Auffinden von Polynomfunktionen

Maturaskript BHS – Teil A (16 Seiten)

Polynomfunktion **1. Grades** $f(x) = ax + b$	Gesucht: 2 Variablen (a,b) Du benötigst: **2 Gleichungen**
Polynomfunktion **2. Grades** $f(x) = ax^2 + bx + c$	Gesucht: 3 Variablen (a,b,c) Du benötigst: **3 Gleichungen**
Polynomfunktion **3. Grades** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	Gesucht: 4 Variablen (a,b,c,d) Du benötigst: **4 Gleichungen**
Polynomfunktion **4. Grades** $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	Gesucht: 5 Variablen (a,b,c,d,e) Du benötigst: **5 Gleichungen**

Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Prof. Tegischer

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM
2) Gib im Feld „**Volltextsuche**" die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. A_263) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**" und „**GeoGebra**" erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**" erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln	**Weitere Regeln für Lehrpersonen**
▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen. ▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen. ▪ Sie dürfen mein Materialen **NICHT** gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden. ▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden. ▪ Bei einem **Missbrauch** erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.	**WICHTIGSTE REGEL:** LehrerInnen dürfen die Materialien in **Ihrem eigenen Unterricht** verwenden: ▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen. ▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben. ▪ Es ist **nicht erlaubt**, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben. ▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

Auffinden von Polynomfunktionen

In diesem Skript lernst du, wie du Polynomfunktionen aus gegebenen Informationen aufstellen kannst. Dazu brauchst du folgendes Hintergrundwissen: Video 1/1

SCAN MICH

1] Funktionsgleichung einer Polynomfunktion

Polynomfunktion **1. Grades** $f(x) = ax + b$	Gesucht: 2 Variablen (a,b) Du benötigst: **2 Gleichungen**
Polynomfunktion **2. Grades** $f(x) = ax^2 + bx + c$	Gesucht: 3 Variablen (a,b,c) Du benötigst: **3 Gleichungen**
Polynomfunktion **3. Grades** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	Gesucht: 4 Variablen (a,b,c,d) Du benötigst: **4 Gleichungen**
Polynomfunktion **4. Grades** $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	Gesucht: 5 Variablen (a,b,c,d,e) Du benötigst: **5 Gleichungen**

2] Du musst im Stande dazu sein, allgemeine Ableitungsfunktionen bilden zu können.

Bsp.: Leite die allgemeine Polynomfunktion 3. Grades zwei Mal ab.

$$\boldsymbol{f(x)} = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$\boldsymbol{f'(x)} = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$\boldsymbol{f''(x)} = 6ax + 2b$$

3] Nun kommt der entscheidende Schritt. Je nach Grad der Polynomfunktion musst du Gleichungen aufstellen. Aus folgenden Eigenschaften/Bedingungen kannst du Gleichungen aufstellen:

Eigenschaft/Bedingung	Gleichung	Konkretes Beispiel mit einer Polynomfunktion 3. Grades
Punkt ist gegeben *Bsp.: Die Funktion geht durch den Punkt* $P = (2\|7)$	$f(2) = 7$	$a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 7$ $8a + 4b + 2c + d = 7$
Stelle & Funktionswert sind gegeben (wie bei einem Punkt!) *Bsp.: Die Funktion hat an der Stelle* $x = -1$ *den Funktionswert 5.*	$f(-1) = 5$	$a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = 5$ $-a + b - c + d = 5$
Extremstelle ist gegeben *Bsp.: Die Funktion besitzt an der Stelle* $x = 5$ *eine Extremstelle.*	$f'(5) = 0$	$75a + 10b + c = 0$
Extrempunkt ist gegeben (H, T) *Bsp.: Die Funktion besitzt den Hochpunkt* $H = (4\|3)$ ▪ ***Info 1:*** *an der Stelle* $x = 4$ *ist die Steigung 0* ▪ ***Info 2:*** *Punkt (4|3)*	Info 1: $f'(4) = 0$ Info 2: $f(4) = 3$	Info 1: $48a + 8b + c = 0$ Info 2: $64a + 16b + 4c + d = 3$
Steigung ist gegeben *Bsp.: Die Funktion besitzt an der Stelle x=3 die Steigung -6.*	$f'(3) = -6$	$27a + 6b + c = -6$
Wendestelle ist gegeben *Bsp.: Die Funktion besitzt an der Stelle x=6 eine Wendestelle.*	$f''(6) = 0$	$36a + 2b = 0$
Wendepunkt ist gegeben *Bsp.: Die Funktion besitzt den Wendepunkt* $H = (1\|7)$ ▪ ***Info 1:*** *an der Stelle* $x = 1$ *ist die Krümmung 0* ▪ ***Info 2:*** *Punkt (1|7)*	Info 1: $f''(1) = 0$ Info 2: $f(1) = 7$	Info 1: $6a + 2b = 0$ Info 2: $a + b + c + d = 7$

Sattelpunkt ist gegeben *Bsp.: Die Funktion besitzt den Sattelpunkt S=* $(-2\|-4)$ ▪ ***Info 1:*** *an der Stelle* $x=-2$ *ist die Krümmung 0* ▪ ***Info 2:*** *an der Stelle* $x=-2$ *ist die Steigung 0* ▪ ***Info 3:*** *Punkt (-2|-4)*	Info 1: $f''(-2)=0$ Info 2: $f'(-2)=0$ Info 3: $f(-2)=-4$	Info 1: $-12a+2b=0$ Info 2: $12a-4b+c=0$ Info 3: $-8a+4b-2c+d=-4$
Wendetangente ist gegeben Bsp.: An der Stelle $x=10$ besitzt die Funktion die Wendetangente $y=-\frac{1}{3}x+4$	$f'(10)=-\frac{1}{3}$	$300a+20b+c=-\frac{1}{3}$

Mit diesen Gleichungen musst du in weiterer Folge ein Gleichungssystem aufstellen. Sind z.B. bei einer Polynomfunktion 3. Grades **vier Variablen gesucht**, so benötigst du **vier Gleichungen**. Dieses Gleichungssystem kannst du mit technischen Hilfsmitteln (z.B. GeoGebra) einfach lösen.

Musterbeispiel: Der Graph einer Polynomfunktion f dritten Grades verläuft durch den Hochpunkt $H=(1|2)$, hat an der Stelle $x=2$ die Steigung -12 und besitzt an der Stelle $x=0{,}5$ einen Wendepunkt.

Polynomfunktion 3. Grades $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
Gesucht: 4 Variablen <-> Wir benötigen: 4 Gleichungen!

Schritt 1: Bildung der allgemeinen Ableitungsfunktionen $f'(x)$ und $f''(x)$ (da ein Extrempunkt, ein Wendepunkt und eine Steigung an einer Stelle gegeben sind).
Bemerkung: *Wären nur Punkte gegeben, so benötigst du nur die Funktionsgleichung* $f(x)$.

$$\boldsymbol{f(x)}=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$\boldsymbol{f'(x)}=3ax^2+2bx+c$$
$$\boldsymbol{f''(x)}=6ax+2b$$

Schritt 2: Aufstellen der Gleichungen aus den gegebenen Informationen

- **Info 1:** Hochpunkt $H=(1|2)$ -> Steigung bei $x=1$ ist 0.

$$\text{I:}\quad \boldsymbol{f'(1)=0 \quad\rightarrow\quad 3a+2b+c=0}$$

- **Info 2:** Hochpunkt $H=(1|2)$ -> f geht durch den Punkt (1|2)

$$\text{II:}\quad \boldsymbol{f(1)=2 \quad\rightarrow\quad a+b+c+d=2}$$

- **Info 3:** bei $x=2$: Steigung ist -12

$$\text{III:}\quad \boldsymbol{f'(2)=-12 \quad\rightarrow\quad 12a+4b+c=-12}$$

- **Info 4:** bei $x=0{,}5$ befindet sich ein Wendepunkt (Krümmung ist 0)

$$\text{IIII:}\quad \boldsymbol{f''(0,5)=0 \quad\rightarrow\quad 3a+2b=0}$$

Schritt 3: Lösen des Gleichungssystems (z.B. mit GeoGebra)

I: $3a+2b+c=0$
II: $a+b+c+d=2$
III: $12a+4b+c=-12$
III: $3a+2b=0$
➔ $\boldsymbol{a=-2, b=3, c=0, d=1}$

Schritt 4: Aufstellen der Funktionsgleichung: $f(x)=-2x^3+3x^2+1$

Bsp. 1) Bestimme die **Funktionsgleichung** aus den gegebenen Informationen.

a. 1. Grad: $A = (-2|5), B = (3|-20)$

b. 2. Grad: $A = (-5|-44), B = (1|4), C = (5|-84)$

c. 3. Grad: $A = (-1|9), B = (0|2), C = (3|41), D = (6|296)$

d. 4. Grad: $A = (1|-3), B = (-5|141), C = (3|109), D = (-8|2265), E = (0|1)$

Bsp. 2) Bestimme die Funktionsgleichung aus den gegebenen Informationen.

a. Der Graph einer Polynomfunktion f dritten Grades besitzt den Sattelpunkt $S = (2|-3)$ und geht durch den Punkt $P = (4|1)$.

b. Der Graph einer Polynomfunktion f zweiten Grades besitzt an der Stelle $x = 1$ eine lokale Minimumstelle. An der Stelle $x = -4$ ist die Steigung -20. Der Funktionswert an der Stelle $x = 3$ ist 0.

c. Der Graph einer Polynomfunktion f vierten Grades besitzt die Wendepunkte $W_1 = (-1|-4)$ und $W_2 = (1|-4)$. Beim Wendepunkt W_1 hat die Wendetangente folgende Gleichung: $t_{W_1}: y - 8x = 4$

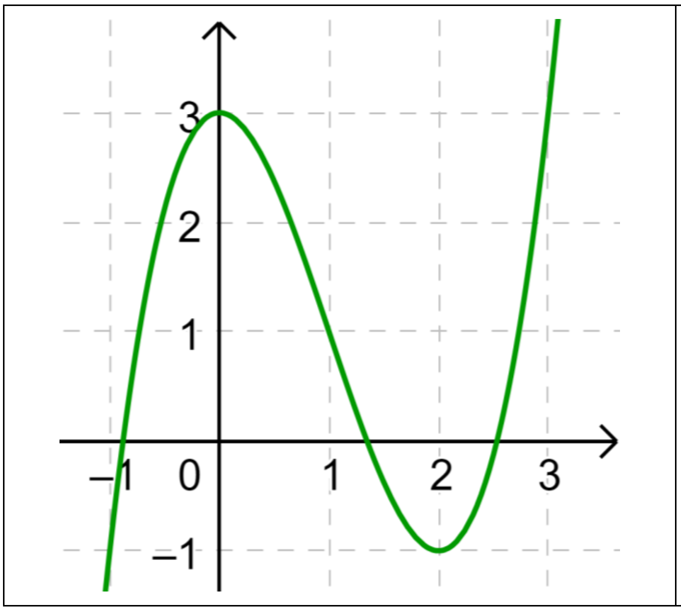
d. Der Graph einer Polynomfunktion f dritten Grades besitzt an der Stelle 1 einen Hochpunkt mit den Koordinaten $H = (1|-14)$, verläuft durch den Punkt $P = (2|-17{,}5)$ und hat an der Stelle 3 die Steigung -10.

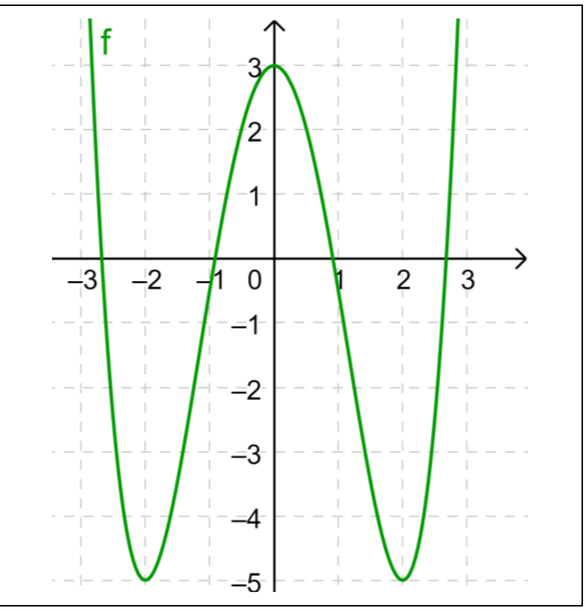
e. Der Graph einer Polynomfunktion f zweiten Grades verläuft durch die Punkte $P_1 = (-1|-5)$ und $P_2 = (4|-20)$ und hat an der Stelle $x = 3$ die Tangentengleichung: $t: y + 6x = 5$.

f. Der Graph einer Polynomfunktion f dritten Grades besitzt eine Sattelstelle bei $x = 5$, hat an der Stelle $x = -4$ die Tangentengleichung $t_W: y = 3x + 13$ und geht durch den Punkt $P = (-6|-1)$.

g. Der Graph einer Polynomfunktion f vierten Grades ist symmetrisch zur y-Achse, besitzt den Hochpunkt $H = (-1|1)$ und verläuft durch den Punkt $P = (0|0)$.

Bsp. 3) Bestimme die Funktionsgleichung aus den gegebenen Informationen.

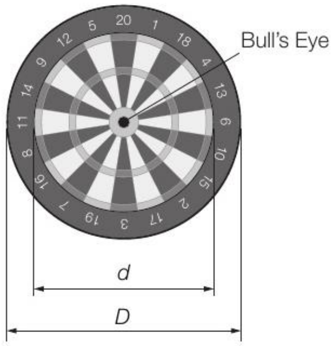




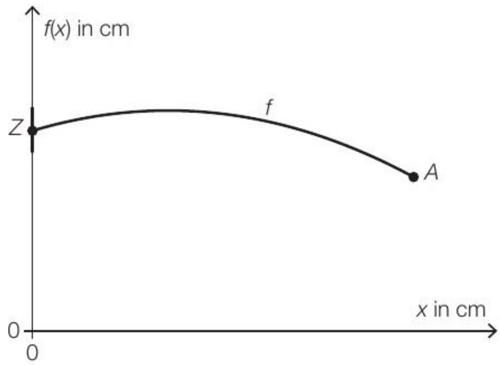
Beispiele BHS Aufgabenpool:

Darts * (A_302)

Darts ist ein Spiel, bei dem Pfeile auf eine kreisförmige Dartscheibe geworfen werden (siehe nebenstehende Abbildung).



c) Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft die Flugbahn eines Dartpfeils zwischen dem Abwurfpunkt A und dem Zielpunkt Z.



Die Flugbahn kann in diesem Modell durch den Graphen der quadratischen Funktion f beschrieben werden:

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x ... horizontaler Abstand zur Dartscheibe in cm
$f(x)$ ... Höhe über dem Boden im Abstand x in cm

Der Zielpunkt Z befindet sich in einer Höhe von 173 cm über dem Boden.
Die größte Höhe von 182 cm über dem Boden erreicht der Pfeil an derjenigen Stelle, an der er vom Zielpunkt Z einen horizontalen Abstand von 75 cm hat.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.

2) Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c.

Erfassen der Geschwindigkeit * (A_196)

Auf einer Teststrecke werden Messungen durchgeführt.

a) Die Teststrecke beginnt bei einem Stoppschild. Die Messergebnisse für ein Auto auf dieser Strecke sind in folgender Tabelle angegeben:

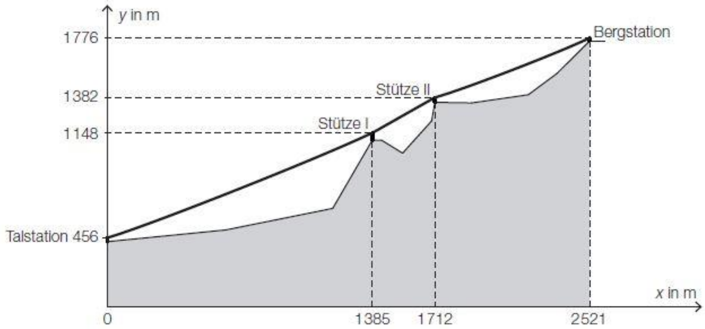
	am Stoppschild	Messung 1	Messung 2
Zeit t in min	0	1	2,5
zurückgelegter Weg $s_1(t)$ in km	0	1	3

Der zurückgelegte Weg soll in Abhängigkeit von der Zeit t im Zeitintervall [0; 2,5] durch eine Polynomfunktion s_1 mit $s_1(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschrieben werden.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion s_1.
– Berechnen Sie diese Koeffizienten.

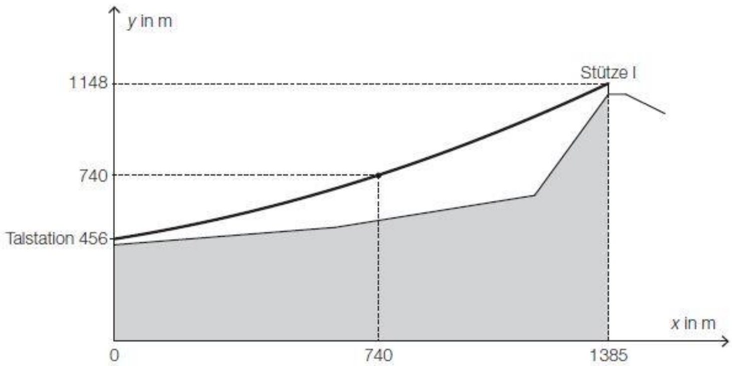
Gondelbahn auf den Untersberg * (A_224)

In nachstehender Abbildung ist der Verlauf des Tragseils der Gondelbahn von St. Leonhard auf den Untersberg vereinfacht dargestellt.



x ... horizontaler Abstand von der Talstation in Metern (m)
y ... Höhe über Meeresniveau in m

c) Aufgrund des Eigengewichts hängt das Tragseil zwischen der Talstation und der Stütze I durch. Sein Verlauf kann näherungsweise als Graph einer quadratischen Funktion mit der Gleichung $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten a, b und c ermittelt werden können.
– Ermitteln Sie a, b und c.

Strahlenbelastung * (A_207)

Bei einem Zwischenfall in einem Kernkraftwerk wurden in der näheren Umgebung Messungen der Dosisleistung durchgeführt. (Die Dosisleistung ist ein Maß für die Wirkung von Strahlung auf lebendes Gewebe pro Zeiteinheit.)

a) An einem bestimmten Tag wurden folgende Messwerte aufgezeichnet:

Uhrzeit in Stunden (h)	Dosisleistung in Millisievert pro Stunde (mSv/h)
0	0,0092
12	350
24	1050

Der zeitliche Verlauf der Dosisleistung wird durch die Funktion f beschrieben:

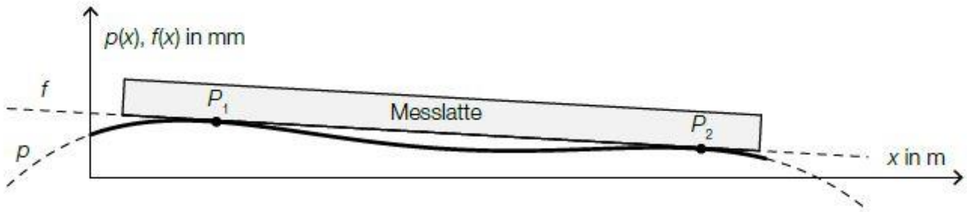
$f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$

t ... Uhrzeit in Stunden (h)
$f(t)$ ... Dosisleistung zum Zeitpunkt t in Millisievert pro Stunde (mSv/h)

– Stellen Sie dasjenige Gleichungssystem auf, mit dem Sie die Koeffizienten a, b und c berechnen können.

Bodenunebenheiten * (B_405)

Um Unebenheiten eines Bodens festzustellen, wird eine Messlatte verwendet.



Das Profil des Bodens kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion p beschrieben werden, die Unterkante der Messlatte kann durch den Graphen einer linearen Funktion f beschrieben werden.

c) Der Graph der Polynomfunktion p mit $p(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ verläuft durch die folgenden 5 Punkte:

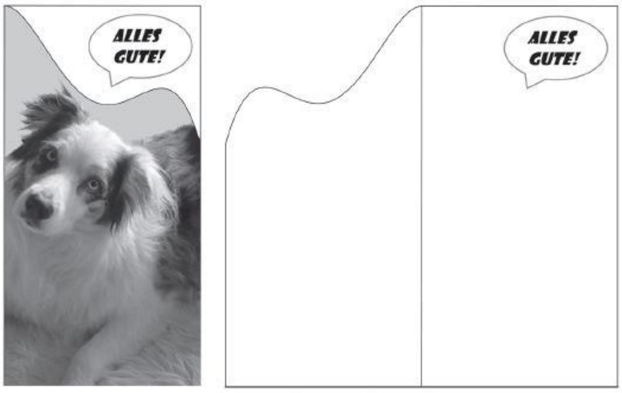
$A = (0|1{,}8)$, $B = (0{,}25|2{,}1)$, $C = (0{,}5|0{,}4)$, $D = (0{,}75|0{,}7)$, $E = (1|0{,}5)$

x ... horizontale Koordinate in Metern (m)
$p(x)$ ... vertikale Koordinate in Millimetern (mm)

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion p auf.
– Ermitteln Sie die Koeffizienten dieser Polynomfunktion p.

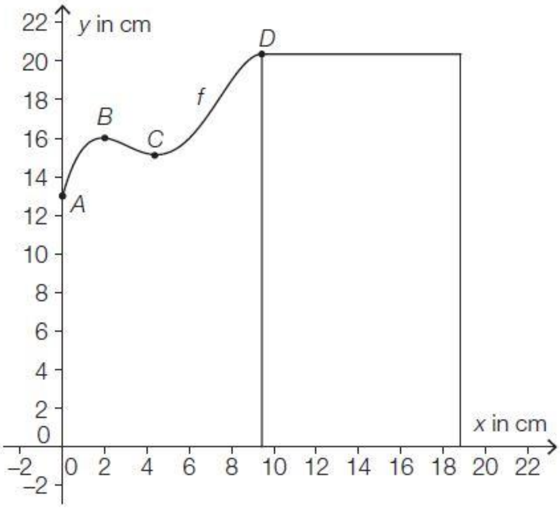
Grusskarte * (B_338)

Eine Druckerei soll Grußkarten nach folgendem Entwurf herstellen:



zugeklappt aufgeklappt

a) Die Form der Grußkarte kann folgendermaßen in einem Koordinatensystem dargestellt werden:



Der gewellte Teil der Begrenzungslinie der Karte kann durch den Graphen einer Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ beschrieben werden und verläuft durch folgende Punkte:

$A = (0|13)$
$B = (2|16)$
$C = (4{,}36|15{,}1)$
$D = (9{,}42|20{,}35)$

Im Punkt D hat der Graph von f eine waagrechte Tangente.

- Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten dieser Polynomfunktion berechnet werden können.
- Berechnen Sie die Koeffizienten dieser Polynomfunktion.

Kino * (B_519)

c) Ein Kino zeigt einen bestimmten Film gleichzeitig in 3 Kinosälen.

Im Kinosaal *X* wird der Film in der Standardversion gezeigt. Hier kostet ein Ticket € 14,80.
Im Kinosaal *Y* wird der Film in 3D gezeigt. Hier kostet ein Ticket € 17.
Im Kinosaal *Z* wird der Film im „Director's Cut" gezeigt. Hier kostet ein Ticket € 19,30.

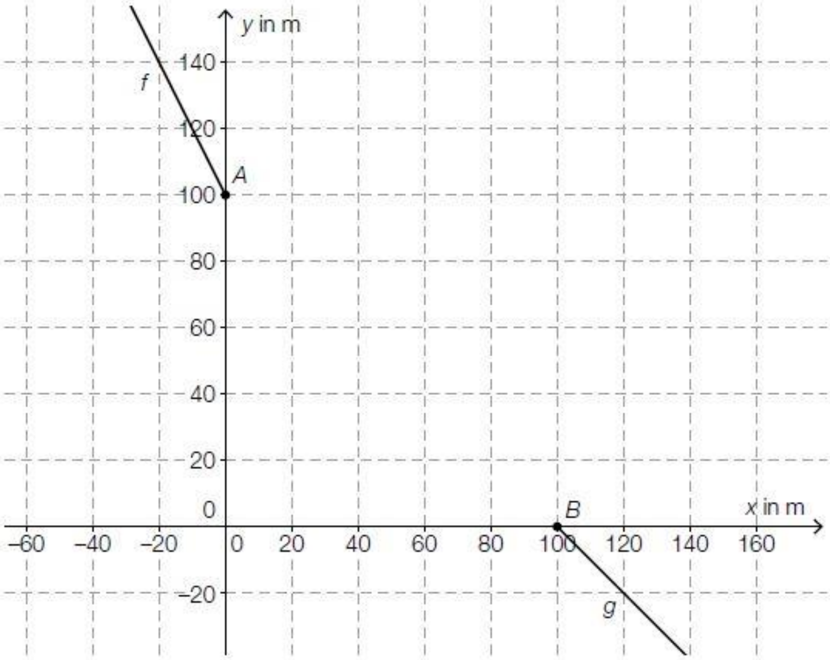
Insgesamt wurden 120 Tickets verkauft und € 2.067 eingenommen.
Für Kinosaal *Z* wurden 25 % mehr Tickets als für Kinosaal *X* verkauft.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Anzahl der jeweils verkauften Tickets für die Kinosäle *X*, *Y* und *Z*.
2) Berechnen Sie die Anzahl der jeweils verkauften Tickets für die Kinosäle *X*, *Y* und *Z*.

Strassenbau (2) * (B_408)

a) Zwischen zwei Punkten *A* und *B* soll eine Verbindungsstraße errichtet werden.

Die nachstehende Abbildung zeigt den Bauplan in einem Koordinatensystem in der Draufsicht (von oben betrachtet).



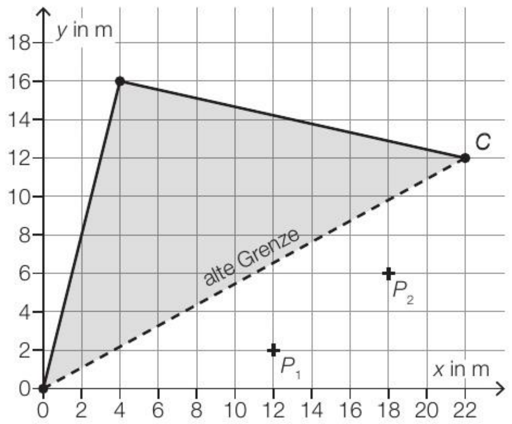
Zu Punkt *A* führt eine Straße, die durch den Graphen der linearen Funktion *f* dargestellt ist.
Zu Punkt *B* führt eine Straße, die durch den Graphen der linearen Funktion *g* dargestellt ist.

Die neue Straße, die *A* und *B* verbindet, soll durch den Graphen einer Polynomfunktion *h* mit $h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden. Diese Polynomfunktion soll im Punkt *A* die gleiche Steigung wie *f* und im Punkt *B* die gleiche Steigung wie *g* haben.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Ermittlung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion *h*.
– Ermitteln Sie die Koeffizienten von *h*.

Grundstuecke * (B_518)

b) Ein anderes dreieckiges Grundstück wird erweitert.
Die neue Grenze soll nun nicht mehr direkt vom Koordinatenursprung zum Punkt C verlaufen, sondern über die beiden markierten Punkte P_1 und P_2 (siehe nachstehende Abbildung).

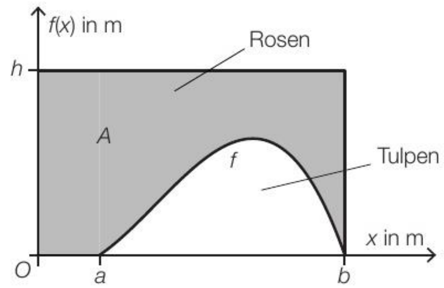


Der Verlauf dieser neuen Grenze soll durch den Graphen einer Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von f.
2) Berechnen Sie die Koeffizienten von f.
3) Berechnen Sie, um wie viele Quadratmeter der Flächeninhalt des Grundstücks durch die Erweiterung zunimmt.

Schlosspark * (B_507)

b) Ein rechteckiges Blumenbeet mit den Seitenlängen b und h ist in einen Bereich für Rosen und einen Bereich für Tulpen unterteilt. Die Begrenzungslinie zwischen diesen Bereichen kann modellhaft durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Stellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche auf.

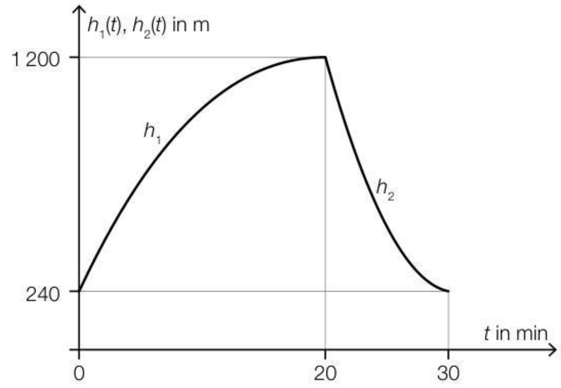
$A =$ ____________________

f ist eine Polynomfunktion 3. Grades mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$.
Folgende Punkte liegen auf dem Graphen von f: $(3|0{,}8)$, $(5|2{,}7)$, $(7|3{,}7)$, $(9|2{,}3)$.

2) Berechnen Sie mithilfe dieser Punkte die Koeffizienten a, b, c und d.

Ballonfahren * (B_553)

a) Die nachstehende Abbildung zeigt die Seehöhe (Höhe über dem Meeresspiegel), in der sich ein Heißluftballon während einer bestimmten Fahrt befindet. Diese Seehöhe wird durch die Graphen der Funktionen h_1 und h_2 beschrieben.



Der Heißluftballon startet zur Zeit $t = 0$ in 240 m Seehöhe.

Für die 1. Ableitung von h_1 gilt:
$h_1'(t) = 0{,}09 \cdot t^2 - 7{,}2 \cdot t + 108$

1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion h_1 auf.

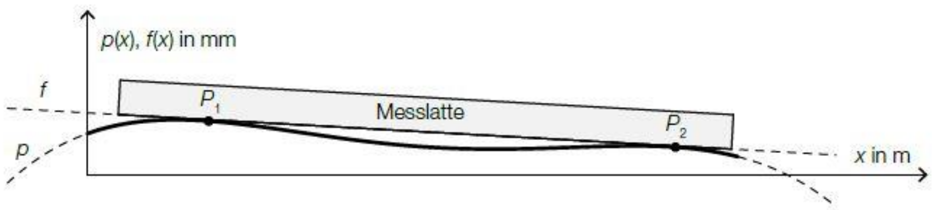
Nach 20 min befindet sich der Heißluftballon in 1 200 m Seehöhe und beginnt mit dem Sinkflug. Die Höhe während des Sinkflugs wird durch den Graphen der quadratischen Funktion h_2 mit $h_2(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschrieben. Nach 30 min landet der Heißluftballon mit einer Sinkgeschwindigkeit von 10 m/min auf 240 m Seehöhe.

2) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.
[0/1/2 P.]

3) Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c.

Bodenunebenheiten * (B_405)

Um Unebenheiten eines Bodens festzustellen, wird eine Messlatte verwendet.



Das Profil des Bodens kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion p beschrieben werden, die Unterkante der Messlatte kann durch den Graphen einer linearen Funktion f beschrieben werden.

b) – Begründen Sie, warum der Grad der in der obigen Abbildung dargestellten Polynomfunktion p größer oder gleich 4 sein muss.

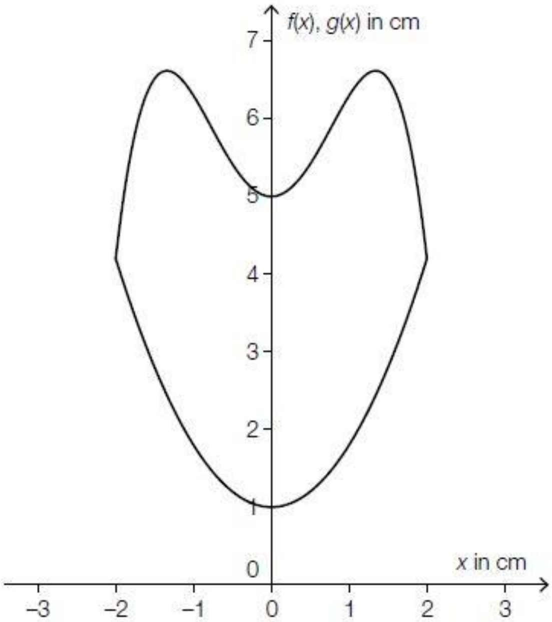
Bastelarbeit im Kindergarten * (B_336)

Als Werkarbeit in einem Kindergarten sollen Katzenköpfe aus Modelliermasse gestaltet werden. Als Vorlage dazu dient eine Ausstechform. Die Begrenzungslinien dieser Ausstechform können durch die Graphen der Funktionen f und g beschrieben werden:

$f(x) = -0{,}5 \cdot x^4 + 1{,}8 \cdot x^2 + 5$
$g(x) = 0{,}8 \cdot x^2 + 1$

x, $f(x)$, $g(x)$ ... Koordinaten in cm

Die Graphen dieser Funktionen sind in der nachstehenden Abbildung dargestellt.

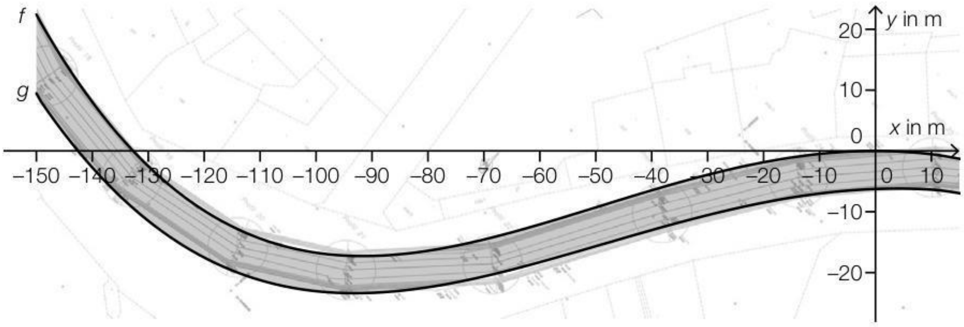


a) 1) Argumentieren Sie mithilfe der Funktionsgleichungen, dass der Graph der Funktion f die obere Begrenzungslinie und der Graph der Funktion g die untere Begrenzungslinie beschreibt (und nicht umgekehrt).

Der Grazbach * (B_561)

Der Kroisbach und der Leonhardbach sind Bäche in Graz, die nach ihrem Zusammenfluss den Grazbach bilden.

c) In der nachstehenden Abbildung ist ein Abschnitt des Kanals des Grazbachs in einem Vermessungsplan modellhaft dargestellt.



Ein Vermesser modelliert die Begrenzungslinien des Kanals im Intervall [–150; 15] mit den Graphen der Funktionen f und g.

1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der in der obigen Abbildung grau markierten Fläche auf.

$A =$ ______________________________

Für die Polynomfunktion 4. Grades f gilt: $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2$

Der Graph von f hat den Tiefpunkt $T = (-92{,}2 \mid -17{,}6)$ und schneidet die x-Achse an der Stelle $x = -133{,}5$.

2) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.

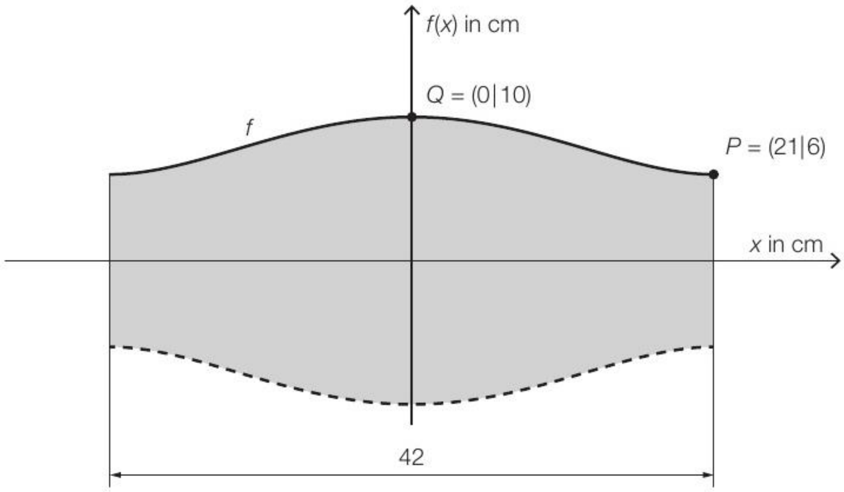
Die Funktion g ist ebenfalls eine Polynomfunktion 4. Grades.

3) Kreuzen Sie diejenige Aussage an, die auf die Funktion g im Intervall [–150; 15] zutrifft. *[1 aus 5]*

g hat genau 2 Nullstellen.	☐
g ändert genau 1-mal das Monotonieverhalten.	☐
g hat nur negative Funktionswerte.	☐
g hat genau 1 lokale Extremstelle.	☐
g ändert genau 1-mal das Krümmungsverhalten.	☐

Hochstuhl für Kinder * (B_476)

b) In der nachstehenden Abbildung ist ein Modell der Rückenlehne eines bestimmten Hochstuhls dargestellt.



Die obere Begrenzungslinie lässt sich näherungsweise durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$ beschreiben. Im Punkt P verläuft die Tangente an den Graphen der Funktion f waagrecht.

1) Erstellen Sie mithilfe der Informationen zu P und Q ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.
2) Berechnen Sie diese Koeffizienten.

Die untere Begrenzungslinie entsteht durch Spiegelung des Graphen der Funktion f an der x-Achse.

3) Ermitteln Sie den Inhalt der in der obigen Abbildung grau markierten Fläche.

Wintersportwoche (B_243)

c) Die fortgeschrittenen Snowboarder/innen vergnügen sich in einem Obstacle-Course. Der Querschnitt eines Hindernisses wird durch die Funktion h modelliert.

$h(x) = (5{,}69 \cdot 10^{-4}) \cdot x^4 - (9{,}1 \cdot 10^{-3}) \cdot x^2$ mit $-9 \le x \le 9$

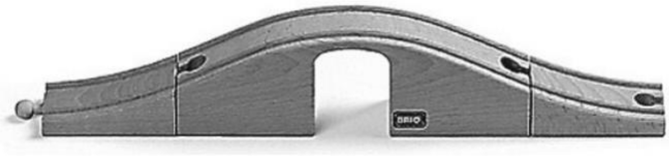
x … Koordinate der Querschnittsgrundlinie in Metern (m)
$h(x)$ … Höhe an der Stelle x in Metern (m)

– Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der Funktion h.
– Berechnen Sie die Steigung an der Stelle $x = 8$.

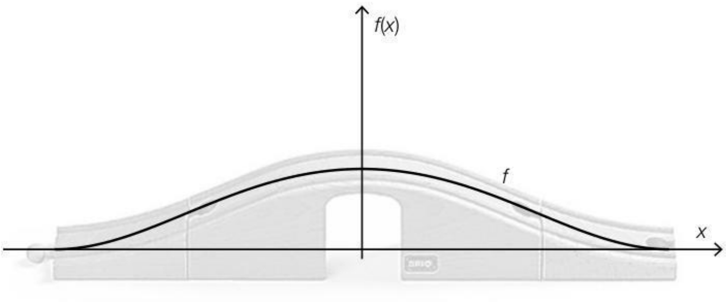
Holzzug * (B_560)

Holzzüge sind nach wie vor bei Kindern sehr beliebt.

b) In der nachstehenden Abbildung ist eine Brücke für einen Holzzug dargestellt.



Der Verlauf der oberen Begrenzungslinie soll durch den Graphen der Funktion *f* beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Kreuzen Sie denjenigen Funktionstyp an, der auf *f* zutreffen kann. *[1 aus 5]*

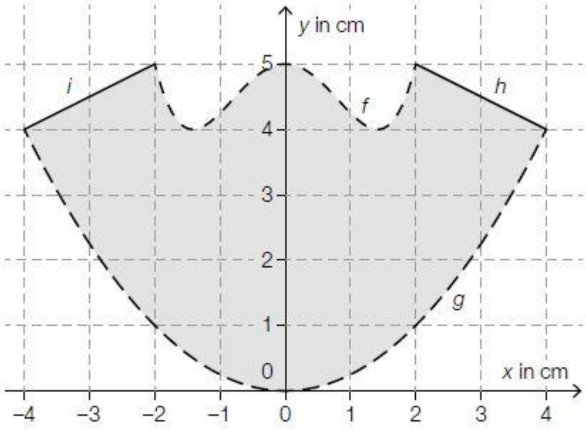
quadratische Funktion	☐
Polynomfunktion 3. Grades	☐
Polynomfunktion 4. Grades	☐
lineare Funktion	☐
Logarithmusfunktion	☐

2) Geben Sie die Anzahl der Stellen von *f* an, für die sowohl $f''(x) = 0$ als auch $f'(x) \neq 0$ gilt.

Anzahl der Stellen: ____________________

Skulptur * (B_464)

Eine Skulptur wird von oben betrachtet. Die Deckfläche ist waagrecht und eben. Sie ist in der nachstehenden Abbildung in einem Koordinatensystem dargestellt. Dabei ist die Deckfläche symmetrisch zur y-Achse und wird durch die Graphen der Funktionen f, g, h und i begrenzt.



b) Für die Funktion f gilt:

$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$

Es gilt: $f'(1) = -1$

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.

2) Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c.

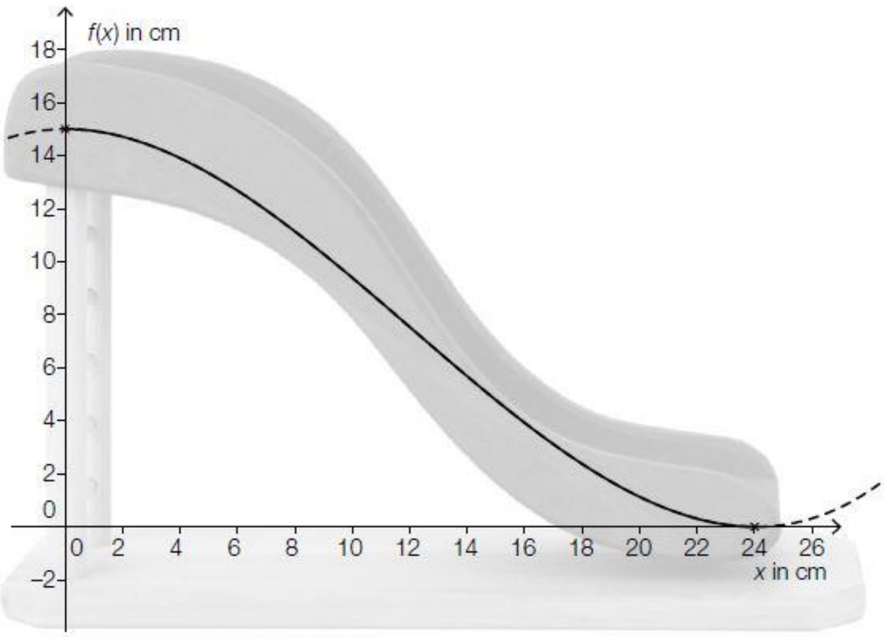
Puppenrutsche * (B_373)

a) In der unten stehenden Abbildung ist eine Puppenrutsche dargestellt. Das seitliche Profil dieser Puppenrutsche kann annähernd durch eine Polynomfunktion 3. Grades f modelliert werden:

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $0 \leq x \leq 24$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in cm

Der Graph der Funktion f hat an den Stellen $x = 0$ und $x = 24$ jeweils eine horizontale Tangente.



Bildquelle: http://www.spielzeug-truhe.de/artikel-277.htm [01.12.2014] (adaptiert).

1) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten dieser Polynomfunktion berechnet werden können.