5.5 Binomialverteilung

Maturaskript BHS – Teil A (21 Seiten)

Grundkompetenzen:

- **5.5** mit der Binomialverteilung modellieren, ihre Anwendung begründen, Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswert berechnen und die Ergebnisse kontextbezogen interpretieren

Wie oft tritt Erfolg ein?
Erfolg = Gewonnener Satz von Sarah

Wie oft tritt Misserfolg ein?
Misserfolg = Verlorener Satz von Sarah

Wie viele Sätze werden gespielt? $n = 3$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^1$$

Binomialkoeffizient $\binom{3}{2}$

Wahrscheinlichkeit für Misserfolg 1-p

Erfolgswahrscheinlichkeit p

Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Prof. Tegischer

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM
2) Gib im Feld „**Volltextsuche**" die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. A_263) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**" und „**GeoGebra**" erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**" erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln	**Weitere Regeln für Lehrpersonen**
▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen. ▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen. ▪ Sie dürfen mein Materialen **NICHT** gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden. ▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden. ▪ Bei einem **Missbrauch** erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.	**WICHTIGSTE REGEL:** LehrerInnen dürfen die Materialien in **Ihrem eigenen Unterricht** verwenden: ▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen. ▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben. ▪ Es ist **nicht erlaubt**, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben. ▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

BHS Teil A 5.5 – Binomialverteilung

1. Der Binomialkoeffizient:

Definition: Aus einer Menge bestehend aus n Elementen werden k Elemente (ohne Wiederholung/Zurücklegen) ausgewählt. Die Anzahl der Möglichkeiten, wie die k Elemente ohne Beachtung der Reihenfolge ausgewählt werden können, berechnet man mit dem **Binomialkoeffizienten**:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Video 1/4

- **Sprechweise**: n über k
- Der Binomialkoeffizient ist kein Vektor, sondern eine reelle Zahl (-> Rechnung)
- Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus n Elementen k Elemente auszuwählen, wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt.

Beispiel 1

Im Zeichenunterricht sollen die Kinder aus ihrem Malkasten (10 Farben) vier verschiedene Farben für ihre nächste Zeichnung aussuchen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, vier verschiedene Farben aus 10 möglichen zu wählen?

- **ohne Wiederholung**: die Farben müssen verschieden sein und dürfen nicht doppelt gewählt.
- **ohne Reihenfolge**: es spielt keine Rolle, welche die erste Farbe der Kinder ist, an die sie denken. Sie sollen gesamt vier Farben auswählen.

➔ aufgrund dessen: Lösen mit dem Binomialkoeffizienten. Aus 10 möglichen Farben sollen vier gewählt werden:

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{(10-4)! \cdot 4!} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5040}{24} = 210\ Möglichkeiten$$

Rechenregeln für den Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{n} = 1 \quad \rightarrow \quad \binom{10}{10} = 1$$

$$\binom{n}{1} = 1 \quad \rightarrow \quad \binom{8}{1} = 8$$

$$\binom{n}{n-1} = n \quad \rightarrow \quad \binom{7}{7-1} = 7$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \rightarrow \quad \binom{10}{3} = \binom{10}{7}$$

Bsp. 1) Berechne den Binomialkoeffizienten.

a. $\binom{4}{2} =$	b. $\binom{7}{2} =$	c. $\binom{8}{8} =$
d. $\binom{14}{9} =$	e. $\binom{14}{10} =$	f. $\binom{23}{20} =$

Bsp. 2) Für eine Veranstaltung haben sich 12 Personen für einen Posten im Organisationsteam gemeldet.

a. Unter diesen Personen soll ein fünfköpfiges Team gewählt werden, welches den Ticket-Verkauf organisiert. Auf wie viele unterschiedlichen Möglichkeiten kann das Team bestimmt werden?

b. Aus den verbleibenden sieben Personen sollen sich drei für das Sicherheits-Team melden, die die Veranstaltung sicherheitstechnisch absichern und abwickeln. Wie viele Möglichkeiten ergeben sich für die Bildung dieses Teams?

Bsp. 3) Ein Eishockeytrainer besitzt einen Spielerkader von 13 fitten Spielern.

a. Für ein Hobby-Spiel möchte er sechs Spieler zufällig auswählen. Wie viele Möglichkeiten hat der Trainer, die Spieler aus der Startelf zu bestimmen?

b. Das Spiel endet nach 60 Minuten inkl. Overtime 8:8 und wird mit dem Penalty-Schießen entschieden. Drei Penalty-Schützen treten an. In jeder Mannschaft sind sechs Spieler. Wie viele Optionen hat der Trainer, die drei Schützen zu bestimmen?

Bsp. 4) In einem Trainingscamp für den olympischen Zweier-Bob-Bewerb nehmen acht potenzielle Kandidaten teil. Auf wie viele unterschiedliche Arten kann das Bob-Team zusammengestellt werden?

Bsp. 5) In einer Hip-Hop Tanzgruppe nehmen 16 begeisterte Tänzerinnen und Tänzer teil. Für den nächsten Auftritt werden k Personen $(k \leq n)$ ausgewählt.

Berechne (falls möglich) und interpretiere die Binomialkoeffizienten im gegebenen Kontext:

a. $\binom{16}{10} =$	b. $\binom{16}{4} =$

Bsp. 6) Bei einer Frauen-Handballmannschaft stehen dem Trainer 14 aktive Spielerinnen für 6 Positionen zur Verfügung. Interpretiere den Ausdruck $\binom{14}{6}$ im gegebenen Kontext.

2. Bernoulli-Experiment und Binomialverteilung

Man spricht bei einem Zufallsversuch von einem **Bernoulli-Experiment**, wenn folgende Bedingungen gelten:

- Es dürfen **nur zwei Ereignisse** auftreten – meist: Erfolg & Misserfolg
  Die Wahrscheinlichkeit für **Erfolg** wird mit der **Erfolgswahrscheinlichkeit** $\boldsymbol{p}$ bezeichnet, für **Misserfolg** mit $\mathbf{1-p}$ (Gegenwahrscheinlichkeit).

Führt man das Bernoulli-Experiment n-mal aus, so spricht man von einem **n-stufigen Bernoulli-Experiment**. Die Bedingungen bleiben dieselben:

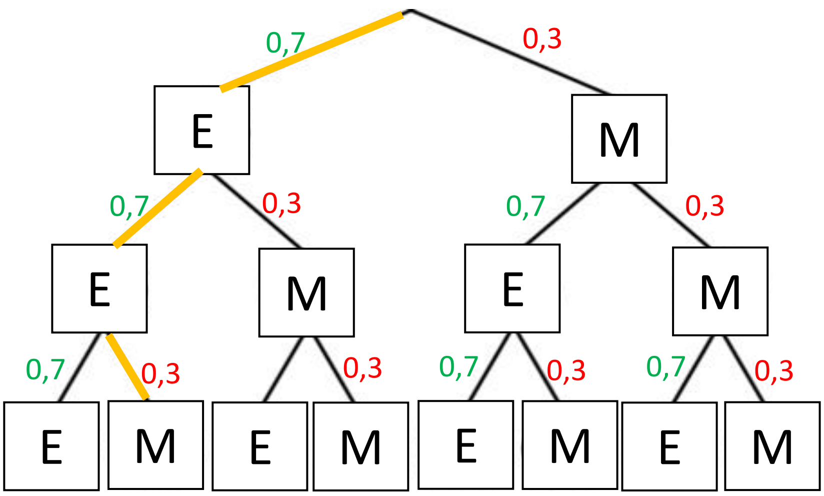
- Jeder Einzelversuch besitzt **genau zwei Versuchsausgänge**: Erfolg & Misserfolg.
- Jeder Einzelversuch wird unter **denselben Bedingungen** ausgeführt.
  Die Wahrscheinlichkeiten p & 1-p bleiben gleich.

Beispiel: Beim Tischtennis spielen Robin und Sarah gegeneinander. Aus Erfahrung weiß man, dass Sarah die bessere Spielerin ist. Sie gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 % einen Satz.

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Satzgewinne von Sarah. Sarah und Robin spielen drei Mal gegeneinander.

- Mit der Erfolgswahrscheinlichkeit von $p = 0{,}7$ gewinnt Sarah einen Satz.
- Mit der Wahrscheinlichkeit von $1 - p = 0{,}3$ gewinnt Robin einen Satz.

Wir veranschaulichen das dreistufige Bernoulli-Experiment mit Hilfe eines Baumdiagramms. Die Ereignisse sind dabei Erfolg E (Satzgewinn Sarah) und Misserfolg M (Satzgewinn Robin).

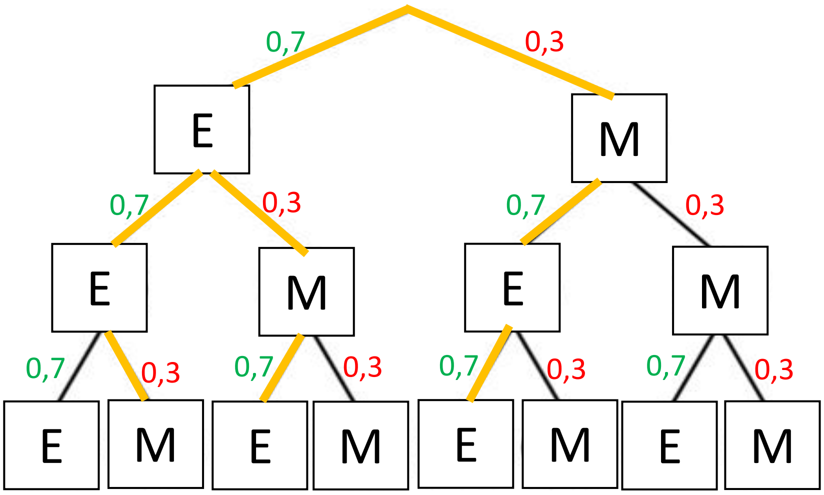


Fragestellung 1: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sarah die ersten beiden Sätze gewinnt und den dritten Satz verliert? – Anwendung Produktregel vom Baumdiagramm

$$P(erste\ 2\ Sätze\ gewinnen, 3. Satz\ verliert) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}147 = 14{,}7\ \%$$

Fragestellung 2: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sarah zwei Sätze gewinnt?

Anwendung Produkt- und Summenregeln vom Baumdiagramm:



Erinnerung: Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gewonnen Sätze von Sarah an.

$P(X=2) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = \mathbf{3} \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = \binom{3}{2} \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}441 = 44{,}1\,\%$

Was fällt uns auf?

Die Wahrscheinlichkeit, mit der Sarah zwei Sätze und Robin einen Satz gewinnt ist stets $0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3$.

Es ist Sarah aber **frei** gelassen, **in welcher Reihenfolge** sie die **zwei Sätze** gewinnt. Sie muss aus drei Sätzen zwei Sätze gewinnen. Wie viele Möglichkeiten hat sie dazu?

- Sieg / Sieg / Niederlage
- Sieg / Niederlage / Sieg
- Niederlage / Sieg / Sieg

$\binom{3}{2} = 3$ Möglichkeiten

Der Binomialkoeffizient $\binom{3}{2}$ gibt an, auf wie viele verschiedene Möglichkeiten Sarah von drei Sätzen zwei gewinnen kann. Zur Berechnung verwendet man folgende Formel:

Wie oft tritt Erfolg ein?
Erfolg = Gewonnener Satz von Sarah

Wie oft tritt Misserfolg ein?
Misserfolg = Verlorener Satz von Sarah

Wie viele Sätze werden gespielt? $n = 3$

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^1$$

Binomialkoeffizient $\binom{3}{2}$

Wahrscheinlichkeit für Misserfolg 1-p

Erfolgswahrscheinlichkeit p

Binomialverteilung:
Wird ein Bernoulli-Experiment n-mal mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p durchgeführt und gibt die diskrete Zufallsvariable X die Anzahl der Versuche an, bei denen das Ereignis E mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p eintritt, so gilt für die Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$:

$$f(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad mit\ 0 \leq p \leq 1\ und\ k = 0,1,2, \dots, n$$

- Die **diskrete Zufallsvariable X** heißt **binomialverteilt**.
- Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung f** wird als **Binomialverteilung** $B(n, p)$ mit den Parametern n und p bezeichnet.
- Die **Variable n** gibt die **Anzahl** der **Versuche** an.
- Es gibt zwei mögliche Ausgänge: Erfolg - Misserfolg
- Die **Erfolgswahrscheinlichkeit p** gibt die **Wahrscheinlichkeit** an, mit der das gewünschte Ereignis (= **Erfolg**) eintritt.

Bemerkungen zur Formel:

k: Wie oft tritt Erfolg ein?

$n - k$: Wie oft tritt Misserfolg ein?

n: Anzahl der Versuche

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$
Anzahl der Möglichkeiten, dass bei n Versuchen k Mal Erfolg eintritt

Erfolgswahrscheinlichkeit p
Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt Erfolg ein?

$1 - p$:
Wahrscheinlichkeit für Misserfolg

Die Formel der Binomialverteilung schaut auf den ersten Blick deutlich komplizierter aus, als die Thematik dahinter ist. Betrachten wir dazu noch einmal das Musterbeispiel mit folgender Fragestellung:

Sarah und Robin spielen 10 Sätze. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Sarah **sieben Sätze**?

- Anzahl Sätze $n = 10$
- Wie tritt Erfolg ein: $k = 7$
- Wahrscheinlichkeit für Erfolg:$p = 0{,}7$
- Wie oft tritt Misserfolg ein: $n - k = 3$
- Wahrscheinlichkeit für Misserfolg: $1 - p = 0{,}3$
- Anzahl der Möglichkeiten, von 10 Sätzen 7 zu gewinnen: $\binom{10}{7}$

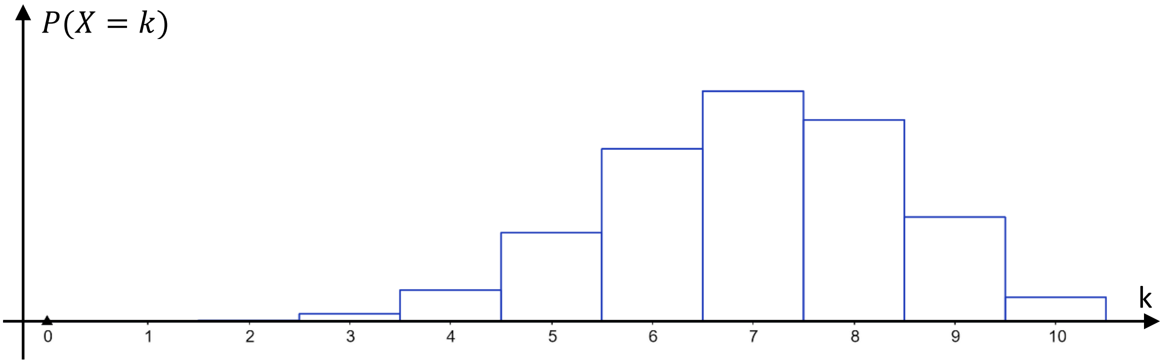
$$P(X = 7) = \binom{10}{7} \cdot 0{,}7^7 \cdot 0{,}3^3 = 0{,}2668 \approx 26{,}7\ \%$$

Interpretiere folgenden Ausdruck im **Sachzusammenhang**: $\binom{9}{2} \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^7$

Der Ausdruck gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass Sarah bei neun gespielten Sätzen gerade einmal zwei gewinnt.

Graphische Darstellung der **Wahrscheinlichkeitsverteilung** mit $n = 10$ und $p = 0{,}7$:

k	$P(X = k)$
0	0,0000059
1	0,00014
2	0,0014
3	0,009
4	0,037
5	0,103
6	0,200
7	0,267
8	0,233
9	0,121
10	0,028



WICHTIG: Die Erfolgswahrscheinlichkeit p gibt die Wahrscheinlichkeit für Erfolg bei einem Einzelversuch an!

Bsp. 7) In einer Urne sind 40 Kugeln enthalten. 30 Kugeln sind mit der Aufschrift „du gewinnst leider nichts“ beschriftet. Die restlichen Kugeln sind mit der Aufschrift „du gewinnst 100 €“ beschriftet.

Es wird sieben Mal mit Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Kugeln an, mit denen die Person 100 € gewonnen hat.

a. Ist die Zufallsvariable X binomialverteilt? Begründe.
b. Gib die Parameter p und n an. Stelle die Binomialverteilung auf.
c. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person 200 € gewinnt?
d. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person mindestens 600 € gewinnt?
e. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person maximal drei Kugeln zieht, mit denen sie gewinnt?
f. Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X als Tabelle und graphisch dar.

Bsp. 8) Beim Tennisspielen gewinnt Markus erfahrungsgemäß zu 80 % einen Satz gegen Paul. Markus und Paul spielen an diesem Tag am Vormittag vier Sätze und am Nachmittag weitere drei.

Video 2/4

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gewonnenen Sätze von Paul an diesem Tag an.

SCAN MICH

a. Ist die Zufallsvariable X binomialverteilt? Begründe.
b. Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung als Tabelle und graphisch als Diagramm dar.
c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Paul maximal drei Sätze gewinnt.
d. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Paul mindestens fünf Sätze gewinnt.
e. Am nächsten Tag sind sie etwas müde und spielen weniger Sätze. Interpretiere den Ausdruck im gegebenen Kontext:

$$\binom{5}{3} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 + \binom{5}{4} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^1 + 0{,}8^5$$

Bsp. 9) Bei einer Produktion von Spielkonsolen ist ein Gerät erfahrungsgemäß zu einem Prozent defekt. Es werden 200 Konsolen auf ihre Funktionalität überprüft. Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl geprüften Geräte, die fehlerhaft sind.

a. Ist die Zufallsvariable X binomialverteilt?

b. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass maximal drei Geräte defekt sind.

c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Überprüfung kein Gerät defekt ist.

Bsp. 10) Beim Biathlon trifft ein Biathlet beim Liegend-Schießen mit 95 %-iger Wahrscheinlichkeit, sowie beim Stehend-Schießen mit 80%-iger Wahrscheinlichkeit die Zielscheibe.

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer an.

a. Im Sprint-Bewerb muss der Sportler fünf Schüsse liegend abgeben. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Sportler genau vier Mal die Scheibe trifft.

b. Im Einzel-Bewerb über 20 Kilometer werden 10 Schüsse stehend abgegeben. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Biathlet (i) genau sieben, (ii) maximal drei, (iii) mindestens acht Scheiben trifft.

c. An einem Trainingstag legt der Biathlet eine Schusserie von 40 Schüssen in liegender Position hin. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Biathlet mindestens 38 Treffer erzielt.

d. Am selben Trainingstag legt der Sportler noch eine Stehend-Serie hin. Interpretiere den Ausdruck im gegebenen Kontext:

$$\binom{20}{19} \cdot 0{,}8^{19} \cdot 0{,}2^{1} + \binom{20}{20} \cdot 0{,}8^{20} \cdot 0{,}2^{0}$$

Bsp. 11) Kreuze die beiden äquivalente Terme zum Term $\binom{10}{3} \cdot 0{,}6^{3} \cdot 0{,}4^{7}$ an.

$\binom{10}{3} \cdot 0{,}6^{3} \cdot (1-0{,}4)^{7}$	O
$\binom{10}{7} \cdot 0{,}6^{3} \cdot (1-0{,}6)^{7}$	O
$720 \cdot 0{,}6^{3} \cdot 0{,}4^{10-3}$	O
$120 \cdot 0{,}6^{3} \cdot 0{,}4^{7}$	O
$120 \cdot 0{,}6^{7} \cdot 0{,}4^{3}$	O

Bsp. 12) Ein Fußballspieler verwertet erfahrungsgemäß zu 90 % einen Elfmeter. Im Training tritt er sieben Mal nacheinander gegen den Torhüter an. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer des Schützen an.

a. Welche Werte kann die Zufallsvariable X annehmen? Ist die Zufallsvariable X binomialverteilt? Begründe.

b. Stelle die Tabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung auf.

c. Lies die Wahrscheinlichkeit aus der Tabelle ab, dass der Spieler genau vier Elfmeter verwertet.

d. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Schütze mindestens fünf Elfmeter verwertet.

e. Interpretiere den Ausdruck im gegebenen Kontext:

$$0{,}1^7 + 7 \cdot 0{,}9^1 \cdot 0{,}1^6$$

Video 3/4

Musterbeispiel:

Ein Basketballspieler verwertet einen Wurf von der Mittellinie mit einer Wahrscheinlichkeit von 24%. **Wie oft müsste der Basketballer werfen, dass er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens einmal von der Mittellinie trifft?**

Gesucht: Mindestens ein Treffer mit der Wahrscheinlichkeit von 90 %

➔ Gegenwahrscheinlichkeit zu mindestens ein Treffer = Kein Treffer

Wahrscheinlichkeit für keinen Treffer: $0{,}76 \cdot 0{,}76 \cdot \ldots \cdot 0{,}76 = 0{,}76^n$ (bei n Würfen)

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Schütze mindestens einmal trifft, wird über die Gegenwahrscheinlichkeit ausgedrückt:

$$P(\text{mindestens 1 Treffer}) = 1 - 0{,}76^n \quad \geq 0{,}9$$

Diese Wahrscheinlichkeit soll größer als 90 % sein. Es muss folgende Ungleichung gelöst werden:

$$1 - 0{,}76^n \geq 0{,}9 \quad | + 0{,}76^n, -0{,}9$$

$$0{,}1 \geq 0{,}76^n \quad | \, ln$$

$$\ln(0{,}01) \geq n \cdot \ln(0{,}76) \quad | : \ln(0{,}76)$$

Bemerkung: $\ln(0{,}76) = -0{,}27$ $\rightarrow$ dividiert man bei einer Ungleichung durch eine negative Zahl, so **ändert** sich das **Ungleichheitszeichen**:

$$\frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}76)} \leq n$$

$$16{,}78 \leq n$$

$$n \geq 16{,}78$$

Antwort: Der Basketballspieler muss mindestens 17 Mal Werfen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens einmal den Korb trifft.

Bsp. 13) Ein Würfel (1-6) wird 18-mal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der geworfenen Dreier an.

a. Ist die Zufallsvariable X binomialverteilt? Begründe.

b. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass genau vier Mal ein Dreier gewürfelt wird.

c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 10-mal ein Dreier gewürfelt wird.

d. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass maximal zwei Mal ein Dreier gewürfelt wird.

e. Wie oft müsste man würfeln, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 97 % mindestens ein Mal einen Dreier würfelt?

Bsp. 14) Zwei Würfel (1-6) werden gleichzeitig 10-mal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Würfe an, bei der die Summe der Augenzahlen der beiden Würfel sieben ergibt.

a. Ist die Zufallsvariable X binomialverteilt? Begründe.

b. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass genau drei Mal die Summe der beiden Augenzahlen sieben ergibt.

c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass maximal zwei Mal die Summe der beiden Augenzahlen sieben ergibt.

d. Wie oft müsste man würfeln, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens einmal die Summe der Augenzahlen der Würfel von sieben würfelt?

Bsp. 15) Bei einem Test bekommt man eine positive Note, wenn man mindestens 60 % der Fragen richtig beantwortet. Zum Test kommen 20 Multiple-Choice Fragen zu je vier Antwortmöglichkeiten. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der richtig beantworteten Fragen an.

a. Lars kreuzt nach dem Zufallsprinzip an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er eine positive Note erhält?

b. Für ein „Sehr Gut" müssen mindestens 90 % richtig beantwortet werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dies mit einem zufälligen Ankreuzen gelingt?

Bsp. 16) Ein Jäger schießt zur Übung leere Cola-Dosen. Diese trifft er aus 100 Meter Entfernung mit einer Wahrscheinlichkeit von 54 %.

a. Wie oft müsste der Jäger schießen, dass er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 97 % mindestens einmal die Cola-Dose trifft.

b. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Treffer einer Cola-Dose. Der Jäger schießt 24-mal aus dieser Entfernung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er zwischen 7 und 10 Treffer landet?

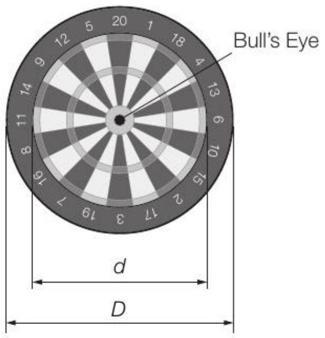
Aepfel * (A_170)

d) Aus Erfahrung ist bekannt, dass $\frac{1}{30}$ aller Äpfel einer Lieferung wurmstichig ist.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Zufallsstichprobe von 200 Äpfeln höchstens 5 Äpfel wurmstichig sind.

Darts * (A_302)

Darts ist ein Spiel, bei dem Pfeile auf eine kreisförmige Dartscheibe geworfen werden (siehe nebenstehende Abbildung).



d) Ein Spieler wirft 5-mal hintereinander auf eine Dartscheibe. Die Wahrscheinlichkeit, das sogenannte *Bull's Eye* in der Mitte der Dartscheibe zu treffen, beträgt bei jedem Wurf p.

1) Ordnen Sie den beiden Satzanfängen jeweils eine Fortsetzung aus A bis D zu, sodass zutreffende Aussagen entstehen.

Mit dem Ausdruck $\binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p) + p^5$ wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass der Spieler bei 5 Würfen ...	
Mit dem Ausdruck $1 - \binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p) - p^5$ wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass der Spieler bei 5 Würfen ...	

A	... höchstens 3-mal das Bull's Eye trifft.
B	... mindestens 3-mal das Bull's Eye trifft.
C	... höchstens 4-mal das Bull's Eye trifft.
D	... mindestens 4-mal das Bull's Eye trifft.

Fahrscheine * (A_133)

b) Erfahrungsgemäß wird man bei einer Fahrt mit einer bestimmten U-Bahn-Linie mit einer Wahrscheinlichkeit von 2,5 % kontrolliert.

Eine Person fährt 300-mal mit dieser U-Bahn-Linie.

1) Ordnen Sie den beiden Wahrscheinlichkeiten jeweils das entsprechende Ereignis aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$\binom{300}{2} \cdot 0{,}975^{298} \cdot 0{,}025^2$	
$1 - \binom{300}{1} \cdot 0{,}975^{299} \cdot 0{,}025^1 - \binom{300}{0} \cdot 0{,}975^{300} \cdot 0{,}025^0$	

A	Die Person wird genau 2-mal kontrolliert.
B	Die Person wird genau 2-mal nicht kontrolliert.
C	Die Person wird mindestens 2-mal nicht kontrolliert.
D	Die Person wird mindestens 2-mal kontrolliert.

Gluecksspiel* (A_282)

Bei einem Glücksspiel werden aus verschiedenen Gefäßen Kugeln zufällig gezogen.

b) Im zweiten Gefäß befinden sich 6 schwarze und 2 blaue Kugeln.

Aus diesem Gefäß zieht Susi 1 Kugel und legt diese Kugel anschließend in das Gefäß zurück. Das macht sie insgesamt 5-mal.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Susi dabei genau 3-mal eine schwarze Kugel zieht.

c) Im dritten Gefäß befinden sich 12 Kugeln. 7 dieser Kugeln sind grün, die anderen Kugeln sind gelb.

Aus diesem Gefäß zieht Moritz 1 Kugel und legt diese Kugel anschließend in das Gefäß zurück. Das macht er insgesamt 3-mal.

1) Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen so, dass eine korrekte Aussage entsteht. *[Lückentext]*

Die Wahrscheinlichkeit, dass _____①_____, ist durch den Ausdruck _____②_____ gegeben.

①	
alle 3 Kugeln grün sind	☐
mindestens 1 Kugel grün ist	☐
höchstens 1 Kugel grün ist	☐

②	
$1-\left(\frac{5}{12}\right)^3$	☐
$1-\left(\frac{7}{12}\right)^3$	☐
$\left(\frac{5}{12}\right)^3$	☐

Kontrolle der Geschwindigkeit * (A_117)

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einem bestimmten Abschnitt der Westautobahn ein Fahrzeug mit überhöhter Geschwindigkeit unterwegs ist, beträgt 4 %.
Eine Zufallsstichprobe von 1 500 Fahrzeugen wird überprüft.
Die binomialverteilte Zufallsvariable X gibt die Anzahl derjenigen Fahrzeuge an, die dort mit überhöhter Geschwindigkeit unterwegs sind.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass genau a Fahrzeuge dieser Zufallsstichprobe mit überhöhter Geschwindigkeit unterwegs sind.

$P(X = a) =$ ____________________________________

Produktion von Rucksaecken * (A_210)

Bei der Produktion von Rucksäcken treten erfahrungsgemäß 3 verschiedene Fehlerarten unabhängig voneinander auf.

P(„Nahtfehler") = 2 %

P(„Reißverschlussdefekt") = 3 %

P(„Farbfehler") = 1 %

c) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Zufallsstichprobe von 100 Stück weniger als 3 Rucksäcke mit Reißverschlussdefekt vorhanden sind.

Rampe fuer Rollstuehle * (A_204)

Ein Hotel muss zusätzlich zur „normalen" Treppe eine Rampe für Rollstühle einbauen.

c) Beobachtungen zufolge sind 2 % aller Gäste mit einem Rollstuhl unterwegs.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer Zufallsstichprobe von 50 Gästen mehr als 2 Rollstuhlfahrer/innen befinden.

Sonnenblumen * (A_329)

c) In einer Gärtnerei werden Kerne von Sonnenblumen in mit Erde befüllte Kisten eingesetzt. In jede Kiste werden 10 Kerne eingesetzt. Aus Erfahrung weiß man, dass jeder Kern unabhängig von den anderen Kernen mit einer Wahrscheinlichkeit p keimt.

1) Ordnen Sie den beiden Wahrscheinlichkeiten jeweils den zutreffenden Ausdruck aus A bis D zu.

Wahrscheinlichkeit, dass in einer zufällig ausgewählten Kiste höchstens 1 Kern keimt	
Wahrscheinlichkeit, dass in einer zufällig ausgewählten Kiste genau 9 Kerne keimen	

A	$1 - \binom{10}{9} \cdot p^9 \cdot (1-p)^1$
B	$\binom{10}{9} \cdot p^9 \cdot (1-p)^1$
C	$\binom{10}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^9 + (1-p)^{10}$
D	$\binom{10}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^9$

Vernetzte Welt * (A_245)

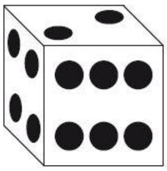
c) Die Bauteile eines elektronischen Systems haben innerhalb eines Jahres unabhängig voneinander eine konstante Ausfallwahrscheinlichkeit von 2 %.

Das elektronische System fällt aus, wenn mindestens 1 Bauteil ausfällt.

– Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein elektronisches System, in dem 10 Bauteile vernetzt sind, innerhalb eines Jahres ausfällt.

Wuerfelspiele * (A_191)

Würfelspiele sind seit Jahrtausenden auf der ganzen Welt bekannt und beliebt.
Die im Folgenden beschriebenen Spiele werden mit herkömmlichen fairen Spielwürfeln gespielt, bei denen die Augenzahlen 1 bis 6 jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit als Würfelergebnis auftreten.



d) Das chinesische Spiel *Pat Cha* („Griff nach acht") wird mit 8 Würfeln gespielt. Jede Spielerin/jeder Spieler setzt auf eine der 6 Augenzahlen. Eine Spielerin/ein Spieler gewinnt, wenn mindestens 3 der 8 Würfel die gesetzte Zahl zeigen.

Martin setzt auf die Augenzahl 6.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Martin gewinnt.

Blut (B_372)

Das Blut erfüllt wichtige Funktionen in unserem Körper. Es transportiert zum Beispiel den Wirkstoff von Medikamenten durch den Körper.

c) Karl Landsteiner entwickelte das AB0-Blutgruppensystem. Er entdeckte auch die beiden Rhesusfaktoren Rh+ und Rh–.
37 % der österreichischen Bevölkerung haben die Blutgruppe A, Rh+.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter 60 zufällig ausgewählten Personen der österreichischen Bevölkerung höchstens 15 Personen die Blutgruppe A, Rh+ haben.
– Ermitteln Sie, wie viele zufällig ausgewählte Personen mindestens Blut spenden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens eine Person mit der Blutgruppe A, Rh+ darunter ist.
– Interpretieren Sie, die Bedeutung des Ausdrucks $\sum_{k=2}^{6} \binom{60}{k} \cdot 0{,}37^k \cdot 0{,}63^{60-k}$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Brettspiel (B_288)

Bei einem Spiel gewinnt diejenige Person, die als erstes ein vorgegebenes Muster auf ihrem Spielbrett mit roten und grünen Farbsteinen ausgelegt hat.
Bei einem Spielzug wird zuerst mit 2 Zahlenwürfeln („normale" Würfeln mit den Augenzahlen 1 bis 6) geworfen. Die aus den Augenzahlen gebildete Summe (Augensumme) bestimmt, wie viele Farbsteine man auf das Spielbrett legen darf.
Anschließend wird für jeden zu legenden Farbstein die Farbe gewürfelt. Dazu wird ein spezieller Farbwürfel mit 4 grünen und 2 roten Seiten verwendet.
Ein Spielzug besteht daher aus dem Werfen der 2 Zahlenwürfel und dem darauffolgenden mehrmaligen Werfen des Farbwürfels.

c) Ein Kind wirft in einem Spielzug 7-mal den Farbwürfel.

– Ordnen Sie den beiden gegebenen Ausdrücken jeweils das passende Ereignis aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$\sum_{k=0}^{4} \binom{7}{k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{7-k}$	
$\sum_{k=0}^{5} \binom{7}{k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{7-k}$	

A	Es werden weniger als 5 grüne Steine gelegt.
B	Es werden maximal 5 rote Steine gelegt.
C	Es werden weniger als 5 rote Steine gelegt.
D	Es werden maximal 5 grüne Steine gelegt.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind mindestens 4-mal die Farbe Grün würfelt.

d) Ein Kind steht kurz vor dem Gewinn des Spiels. Es benötigt im nächsten Spielzug zum Fertigstellen des Musters noch genau 2 rote Steine.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind nach dem Würfeln genau 2 Steine, die beide rot sind, zur Verfügung hat.

Gummibaerchen ziehen * (B_354)

Gummibärchen werden in unterschiedlichen Farben hergestellt.

b) Stefan nimmt ohne hinzusehen ein Gummibärchen aus einer Packung, die verschiedenfärbige Gummibärchen enthält. Ist dieses zufällig ausgewählte Gummibärchen weiß, legt er es zurück, ist es ein andersfärbiges, wird es sofort gegessen. Das macht er 10-mal hintereinander.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der dabei gezogenen weißen Gummibärchen.

– Erklären Sie, warum dieses Zufallsexperiment nicht durch eine Binomialverteilung beschrieben werden kann.

Hotelrenovierung (1) (B_210)

Ein Hotel wird renoviert.

c) Während der Renovierungsarbeiten möchte der Hotelbesitzer eine Reisegruppe einquartieren. Leider stehen dafür 2 Zimmer zu wenig zur Verfügung. Aus Erfahrung weiß man, dass im Schnitt 12 % aller Buchungen wieder kurzfristig storniert werden. Das Hotel nimmt daher die Buchung der Reisegruppe an. Dabei wird angenommen, dass Einzelstornierungen voneinander unabhängig sind.

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit der die Wahrscheinlichkeit berechnet wird, dass bei der Annahme von 50 Buchungen mindestens 2 storniert werden. *[1 aus 5]*

$1-\binom{50}{1}\cdot 0{,}12^1\cdot 0{,}88^{49}-\binom{50}{2}\cdot 0{,}12^2\cdot 0{,}88^{48}$	☐
$1-\binom{50}{0}\cdot 0{,}12^0\cdot 0{,}88^{50}+\binom{50}{1}\cdot 0{,}12^1\cdot 0{,}88^{49}$	☐
$1-\binom{50}{0}\cdot 0{,}12^0\cdot 0{,}88^{50}-\binom{50}{1}\cdot 0{,}12^1\cdot 0{,}88^{49}$	☐
$1-\binom{50}{1}\cdot 0{,}88^1\cdot 0{,}12^{49}+\binom{50}{2}\cdot 0{,}88^2\cdot 0{,}12^{48}$	☐
$1-\binom{50}{0}\cdot 0{,}88^0\cdot 0{,}12^{50}+\binom{50}{1}\cdot 0{,}88^1\cdot 0{,}12^{49}$	☐

Oelbohrungen * (B_221)

Eine Ölgesellschaft führt Probebohrungen in Texas und in Alaska durch. Erfahrungsgemäß findet man bei einer Bohrung in Texas mit einer Wahrscheinlichkeit von 85 % und bei einer Bohrung in Alaska mit einer Wahrscheinlichkeit von 65 % Öl.

c) – Berechnen Sie, wie viele Bohrungen in Alaska zumindest notwendig sind, um mit mindestens 99%iger Wahrscheinlichkeit Öl zu finden.
– Beschreiben Sie, wie sich die gesuchte Anzahl der Bohrungen verändert, wenn eine 95%ige Wahrscheinlichkeit, Öl zu finden, ausreichend ist.

Produzent von landwirtschaftlichen Geraeten (B_179)

Ein Hersteller landwirtschaftlicher Geräte entwickelt innovative Produkte.

c) Bei der Überprüfung von bestimmten kleinen Teilen hat man bei einer Qualitätskontrolle festgestellt, dass durchschnittlich jedes 5. Stück einen Lackierungsfehler aufweist.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Schachtel von 20 Stück mindestens 3 Teile mit Lackierungsfehler zu finden sind.
– Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Anzahl von Teilen mit Lackierungsfehler für eine Schachtel, in der 5 Stück verpackt sind, grafisch dar.

Regentage in Gmunden (B_253)

Die angeführte Tabelle zeigt die durchschnittliche Anzahl der Regentage in Gmunden (Oberösterreich) für die Monate Juni bis September.

Monat	durchschnittliche Anzahl der Regentage
Juni	15,2
Juli	13,8
August	12,3
September	11,0

a) Eine Familie macht im Juli Sommerurlaub in Gmunden und bleibt 5 Tage.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass während ihrer Urlaubstage nicht mehr als ein Regentag vorkommt. Vorausgesetzt wird dabei eine annähernde Unabhängigkeit der Regentage.

Rohre (B_178)

Rohrleitungen und Rohrleitungssysteme stellen wesentliche technische Bestandteile in landwirtschaftlichen Betrieben dar.

c) Bei einem Rohrleitungssystem werden Rohre miteinander verschweißt. Es sind 52 Schweißstellen notwendig. Erfahrungsgemäß hält eine Schweißstelle innerhalb eines fixen Zeitraums mit 98%iger Wahrscheinlichkeit.
Das Reißen einer Schweißstelle verändert die Wahrscheinlichkeit bei den anderen Schweißstellen nicht.

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung derjenigen Wahrscheinlichkeit auf, dass innerhalb des fixen Zeitraums mindestens n Schweißstellen reißen.

Spielefest (1) (B_249)

Eine Praxisgruppe betreut ein Spielefest in einer Volksschulklasse, bei dem die Kinder verschiedene Spielstationen besuchen können.

b) Bei einer Station werfen die Kinder aus einer bestimmten Entfernung 5 Tennisbälle in einen Kübel. Peter hat eine Trefferquote von 80 % pro Wurf.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Peter höchstens 4-mal trifft.

Sportgeschaeft (B_263)

b) Ein Sportgeschäft verleiht tageweise Ski. Erfahrungsgemäß müssen bei etwa 6 % der zurückgebrachten Paar Ski Reparaturen durchgeführt werden.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Zufallsauswahl von 10 Paar ausgeliehenen Ski mindestens 2 Paar Ski repariert werden müssen.

Stadtlauf (1) (B_245)

In einer Stadt findet jährlich ein Laufwettbewerb statt.

c) Erfahrungsgemäß nehmen etwa 6,3 % der Hobbyläufer/innen Dopingmittel.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, mit der mindestens 1 Person Dopingmittel verwendet hat, wenn n zufällig ausgewählte Personen getestet werden.

3. Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsvariable

Video 4/4

Sei X eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern n und p. Wir definieren:

- **Erwartungswert** von X: $E(X) = \mu = n \cdot p$
- **Varianz** von X: $V(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$
- **Standardabweichung** von X: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

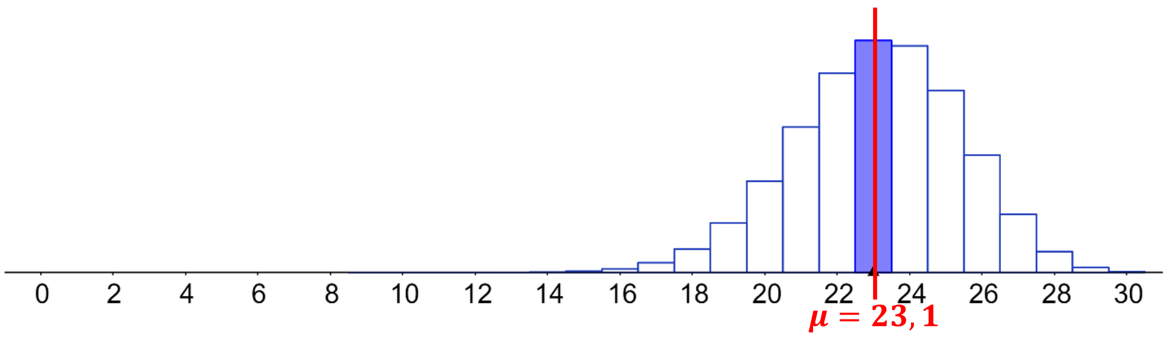
Musterbeispiel:
Ein Handballspieler verwertet zu 77 % einen 7-Meter-Wurf. An einem Trainingstag tritt der Handballspieler 30-mal zum 7-Meter-Wurf an. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer an.

Aufgabe: Berechne den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung. Interpretiere die Werte im gegebenen Kontext.

- 30 Würfe $\rightarrow n = 30$
- Erfolgswahrscheinlichkeit für einen Treffer ist 77 % $\rightarrow p = 0{,}77$

Erwartungswert $E(X) = n \cdot p = 30 \cdot 0{,}77 = 23{,}1$

Interpretation: Wiederholt der Handballspieler sehr oft dieses Training (30 7-Meter-Würfe), so wird er durchschnittlich ca. 23 Treffer erzielen.



Varianz $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 30 \cdot 0{,}77 \cdot 0{,}23 = 5{,}313$

Interpretation: Wiederholt der Handballspieler sehr oft dieses Training (30 7-Meter-Würfe), so strebt die empirische Varianz der Datenreihe gegen die Varianz $V(X) = 5{,}3$.

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{5{,}313} \approx 2{,}3$

$$[\mu - \sigma; \mu + \sigma] = [20{,}8; 25{,}4]$$

Interpretation 1: Wiederholt der Handballspieler sehr oft dieses Training (30 7-Meter-Würfe), so wird er oft 21 bis 25 Treffer erzielen.

$$[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma] = [18{,}5; 27{,}7]$$

Interpretation 2: Führt der Handballer sehr oft dieses Training aus (30 7-Meter-Würfe), so wird er selten maximal 18 bzw. mindestens 28 Treffer erzielen. Bei den meisten Durchgängen wird er eine Trefferanzahl zwischen 19 und 27 erzielen.

Bsp. 17) Bei einem Produkt sind erfahrungsgemäß 13 % in einem defekten Zustand. 12 Geräte werden überprüft. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der defekten Geräte bei der Überprüfung an.

a. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass genau drei Geräte defekt sind.

b. Bestimme den Erwartungswert. Interpretiere den Wert im gegebenen Kontext.

c. Bestimme die Varianz und Standardabweichung.

d. Wie viele Geräte müsste man überprüfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens ein defektes Gerät zu enthalten?

e. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte für X innerhalb des Intervalls $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegen.

Bsp. 18) Beim Elfmeterschießen hält ein Torwart mit einer Wahrscheinlichkeit von 55 % einen Elfmeter. Alle 17 Kaderspieler treten zum Elfmeter an (Wahrscheinlichkeit ist bei jedem Schützen gleich). Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der gehaltenen Elfmeter an.

a. Berechne den Erwartungswert und interpretiere im gegebenen Sachzusammenhang.

b. Berechne die Varianz und die Standardabweichung.

c. Wie groß ist der Erwartungswert, wenn die Zufallsvariable X die Anzahl der nicht-gehaltenen Elfmeter angibt. Berechne.

d. X gibt wieder die Anzahl der gehaltenen Elfmeter an. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte für X innerhalb des Intervalls $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegen.

e. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte für X unterhalb von $\mu - 2\sigma$ liegen.

Bsp. 19) Bei der olympischen Disziplin „Schießen" trifft ein Schütze mit einer Wahrscheinlichkeit von 68 % den Wert 10,0. An einem Trainingstag feuert er 500 Schüsse ab. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer an.

a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau 362-mal den Wert 10,0 zu treffen?

b. Berechne den Erwartungswert und interpretiere im gegebenen Sachzusammenhang.

c. Berechne die Varianz und die Standardabweichung.

d. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte für X innerhalb des Intervalls $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegen.

e. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte für X oberhalb von $\mu + 2\sigma$ liegen.

Bsp. 20) Ein Würfel (1-6) wird 40-mal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der geworfenen Sechser an.

a. Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung. Interpretiere die Werte im gegebenen Kontext.

b. Ein 20-seitiger Würfel mit den Ziffern 1-20 wird ebenfalls 40-mal geworfen. Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung. Vergleiche die Werte mit deinen Ergebnissen aus Aufgabe a). Was fällt dir auf?

c. Führe dasselbe mit einem 50-seitigen Würfel mit den Ziffern 1-50 aus. Interpretiere die Ergebnisse.

Bsp. 21) Beim Roulette-Spiel setzt jemand 20-mal hintereinander auf **(i)** die Farbe Rot, **(ii)** die zweiten 12 (13-24) und **(iii)** die Zahl 7. Die Zufallsvariable X gibt jeweils die Anzahl der jeweiligen eintretenden Ereignisse an.

a. Berechne jeweils den Erwartungswert. Vergleiche die Werte und interpretiere dies im gegebenen Sachzusammenhang.

b. Berechne jeweils die Standardabweichung und vergleiche die Werte untereinander.

c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man das gewünschte Ereignis (i – iii) genau 13 mal erhält

Bsp. 22) An einem Bahnhof verspäten sich Züge mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 %. An drei Tagen werden insgesamt 400 Züge beobachtet.

a. Berechne den Erwartungswert, wenn die Zufallsvariable X die Anzahl der pünktlichen Züge angibt. Interpretiere den Wert im gegebenen Kontext.

b. Berechne die Standardabweichung.

c. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 370 Züge pünktlich erscheinen.

d. Führe dieselben Schritte für den Erwartungswert und die Standardabweichung durch, wenn die Zufallsvariable X die Anzahl der verspäteten Züge angibt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 30 Züge verspätet erscheinen.

Bsp. 23) Bei der Lieferung von Porzellan-Teller wird die Ware erfahrungsgemäß in 3 % aller Pakete kaputt. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Pakete an, in denen die Ware gebrochen ist.

a. Es werden 190 Pakete nach der Auslieferung kontrolliert. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass (i) genau 12, (ii) maximal 20, (iii) mindestens 100, (iv) zwischen 10 und 20 Pakete eine kaputte Ware enthalten.

b. Bestimme den Erwartungswert und die Standardabweichung.

c. Wie viele Geräte müsste man überprüfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens ein defektes Gerät zu enthalten?

d. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte für X innerhalb des Intervalls $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegen.

Batterien * (A_228)

Ein Unternehmen produziert Batterien.

a) Ein Händler kauft Batterien bei diesem Unternehmen und erhält die Information, dass erfahrungsgemäß 2 % der gelieferten Batterien defekt sind.

Der Händler entnimmt einer umfangreichen Lieferung eine Zufallsstichprobe von 40 Batterien.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 der entnommenen Batterien defekt sind.

b) Für den Versand der Batterien an Einzelhändler werden diese jeweils in 4er-Packungen verpackt. Ein Einzelhändler erhält eine Lieferung von a 4er-Packungen.
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Batterie defekt ist, beträgt p.

– Beschreiben Sie, was mit dem Ausdruck $4 \cdot a \cdot p$ in diesem Sachzusammenhang berechnet wird.

Bluthochdruck bei Erwachsenen * (A_319)

b) In einem bestimmten Land beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person Bluthochdruck hat, p.
Es werden 20 Personen zufällig und unabhängig voneinander ausgewählt.

1) Kreuzen Sie das Ereignis E an, für dessen Wahrscheinlichkeit gilt:
$P(E) = \binom{20}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{18} + \binom{20}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{19} + \binom{20}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{20}$ *[1 aus 5]*

Mindestens 2 Personen haben Bluthochdruck.	☐
Höchstens 2 Personen haben Bluthochdruck.	☐
Genau 2 Personen haben Bluthochdruck.	☐
Mindestens 2 Personen haben keinen Bluthochdruck.	☐
Höchstens 2 Personen haben keinen Bluthochdruck.	☐

250 Personen werden zufällig und unabhängig voneinander ausgewählt. Jemand berechnet den Erwartungswert der Anzahl der Personen, die Bluthochdruck haben.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p, bei der sich ein Erwartungswert von 55 ergibt.

Lieblingsfarbe * (A_082)

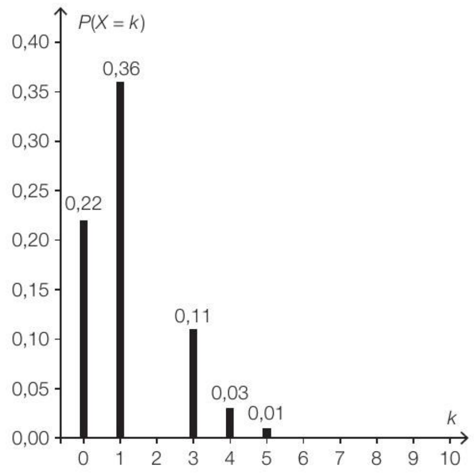
a) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person Rosa als Lieblingsfarbe nennt, beträgt 13 %.
25 zufällig ausgewählte Personen werden nach ihrer Lieblingsfarbe gefragt.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 3 der 25 Personen Rosa als Lieblingsfarbe nennen.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person Orange als Lieblingsfarbe nennt, beträgt 7 %.
Unter n befragten Personen soll mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens 1 Person sein, die Orange als Lieblingsfarbe nennt.

1) Berechnen Sie die Anzahl n derjenigen Personen, die dafür mindestens befragt werden müssen.

c) Die binomialverteilte Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl derjenigen Personen unter 10 Befragten, die Lila als Lieblingsfarbe nennen. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion dieser Zufallsvariablen ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Die Wahrscheinlichkeit, dass unter 10 Befragten maximal 3 Befragte Lila als Lieblingsfarbe nennen, beträgt 96 %.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die fehlende Säule für $P(X = 2)$ ein.

Pauschalreisen * (A_267)

Ein Reisebüro vermittelt Plätze für Pauschalreisen nach Kroatien.

a) Es wird angenommen, dass die vermittelten Plätze unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % nicht in Anspruch genommen werden. Alle 100 zur Verfügung stehenden Plätze werden vermittelt.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 4 der vermittelten Plätze nicht in Anspruch genommen werden.

2) Beschreiben Sie ein mögliches Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit folgendermaßen berechnet werden kann:
$\binom{100}{5} \cdot 0{,}05^5 \cdot 0{,}95^{95}$

b) Es wird angenommen, dass die vermittelten Plätze unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % nicht in Anspruch genommen werden. Es werden 102 Plätze vermittelt, obwohl nur 100 Plätze zur Verfügung stehen.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Plätze unter diesen Voraussetzungen nicht ausreicht.

Psi-Tests * (A_291)

Seit vielen Jahren hat die GWUP (Gesellschaft zur wissenschaftlichen Untersuchung von Parawissenschaften e. V.) ein Preisgeld für den Nachweis einer paranormalen (übersinnlichen) Fähigkeit ausgeschrieben.
Die behaupteten Fähigkeiten einer Versuchsperson werden dabei mit verschiedenen Tests überprüft.

a) Eine Versuchsperson muss auf Basis ihrer paranormalen Fähigkeiten angeben, unter welcher von 10 Schachteln ein Glas Wasser versteckt ist. Der Versuch wird 13-mal durchgeführt, wobei das Glas Wasser jedes Mal neu versteckt wird. Um die Testphase zu bestehen, müssen bei 13 Durchführungen des Versuchs 7 oder mehr Treffer erzielt werden.

Es wird angenommen, dass die Versuchsperson keine paranormalen Fähigkeiten besitzt und daher bei jeder Durchführung des Versuchs mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % einen Treffer erzielt.

1) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Treffer.
2) Zeigen Sie, dass es wahrscheinlicher ist, dass diese Versuchsperson mindestens 1 Treffer erzielt, als dass sie gar keinen Treffer erzielt.
3) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Versuchsperson die Testphase besteht.

b) Eine Versuchsperson muss auf Basis ihrer paranormalen Fähigkeiten angeben, ob in einem Kabel Strom fließt oder nicht. Dieser Versuch wird 50-mal durchgeführt. Um die Testphase zu bestehen, müssen bei 50 Durchführungen des Versuchs 40 oder mehr Treffer erzielt werden.

Es wird angenommen, dass die Versuchsperson keine paranormalen Fähigkeiten besitzt und daher bei jeder Durchführung des Versuchs mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % einen Treffer erzielt.

1) Ordnen Sie den beiden Ereignissen jeweils die zutreffende Wahrscheinlichkeit aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Die Versuchsperson erzielt mindestens 40 Treffer.	
Die Versuchsperson erzielt höchstens 20 Treffer.	

A	$\sum_{k=20}^{50} \binom{50}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{50-k}$
B	$\sum_{k=0}^{20} \binom{50}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{50-k}$
C	$\sum_{k=0}^{40} \binom{50}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{50-k}$
D	$\sum_{k=40}^{50} \binom{50}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{50-k}$

Teilchenbeschleuniger * (A_239)

Am Forschungsinstitut CERN wird mithilfe moderner Teilchenbeschleuniger physikalische Grundlagenforschung betrieben. In einem Teilchenbeschleuniger werden elektrisch geladene Teilchen auf hohe Geschwindigkeiten beschleunigt.

b) Wenn Teilchen im Teilchenbeschleuniger kollidieren, können neue Teilchen entstehen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Kollision ein Teilchen eines bestimmten Typs entsteht, beträgt 3,4 %.

Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis E wird mit $P(E) = \binom{500}{2} \cdot 0{,}034^2 \cdot (1 - 0{,}034)^{498}$ berechnet.

– Beschreiben Sie im gegebenen Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit so berechnet wird.
– Berechnen Sie, wie viele dieser Teilchen im Mittel entstehen, wenn 1 000 Kollisionen stattfinden.