2.10 Exponentialgleichungen

Maturaskript BHS – Teil A (4 Seiten)

Grundkompetenzen:

- **2.10** Exponentialgleichungen vom Typ $a^{k \cdot x} = b$ nach x auflösen

$$5^x = 13 \mid \lg(\,)$$

$$\lg(5^x) = \lg(13) \mid Exponentenregel$$

$$x \cdot \lg(5) = \lg(13) \mid : \lg(5))$$

$$x = \frac{\lg(13)}{\lg(5)} = 1.59$$

Anwendung des Zehnerlogarithmus lg auf beiden Seiten!!! (=Äquivalenzumformung)

Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Prof. πegischer

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM
2) Gib im Feld „**Volltextsuche**" die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. A_263) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**" und „**GeoGebra**" erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**" erstellt.

Lizenzbedingungen:

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialie

BHS Teil A 2.10: Exponentialgleichungen

Exponentialgleichungen mit Hilfe des Logarithmus lösen:

[Video]

Eine Gleichung der Art $\boldsymbol{a^x = b}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $a \neq 1$ wird als **Exponentialgleichung** bezeichnet. Sie besitzt immer genau eine reelle Lösung!

Zum Lösen von Exponentialgleichungen ist vor allem die **Exponentenregel** wichtig, da sie uns erlaubt, **Gleichungen** zu **lösen**, in denen **die Variable** im **Exponenten** steht! Mit Hilfe der Exponentenregel gelingt es, die Variable von der Hochzahl nach unten zu bringen!!

Beispiel:

$$5^x = 13 \mid \lg(\,)$$

$$\lg(5^x) = \lg(13) \mid Exponentenregel$$

$$x \cdot \lg(5) = \lg(13) \mid :\lg(5))$$

$$x = \frac{\lg(13)}{\lg(5)} = 1.59$$

Anwendung des Zehnerlogarithmus lg auf beiden Seiten!!! (=Äquivalenzumformung)

Bemerkungen:

- Wende den Logarithmus erst so spät wie möglich an! So gehst du den häufigsten Fehlern aus dem Weg!

- Es ist egal, ob du **ln** (Logarithmus zur Basis e) oder **lg** (Logarithmus zur Basis 10) verwendest. Wichtig ist nur, dass du in einer Rechnung die **Basis nicht mischt**.

- Rechentechnisch ist es ratsam **ln** zu verwenden, wenn die Eulersche Zahl **e** als **Basis** vorkommt und **lg** zu verwenden, wenn **10** als Basis vorkommt. Die Begründung ist: $lg(10) = ln(e) = 1$

Beispiel (Wachstumsprozesse): Stelle **t** frei: $N_t = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t} \quad \mid : N_0$

$$\frac{N_t}{N_0} = e^{\lambda \cdot t} \quad \mid \ln(\,)$$

$$\ln\left(\frac{N_t}{N_0}\right) = \ln\left(e^{\lambda \cdot t}\right) \quad \mid Exponentenregel$$

$$\ln\left(\frac{N_t}{N_0}\right) = (\lambda \cdot t) \cdot \ln(e) \quad \mid \ln e = 1$$

$$\ln\left(\frac{N_t}{N_0}\right) = (\lambda \cdot t) \cdot 1 \quad \mid :\lambda$$

$$\frac{\ln\left(\frac{N_t}{N_0}\right)}{\lambda} = t$$

Bsp. 1) Löse die Exponentialgleichung.

a. $7^x = 16$	**b.** $2^{3x} = 7$	**c.** $5^x = 26$
d. $0{,}34^{4x} = 2$	**e.** $3^{x+3} = 7$	**f.** $4^{5x+4} = 7$

Bsp. 2) Für die Anzahl N_t von Bakterien nach t Stunden gilt: $N_t = 5000 \cdot 1{,}35^t$.

- **a.** Wie viele Bakterien sind nach vier Stunden vorhanden?
- **b.** Nach welcher Zeit ist die Anzahl der Bakterien auf 100 000 angewachsen?
- **c.** Bestimme die Verdopplungszeit (=Zeit, wann sich die Bakterien verdoppeln).

Die Genussformel * (A_263)

Der Physiker Werner Gruber erklärt in seinem Buch *Die Genussformel* (Salzburg: Ecowin, 2008) die kleinen chemischen und physikalischen Tricks der großen Köchinnen und Köche. Dabei werden auch mathematische Zusammenhänge betrachtet.

a) In der *Genussformel* betrachtet Gruber den Genuss beim Essen als messbare Größe mit Werten von 0 (kein Genuss) bis 1 (maximaler Genuss). Für die Abhängigkeit des Genusses von der Anzahl der Geschmacksrichtungen auf einem Teller gibt Gruber folgende Funktion G an:

$$G(n) = e^{-\frac{(n-3)^2}{0{,}2746}}$$

n ... Anzahl der unterschiedlichen Geschmacksrichtungen auf dem Teller
$G(n)$ ... Genuss bei n unterschiedlichen Geschmacksrichtungen auf dem Teller

– Ermitteln Sie diejenige Anzahl an unterschiedlichen Geschmacksrichtungen, bei der man laut Gruber den maximalen Genuss hat.

Luftdruck - Hoehenformel * (A_209)

Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe über dem Meeresspiegel (Seehöhe) ab. Der Zusammenhang kann durch Exponentialfunktionen oder näherungsweise durch lineare Funktionen beschrieben werden.

a) Ein Modell zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen der Höhe über dem Meeresspiegel und dem Luftdruck ist die *barometrische Höhenformel*:

$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7991}}$

h ... Höhe über dem Meeresspiegel in Metern (m)
$p(h)$ ... Luftdruck in der Höhe h in Hektopascal (hPa)

– Zeigen Sie, dass p_0 der Luftdruck auf der Höhe des Meeresspiegels ist.
– Berechnen Sie diejenige Seehöhe, bei der der Luftdruck genau die Hälfte von p_0 beträgt.

Medikamentenabbau (1) * (A_251)

Der Abbau von Medikamenten im Körper kann näherungsweise durch exponentielle Modelle beschrieben werden.

d) Der Abbau eines anderen Medikaments im Körper kann näherungsweise durch die Funktion N beschrieben werden:

$N(t) = 200 \cdot e^{-0{,}3 \cdot t}$

t ... Zeit ab Verabreichung des Medikaments in h
$N(t)$ ... vorhandene Menge des Medikaments im Körper zur Zeit t in mg

Das Medikament muss wieder verabreicht werden, sobald nur noch 15 % der Ausgangsmenge im Körper vorhanden sind.

– Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem das Medikament wieder verabreicht werden muss.

Sonnenblumen * (A_329)

b) Die Höhe einer anderen Sonnenblume lässt sich in Abhängigkeit von der Zeit t in einem bestimmten Zeitintervall näherungsweise durch die Funktion h beschreiben.

$h(t) = 6{,}2 \cdot a^t$

t ... Zeit ab dem Beobachtungsbeginn in Tagen
$h(t)$ ... Höhe der Sonnenblume zur Zeit t in cm

Zur Zeit $t = 17$ beträgt die Höhe der Sonnenblume 38,6 cm.

1) Berechnen Sie a.
2) Berechnen Sie die Anzahl der Tage, in denen sich die Höhe dieser Sonnenblume jeweils vervierfacht.

Verdoppelungszeit von Bakterien (A_234)

b) Eine Menge von 100 *Lactobacillus-acidophilus*-Bakterien vermehrte sich innerhalb von 6 Stunden auf eine Anzahl von 3 533 Bakterien.

– Ermitteln Sie unter Annahme eines exponentiellen Wachstums die Verdoppelungszeit in Minuten.

Streaming * (B_501)

Ein Fernsehsender entschließt sich, einen Streaming-Dienst für Filme auf den Markt zu bringen. Damit können Filme über das Internet abgespielt werden.
Die Zeit nach der Markteinführung in Monaten wird mit t bezeichnet.

a) Bei der Markteinführung ($t = 0$) nutzen 1 000 Kunden dieses Angebot.

Die Anzahl der Kunden steigt im 1. Jahr nach der Markteinführung pro Monat jeweils um etwa 20 % bezogen auf die Anzahl des jeweiligen Vormonats.

Die Anzahl der Kunden soll in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Funktion.
2) Berechnen Sie die Anzahl der Kunden für $t = 7$.
3) Berechnen Sie, wie lange es nach der Markteinführung dauert, bis die Anzahl der Kunden erstmals 8 000 übersteigt.