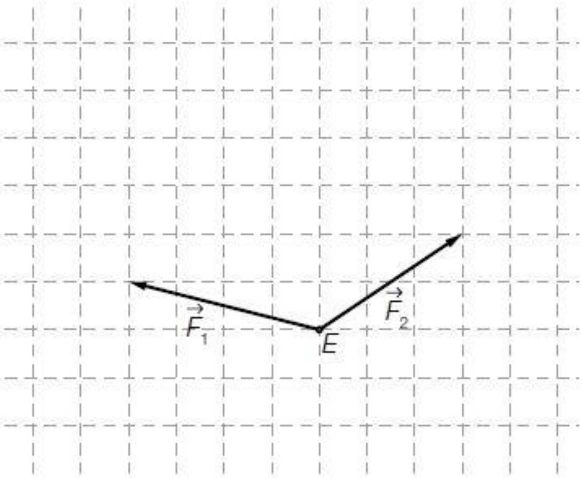
a) Die Rennstrecke führt geradlinig von A über B nach C. C hat die Koordinaten $(8|y_0)$. Die Richtung von B nach C ist durch den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ gegeben.

– Berechnen Sie die Länge des Weges von A nach B.
– Zeichnen Sie den Punkt C in die nebenstehende Grafik ein.
– Beschreiben Sie, was mit dem Ausdruck $-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$ berechnet wird.



Fundamentale Wechselwirkungen * (B_429)

c) In der nachstehenden Grafik sind 2 Kräfte, die auf ein Teilchen im Punkt E wirken, dargestellt.



– Zeichnen Sie die Gesamtkraft, die sich aus der Summe der beiden Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ ergibt, ausgehend vom Punkt E in der obigen Grafik ein.

Geocaching (B_244)

Geocaching ist eine Suche nach einem „Schatz" (= Cache) mithilfe von GPS (Global Positioning System).

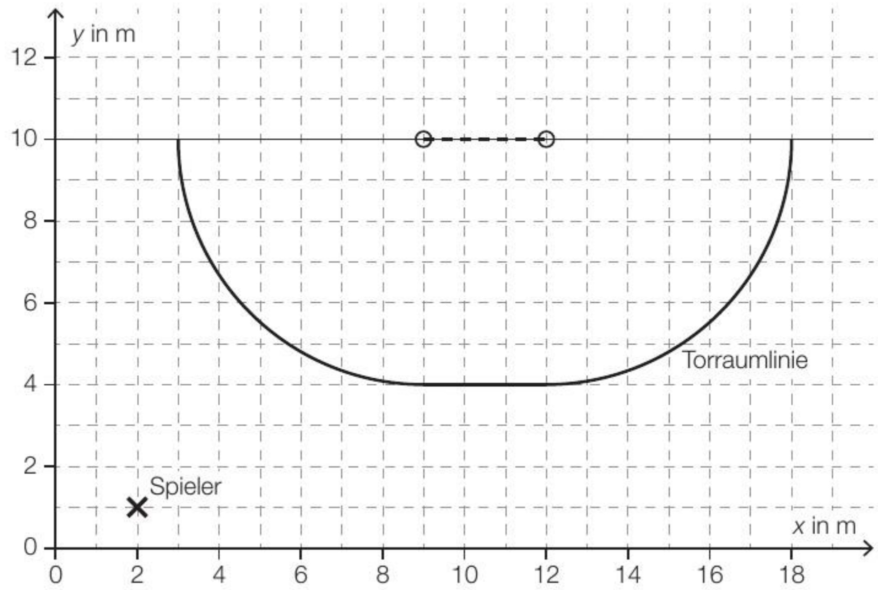
b) Entlang eines Rundwanderweges sind 4 Caches versteckt. Der Rundwanderweg ist annähernd durch die Koordinaten der Cacheverstecke (Einheit 1 km) dargestellt:

Ausgangspunkt = Endpunkt $A = (-4|3)$
Cacheverstecke $B = (-3|0)$, $C = (1|-2)$, $D = (4|1)$, $E = (2|4)$

– Zeichnen Sie den Wanderweg in ein Koordinatensystem ein.
– Stellen Sie den Vektor $\overrightarrow{AB}$ vom Ausgangspunkt zum 1. Cache auf.
– Dokumentieren Sie, wie man die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$ berechnet.

Handball * (B_498)

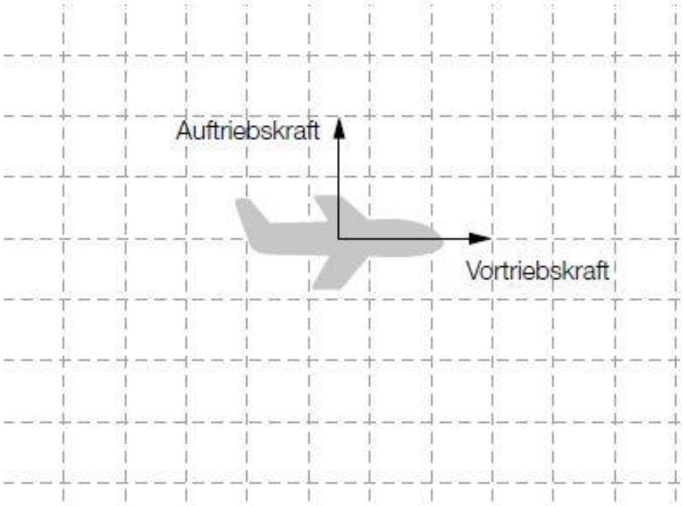
c) In der unten stehenden Abbildung ist die Position eines Spielers mit × markiert.
Ausgehend von dieser Position soll ein Spielzug eingezeichnet werden, der sich aus dem Vektor $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und daran anschließend dem Vektor $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ zusammensetzt.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diesen Spielzug mithilfe von Pfeilen ein.

Papierflieger * (B_020)

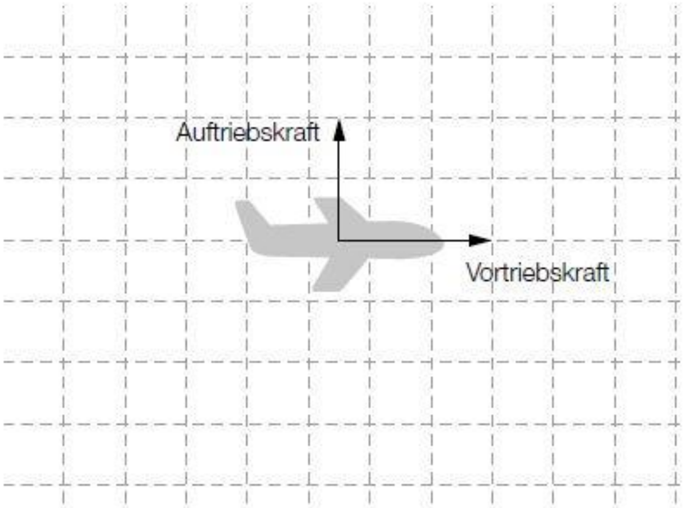
c) Bei einem angetriebenen Flugzeug wirken unter anderem die Auftriebskraft und die Vortriebskraft ein. In der nachstehenden Abbildung sind die zugehörigen Kraftvektoren als Pfeile dargestellt.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die aus Auftriebskraft und Vortriebskraft resultierende Kraft als Pfeil ein.

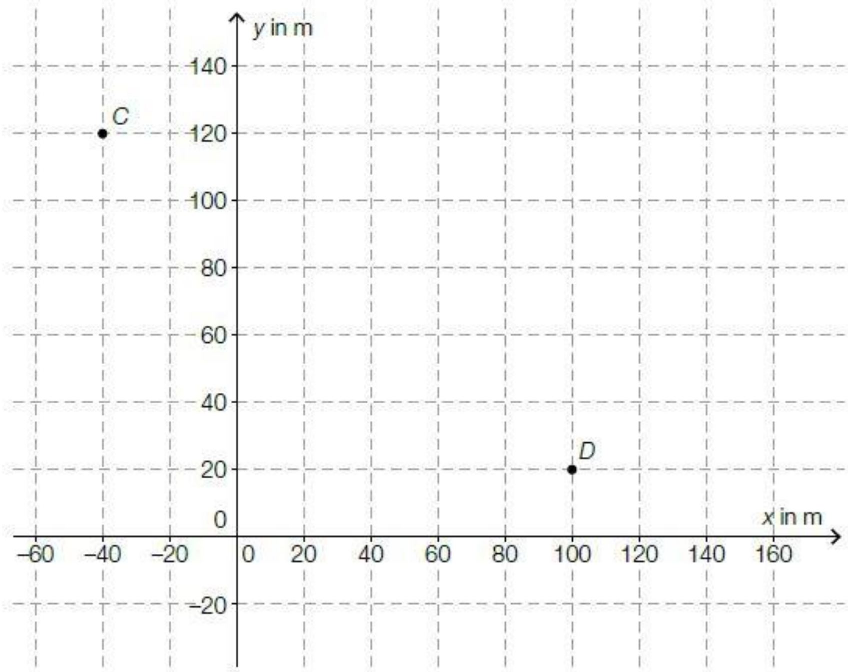
Bei einem angetriebenen Flugzeug gilt während einer Flugphase:
Der Strömungswiderstand ist der Gegenvektor zur Vortriebskraft.
Die Schwerkraft ist der Gegenvektor zur Auftriebskraft.

2) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Vektor für die Schwerkraft und den Vektor für den Strömungswiderstand als Pfeile ein.



Straßenbau (2) * (B_408)

b) Zwischen zwei Punkten C und D soll eine geradlinige Verbindungsstraße errichtet werden (siehe nachstehendes Koordinatensystem).



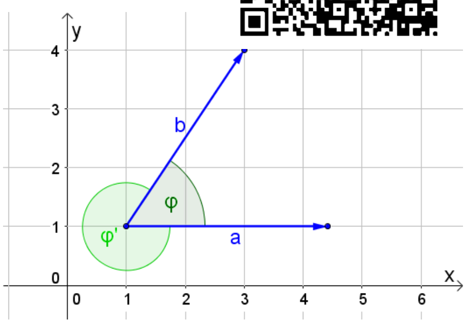
– Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{CD}$.
– Berechnen Sie den Betrag des Vektors $\overrightarrow{CD}$.

2.8 Winkel zwischen zwei Vektoren

Video

Es sind 2 Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Nun bestimmen wir den Winkel, den die dazugehörigen Pfeile miteinander einschließen:

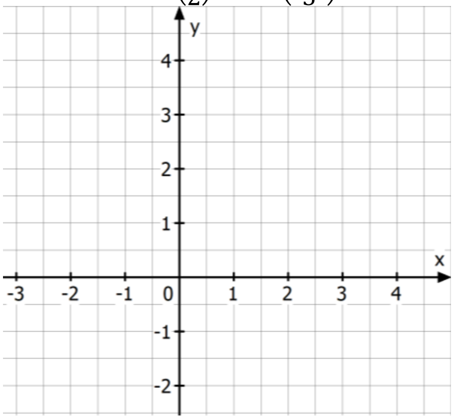
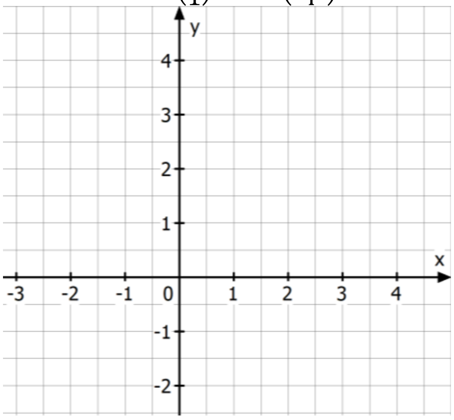
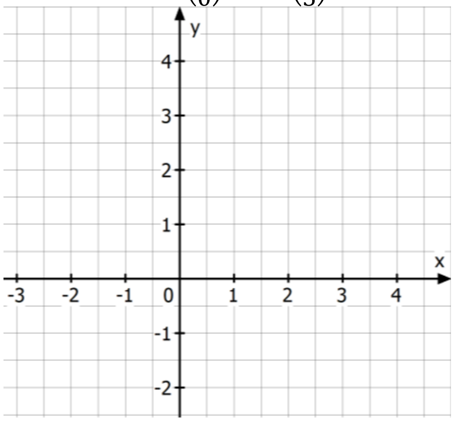
$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$



Zwei Vektoren schließen immer zwei Winkel φ und φ' miteinander ein. Bei Winkelberechnungen zwischen zwei Vektoren/Geraden ist immer der kleinere Winkel gemeint. Solltest du einmal ein Ergebnis erhalten, das größer als 180° ist (nennen wir dieses Ergebnis φ'), dann ziehe dieses Ergebnis von 360° ab und du erhältst den kleineren Winkel.

$$\varphi = 360° - \varphi'$$

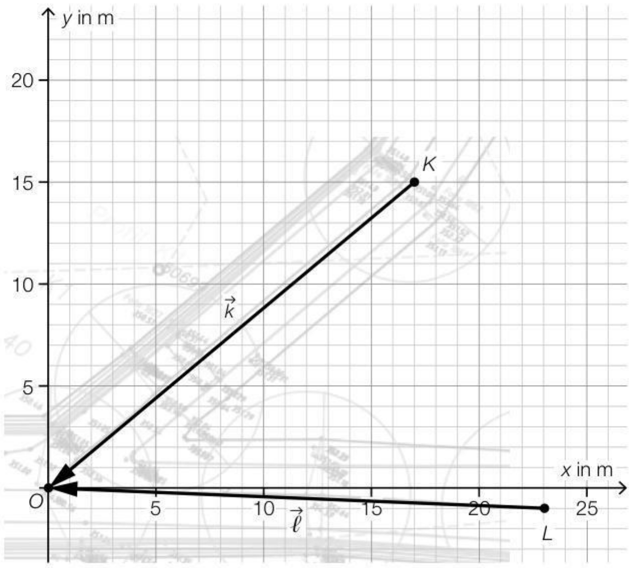
Bsp. 14) Berechne die Winkel zwischen den beiden Vektoren und kontrolliere mit einer Zeichnung.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
		

Der Grazbach * (B_561)

Der Kroisbach und der Leonhardbach sind Bäche in Graz, die nach ihrem Zusammenfluss den Grazbach bilden.

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Bereich des Zusammenflusses in einem Vermessungsplan modellhaft dargestellt. Im Koordinatenursprung O fließen die beiden Bäche zusammen.



Der Kroisbach fließt vom Punkt P zum Punkt K.

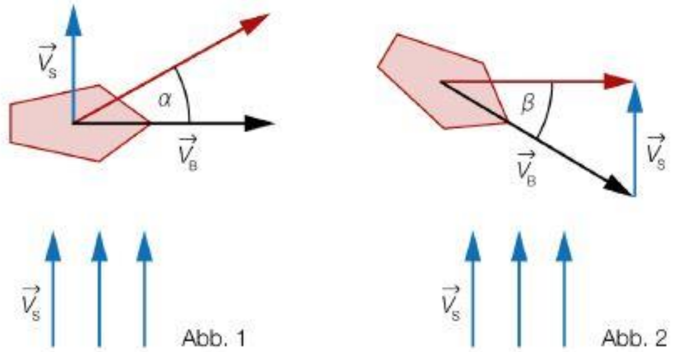
Es gilt: $\overrightarrow{PK} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Punkt P ein.
2) Berechnen Sie denjenigen spitzen Winkel, den die Vektoren $\vec{\ell}$ und $\vec{k}$ miteinander einschließen.

Donauüberquerung (B_229)

Eine Motorfähre verkehrt zwischen den sich an der Donau genau gegenüberliegenden Anlegestellen in Dürnstein und in Rossatz. An dieser Stelle ist die Donau etwa 200 Meter breit und hat eine gleichmäßige Strömungsgeschwindigkeit v_s von ca. 1,6 Metern pro Sekunde (m/s). (Reibungseinflüsse sollen vernachlässigt werden.)

a) Die Vektorgrafiken Abb. 1 und Abb. 2 stellen ein Boot dar, das einen Fluss überquert.
– Interpretieren Sie, welche Aussagen die Grafiken vermitteln.



$\vec{v}_S$ … Strömungsgeschwindigkeit
$\vec{v}_B$ … Geschwindigkeit des Boots

b) Die Motorfähre auf der Donau bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Es gilt:

$$s = v \cdot t$$

s … Weg in Metern (m)
v … Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s)
t … Zeit in Sekunden (s)

– Berechnen Sie, in welchem Winkel der Steuermann gegen die Strömung steuern muss, wenn das Boot eine Geschwindigkeit v_B relativ zum Wasser von durchschnittlich 3 m/s hat und es von Rossatz aus genau in Dürnstein landen soll.
– Ermitteln Sie auch die Dauer der Überfahrt in Minuten.

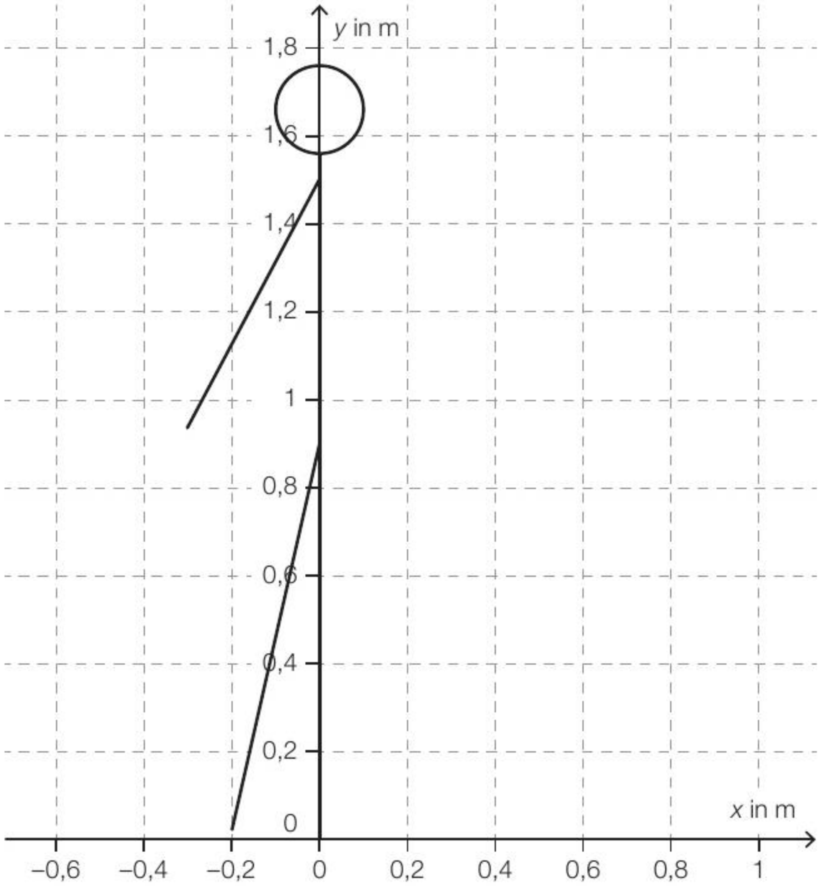
c) Ein geübter Schwimmer, der beim Schwimmen in ruhendem Gewässer eine Geschwindigkeit von 1,2 m/s erreicht, möchte auf der Bootsroute von Rossatz nach Dürnstein die Donau überqueren.
– Argumentieren Sie mithilfe von Vektordiagrammen, ob der Schwimmer eine Chance hat, die Anlegestelle in Dürnstein auf kürzestem Weg zu erreichen.

Fitnessgymnastik * (B_494)

c) Bei einer Übung wird ein Ende eines dehnbaren Fitnessbands mit dem Fuß fixiert (Koordinatenursprung in der unten stehenden Abbildung). Das andere Ende wird mit dem in der Abbildung nicht dargestellten Arm gehalten.

Zu Beginn der Übung ist das Fitnessband ungedehnt und kann durch den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschrieben werden (Maße in Metern).

1) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Vektor $\vec{b}$ als Pfeil ausgehend vom Koordinatenursprung ein.

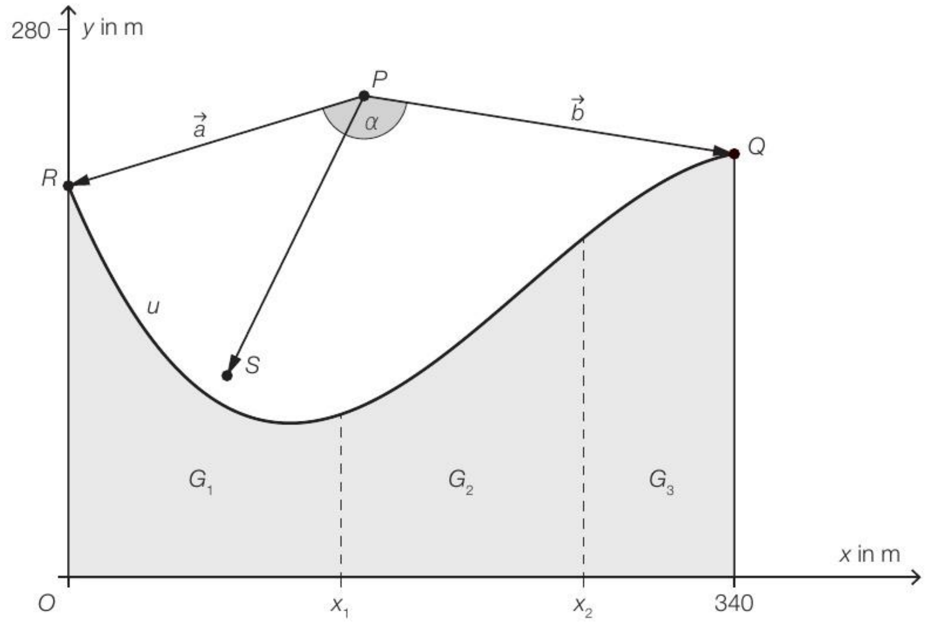


2) Berechnen Sie den Winkel, den der Vektor $\vec{b}$ mit der y-Achse einschließt.

3) Berechnen Sie die Länge des ungedehnten Fitnessbands. Runden Sie das Ergebnis auf ganze Zentimeter.

Grundstück am See * (B_301)

Drei Geschwister erwerben ein Grundstück am See. Sie unterteilen das Grundstück in die 3 Grundstücke G_1, G_2 und G_3 (siehe nachstehende Abbildung).



Die Uferbegrenzungslinie wird näherungsweise durch den Graphen der Funktion u beschrieben.

a) Jemand fotografiert von einem Boot im Punkt P aus das Ufer des Grundstücks. Damit die Uferbegrenzungslinie zwischen den Punkten R und Q auf dem Foto ist, muss das Objektiv den Winkel α erfassen können.

1) Stellen Sie mithilfe von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine Formel zur Berechnung des Winkels α auf.

α = ____

Das Boot fährt geradlinig mit einer konstanten Geschwindigkeit v (in m/s) vom Punkt P zum Punkt S.

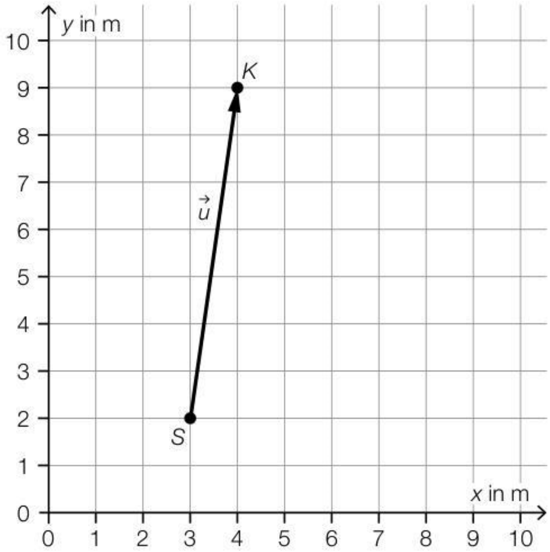
2) Beschreiben Sie, was mit dem nachstehenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

$$\frac{|\overrightarrow{PS}|}{v}$$

Piratenschiff * (B_572)

Piratenschiff ist ein Spiel im Turnunterricht.
Für dieses Spiel wird ein Parcours mit Turngeräten als Hindernissen aufgebaut, in dem Fangen gespielt wird.

c) Tim und Angela skizzieren einen Plan, um ihre Strategie beim Spiel *Piratenschiff* festzulegen (siehe nachstehende Abbildung).



Beide starten im Punkt S.
Tim möchte vom Punkt S geradlinig zum Punkt K laufen.

1) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$

2) Berechnen Sie die Länge des Vektors $\vec{u}$.

Angela folgt vom Punkt S aus dem Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Vektor $\vec{w}$ als Pfeil ausgehend vom Punkt S ein.

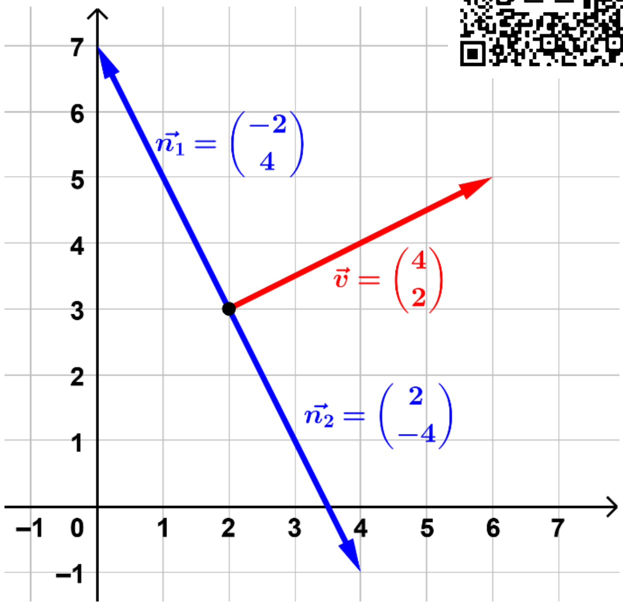
4) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{w}$.

2.9 NORMALVEKTOREN

Video 10/11

Die **Normalvektoren** zu einem Vektor sind alle Vektoren, die **normal** (im rechten Winkel) **auf den Vektor** stehen. Im $\mathbb{R}^2$ gibt es zu jedem Vektor **genau 2 Normalvektoren**, die **dieselbe Länge** wie der ursprüngliche Vektor haben. Alle anderen Normalvektoren sind Vielfache eines dieser 2 Normalvektoren.

Sei $\vec{v} = \binom{x}{y}$ ein Vektor, dann ist $\overrightarrow{n_1} = \binom{-y}{x}$ sein nach links gekippter, und $\overrightarrow{n_2} = \binom{y}{-x}$ sein nach rechts gekippter Normalvektor.

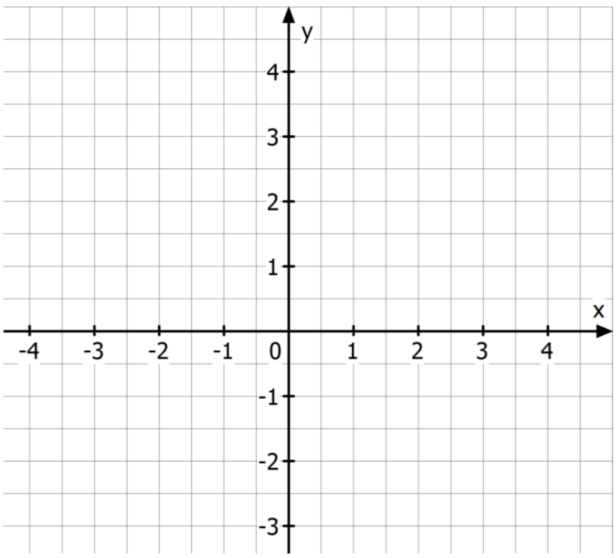
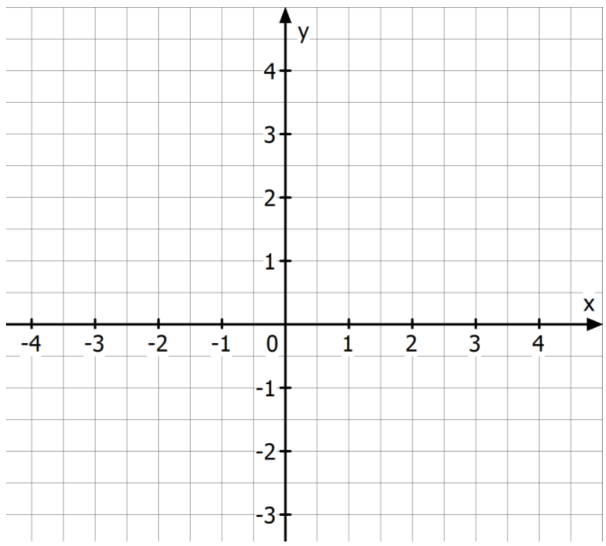


Vertausche die Koordinaten und ändere <u>ein</u> Vorzeichen!

Bsp. 15) Bestimme die Normalvektoren $\overrightarrow{n_1}$ und $\overrightarrow{n_2}$ zum gegebenen Vektor.

$\vec{a} = \binom{3}{2}$	$\vec{b} = \binom{-3{,}5}{-12}$	$\vec{c} = \binom{-3}{30}$

Bsp. 16) Gegeben ist ein Vektor. Zeichne den Vektor, sowie die beiden zugehörigen Normalvektoren mit derselben Länge ins Koordinatensystem. Gib die Vektoren $\overrightarrow{n_1}$ und $\overrightarrow{n_2}$ an. Überprüfe rechnerisch.

$\vec{a} = \binom{3}{-2}$ – Start im Punkt $P = (0\|0)$	$\vec{a} = \binom{-1}{-2{,}5}$ – Start im Punkt $P = (0\|0)$
	

2.10 ORTHOGONALITÄTSKRITERIUM

Die Formel zur Winkelberechnung kann man folgendermaßen umformen:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi \qquad \boxed{\mathbf{\cos(90°) = 0}}$$

Daraus folgt: Bei einem Winkel von $\varphi = 90°$ erhalten wir $cos\ \varphi = 0$, sodass die rechte Seite $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$ zu 0 wird. Aus dem Gleichheitszeichen folgt, dass auch $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ ist. Daraus ergibt sich das **Orthogonalitätskriterium**:

Ergibt das Skalarprodukt zweier Vektoren 0, so stehen diese zwei Vektoren normal zueinander (und umgekehrt!)
$\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{a}}\perp\vec{\mathbf{b}}$

<u>Bemerkung</u>: Mithilfe des Orthogonalitätskriteriums kann man auch zeigen, dass $\overrightarrow{n_2} = \binom{y}{-x}$ stets ein Normalvektor von $\vec{v} = \binom{x}{y}$ ist:

$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{n_2} = \binom{x}{y}\cdot\binom{y}{-x} = xy - yx = 0$$

Bsp. 17) Überprüfe mit Hilfe des Orthogonalitätskriteriums, ob die beiden Vektoren zueinander normal sind.

$\vec{a} = \binom{3}{2}, \vec{b} = \binom{6}{-10}$	$\vec{a} = \binom{7}{2}, \vec{b} = \binom{-6}{21}$	$\vec{a} = \binom{100}{-15}, \vec{b} = \binom{-3}{-20}$

Bsp. 18) Bestimme die fehlende Koordinate so, dass die beiden Vektoren zueinander normal sind.

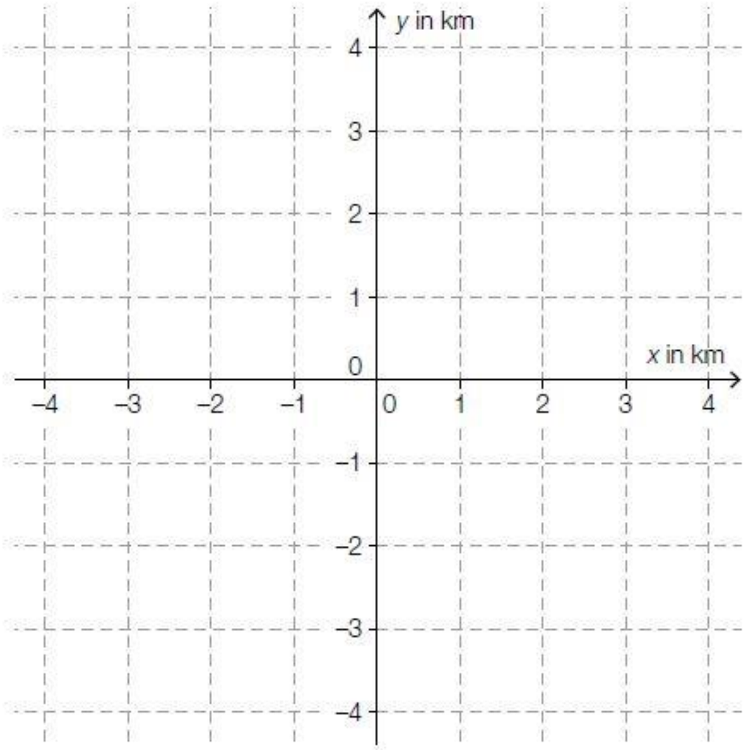
$\vec{a} = \binom{-4}{2}, \vec{b} = \binom{b_1}{8}$	$\vec{a} = \binom{5}{a_2}, \vec{b} = \binom{20}{-10}$	$\vec{a} = \binom{a_1}{-8}, \vec{b} = \binom{-2}{8}$

Silvesterlauf * (B_403)

a) Die ebene Laufstrecke eines Silvesterlaufs startet bei A und führt in geradlinigen Streckenabschnitten über die Kontrollpunkte B, C und D zum Ziel E.
Die Koordinaten dieser Punkte (in km) in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem sind angegeben:

Ausgangspunkt $A = (-1|1)$
1. Kontrollpunkt $B = (1|3)$
2. Kontrollpunkt $C = (2|-2)$
3. Kontrollpunkt $D = (1|-2)$
Zielpunkt $E = (1|1)$

– Veranschaulichen Sie diese Laufstrecke im nachstehenden Koordinatensystem.

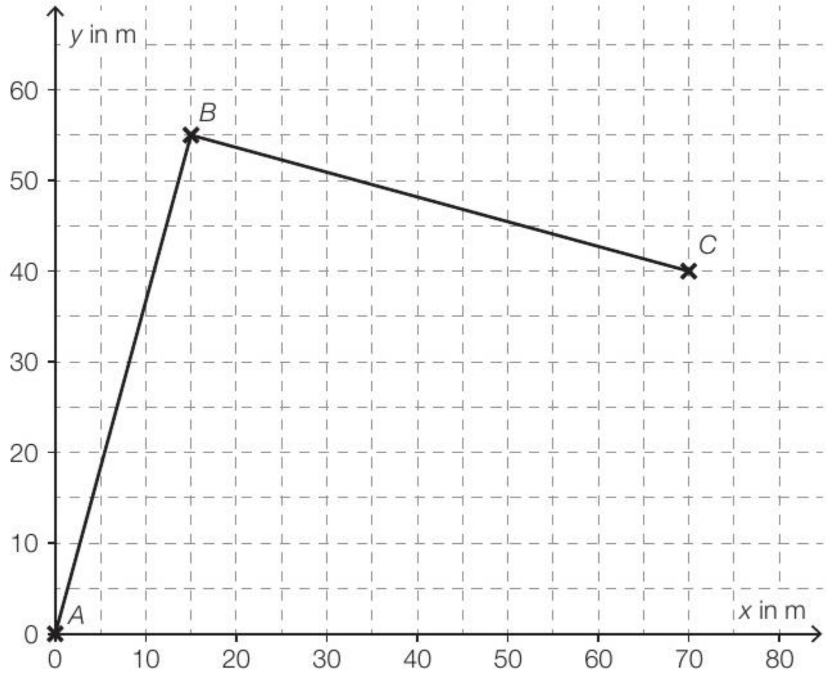


– Erklären Sie, warum für das folgende Skalarprodukt gilt: $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$
– Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{BC}$.
– Berechnen Sie die Streckenlänge $\overline{BC}$.

Stand-up-Paddling * (B_480)

Stand-up-Paddling ist eine Wassersportart, bei der eine Person aufrecht auf einem Board steht und paddelt.

d) In einem Hafen wurde eine Stand-up-Paddling-Trainingsstrecke mit Bojen markiert. Dabei muss man vom Start im Punkt A zum Punkt B und dann zum Punkt C paddeln (siehe nachstehende Abbildung).

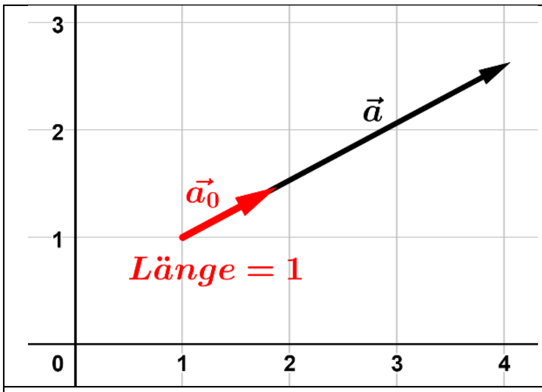


1) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung geometrisch.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

2.11 Einheitsvektor

In vielen Anwendungen der Geometrie sucht man Vektoren mit einer bestimmten Länge.
Dazu ist es sinnvoll, den Vektor zuerst auf eine Einheit (Länge 1) zu verkürzen bzw. verlängern (=Einheitsvektor).



Der **Einheitsvektor** $\overrightarrow{a_0}$ eines Vektors $\vec{a}$ ist ein **zu $\vec{a}$ paralleler Vektor** mit **Länge 1**. Rechnerisch erhält man $\overrightarrow{a_0}$, indem man $\vec{a}$ durch seine Länge (=Betrag) dividiert.

$$\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

Daraus ergibt sich ein Vektor, der dieselbe Richtung des ursprünglichen Vektors hat, allerdings die Länge 1 besitzt, d.h. $|\overrightarrow{a_0}| = 1$.

Mit einem Einheitsvektor kann man Strecken **gewünschter Länge** in vorgegebener Richtung abtragen.

Bsp. 19) Bestimme den Einheitsvektor.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Bsp. 20) Gib einen zum Vektor $\vec{a}$ parallelen Vektor mit der Länge l an.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, l = 2$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}, l = 10$

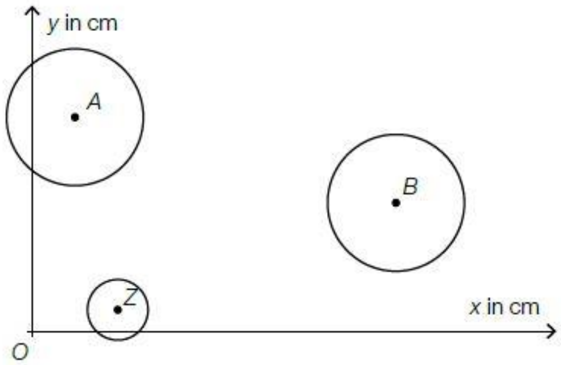
Bsp. 21) Finde jenen Punkt R, der sich l Einheiten entfernt von B in Richtung $\overrightarrow{AB}$ befindet.

$A = (-2\vert-3), B = (2\vert0), l = 5$	$A = (-4\vert-3), B = (1\vert5), l = 6$

Boule * (B_444)

Boule ist eine Sportart, bei der Kugeln geworfen werden. Ziel ist es, mit den eigenen Kugeln möglichst nah an eine Zielkugel zu gelangen.

b) Für eine genauere Analyse eines Boule-Spiels wird mithilfe einer Drohne ein Luftbild aufgenommen.



$A = (2|10)$ ... Auflagepunkt der ersten Kugel
$B = (17|6)$ ... Auflagepunkt der zweiten Kugel
$Z = (4|1)$ ... Auflagepunkt der Zielkugel

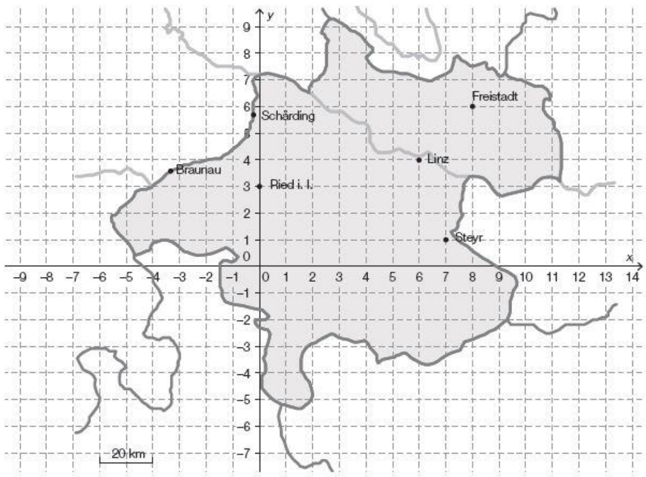
1) Berechnen Sie die Länge der Strecke BZ.

Während des Spiels bewegt sich die erste Kugel entlang der Strecke AB 3 cm in Richtung B.

2) Berechnen Sie die Koordinaten der neuen Position des Auflagepunkts der ersten Kugel.

Brieftauben * (B_355)

Die nachstehende Grafik zeigt einige Städte in Oberösterreich, in denen es Taubenzüchter/innen gibt, in einem Koordinatensystem. Dabei entspricht eine Längeneinheit im Koordinatensystem einer Entfernung von 10 Kilometern.



a) Eine Taube wird in Freistadt losgelassen und fliegt auf direktem Weg nach Steyr.

– Ermitteln Sie die Koordinaten desjenigen Vektors (Pfeil von Anfangspunkt zu Endpunkt des Fluges), der die Flugstrecke der Taube beschreibt.

b) Eine Brieftaube fliegt von Ried i. I. in ihre Heimatstadt. Dieser Flug wird durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ beschrieben.

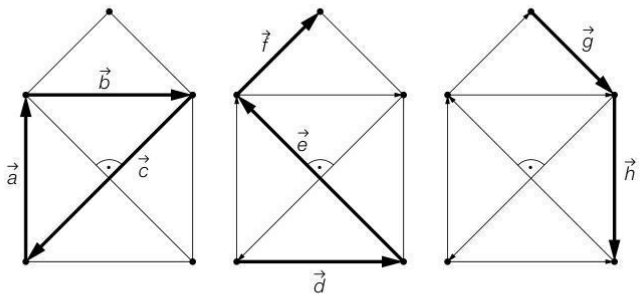
– Lesen Sie die Heimatstadt dieser Brieftaube ab.
– Berechnen Sie den Betrag des Vektors $\vec{v}$.

c) Eine Taube startet in Linz. Sie fliegt eine Strecke von 67,08 km Länge in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

– Ermitteln Sie die Koordinaten desjenigen Vektors, den die Taube von Linz bis zu ihrem Ziel entlangfliegt. Geben Sie die Koordinaten dabei in den Längeneinheiten des obigen Koordinatensystems an.

Kinderrätsel * (B_551)

a) *Das Haus vom Nikolaus* ist ein Zeichenrätsel für Kinder. Ziel ist es, ein „Haus", das aus einem Quadrat, seinen Diagonalen und einem aufgesetzten Dreieck besteht, ohne Absetzen nachzuzeichnen.
In den nachstehenden Abbildungen ist eine Lösung durch das Zeichnen der Vektoren von $\vec{a}$ (beginnend links unten) bis $\vec{h}$ (endet rechts unten) dargestellt.



1) Kreuzen Sie die <u>nicht</u> zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐
$\vec{f} + \vec{g} = \vec{b}$	☐
$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f} + \vec{g} + \vec{h} = \vec{d}$	☐
$\vec{e} + \vec{f} + \vec{g} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐
$\vec{e} + \vec{b} + \vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐

2) Vervollständigen Sie den nachstehenden Ausdruck zur Berechnung der Länge von $\vec{c}$ durch Eintragen der richtigen Zahl.

$|\vec{c}| =$ ____________ $\cdot |\vec{a}|$

3) Begründen Sie, warum die nachstehende Gleichung gilt.
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{e} \cdot \vec{c}$

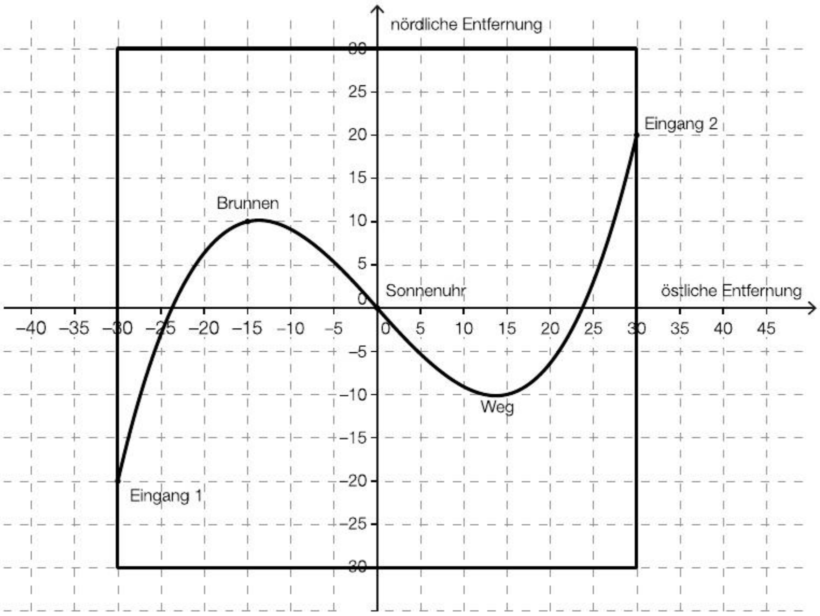
In einem bestimmten Koordinatensystem gilt: $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

4) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$\vec{e} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$

Kinderspielplatz (1) (B_247)

Ein quadratischer Kinderspielplatz soll neu angelegt werden. In der Mitte des Kinderspielplatzes ist eine große Sonnenuhr, ein Brunnen ist bereits vorhanden. Wie in der nachstehenden Abbildung zu sehen ist, soll ein Weg vom Eingang 1 zum Brunnen führen, weiter zur Sonnenuhr und von dort zum Eingang 2.



c) Ein Kind läuft außerhalb des Weges geradlinig vom Eingang 1 zur Sonnenuhr und dann zum Brunnen.

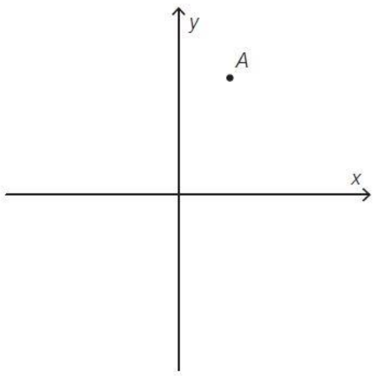
– Stellen Sie denjenigen Vektor auf, der den geradlinigen Weg vom Eingang 1 zur Sonnenuhr beschreibt.
– Berechnen Sie die Entfernung, die das Kind läuft.

Roboter (2) * (B_345)

a) Roboterbewegungen werden mithilfe der Vektorrechnung modelliert.

Folgende Anweisung zur Verschiebung eines Punktes ist vorgegeben:
„Der Punkt A wird um einen Vektor $\vec{s}$ mit den Komponenten $s_x > 0$ und $s_y < 0$ in den Punkt B verschoben."

– Veranschaulichen Sie diese Anweisung, indem Sie einen möglichen Vektor $\vec{s}$ und den entsprechenden Punkt B im nachstehenden Koordinatensystem einzeichnen.

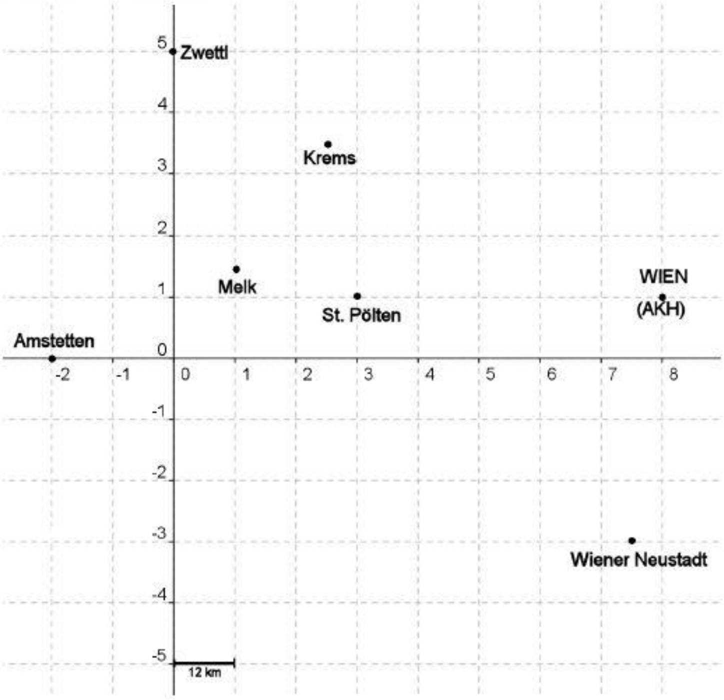


b) – Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$ ein Normalvektor des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ ist.

Rettungshubschrauber (B_246)

Der Einsatz von Hubschraubern ermöglicht schnelle und sichere Krankentransporte.

Im nachstehenden Koordinatensystem sind Krankenhäuser eingezeichnet, die über einen Hubschrauberlandeplatz verfügen. Bei der Darstellung entspricht eine Einheit im Koordinatensystem einer Strecke von 12 km.



a) – Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Koordinaten des Krankenhauses Krems ab.
– Stellen Sie denjenigen Vektor auf, der den geradlinigen Flug eines Hubschraubers vom Krankenhaus Krems zum AKH Wien beschreibt.

b) Ein Hubschrauber startet beim Krankenhaus Wiener Neustadt. Der Flug wird durch die folgenden Vektoren beschrieben:

Zuerst $\begin{pmatrix} -3{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$, dann $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und schließlich $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

– Zeichnen Sie den Hubschrauberflug in der obigen Abbildung ein.

c) Der Vektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ beschreibt den Hubschrauberflug vom Krankenhaus St. Pölten zum Krankenhaus Zwettl.

– Berechnen Sie die Länge dieses Hubschrauberflugs in Kilometern.

d) Ein Hubschrauber fliegt vom Krankenhaus Melk Richtung Krankenhaus Krems.

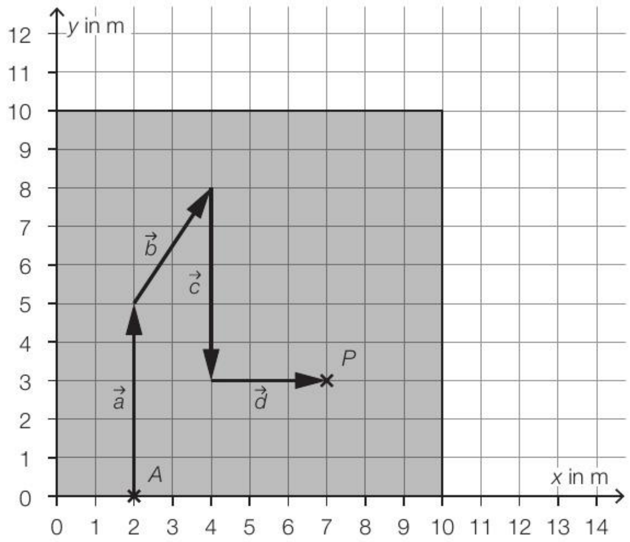
– Zeichnen Sie den entsprechenden Einheitsvektor dieser Richtung ausgehend vom Krankenhaus Melk in die obige Abbildung ein.
– Dokumentieren Sie, wie man diesen Einheitsvektor berechnen kann.

Schlosspark * (B_507)

c) Im Schlosspark gibt es ein Labyrinth aus Hecken. Der Weg durch das Labyrinth wird durch Aneinanderreihen der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots, \vec{h}$ (in alphabetischer Reihenfolge) beschrieben. Dabei beginnt jeder Vektor an der Spitze des vorherigen Vektors.

Es gilt: $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Maße in m)

In der nachstehenden Abbildung ist die quadratische Grundfläche des Labyrinths dargestellt. Der Startpunkt A des Weges durch das Labyrinth, die ersten vier Vektoren und der Punkt P sind bereits eingezeichnet.



1) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$\vec{b} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$

2) Ermitteln Sie die Länge des Weges durch das Labyrinth vom Startpunkt A zum Punkt P.

3) Vervollständigen Sie ausgehend vom Punkt P den Weg durch das Labyrinth durch Einzeichnen der Vektoren $\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$ und $\vec{h}$.

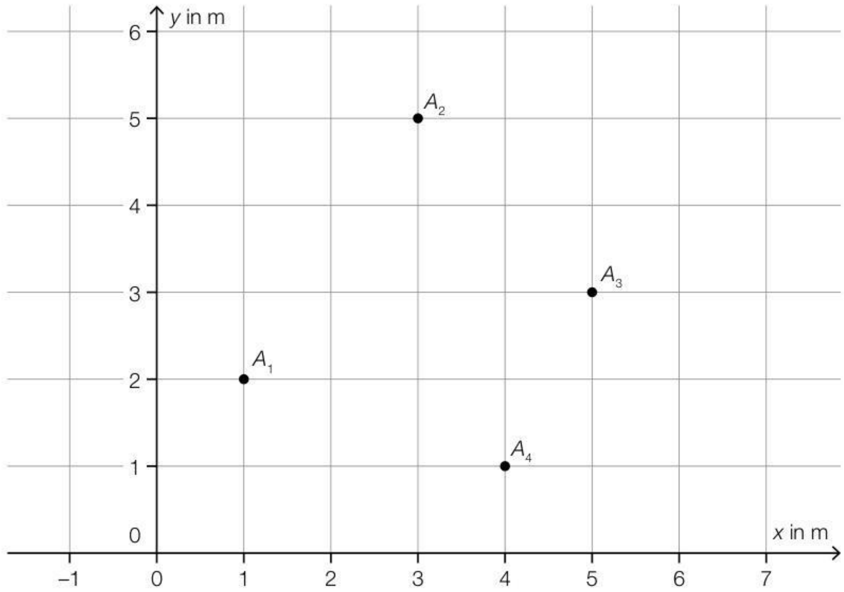
4) Kreuzen Sie die auf die gegebenen Vektoren <u>nicht</u> zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ sind Gegenvektoren.	☐
Die Vektoren $\vec{f}$ und $\vec{g}$ haben den gleichen Betrag.	☐
Die Vektoren $\vec{f}$ und $\vec{h}$ sind parallel.	☐
Die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}$ haben den gleichen Betrag.	☐
Die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}$ stehen normal aufeinander.	☐

Zebraschnecken * (B_532)

Um das Wanderverhalten von Zebraschnecken zu untersuchen, wird eine Versuchsfläche, auf der solche Schnecken leben, beobachtet.

a) Die unten stehende Abbildung zeigt die Positionen der Zebraschnecke A an vier aufeinanderfolgenden Tagen in einem Koordinatensystem (Einheiten in Metern).
Die Punkte A_1, A_2, A_3 und A_4 sind dabei die Positionen der Zebraschnecke A zu Beginn des 1., 2., 3. bzw. 4. Tages.



1) Geben Sie den Vektor vom Punkt A_2 zum Punkt A_3 an.

2) Berechnen Sie die Entfernung, die die Zebraschnecke zurückgelegt hat, wenn sie auf dem kürzesten Weg von A_2 nach A_3 gekrochen ist.

Zu Beginn des 5. Tages befindet sich die Zebraschnecke im Punkt A_5.
Es gilt: $\overrightarrow{A_4A_5} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Punkt A_5 ein.