5.3 Laplace Wahrscheinlichkeit

Maturaskript BHS – Teil A (6 Seiten)

Grundkompetenzen:

- **5.3** den klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Laplace verstehen und anwenden; den Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeiten und relativen Häufigkeiten verstehen und anwenden

$$P(E) = \frac{Anzahl\ der\ Elemente\ von\ E}{Anzahl\ der\ Elemente\ von\ \Omega} = \frac{Anzahl\ aller\ für\ E\ günstigen\ Fälle}{Anzahl\ aller\ möglichen\ Fälle}$$

Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Prof. Tegischer

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM
2) Gib im Feld „**Volltextsuche**" die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. A_263) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**" und „**GeoGebra**" erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**" erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln	**Weitere Regeln für Lehrpersonen**
▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen. ▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen. ▪ Sie dürfen mein Materialen **NICHT** gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden. ▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden. ▪ Bei einem **Missbrauch** erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.	**WICHTIGSTE REGEL:** LehrerInnen dürfen die Materialien in **Ihrem eigenen Unterricht** verwenden: ▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen. ▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben. ▪ Es ist **nicht erlaubt**, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben. ▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

BHS Teil A 5.3 Laplace-Wahrscheinlichkeit

1. Zufallsversuche

Video

Im täglichen Leben spielen Zufallsversuche eine große Rolle. Sei es bei Brettspielen mit einem Würfel oder bei Glücksspielen im Casino wie das Roulette. Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung können nun für alle möglichen Situationen bzw. Ausgänge die Wahrscheinlichkeiten berechnet werden.

Man spricht von einem **Zufallsversuch**, wenn folgende Eigenschaften erfüllt werden:

- Der Versuch kann beliebig oft unter stets gleichen Bedingungen durchgeführt werden.
- Der Ausgang des Versuchs ist zufällig und kann nicht vorhergesagt werden (wie z.B. beim Würfeln).
- Alle möglichen Ausgänge (= Elementarereignisse) sind zu Beginn des Versuchs klar (Beispiel Würfel: Es sind folgende sechs Zahlen möglich: 1, 2, 3, 4, 5, 6)

Weitere Begriffe:

- Alle möglichen Ausgänge des Versuchs werden **Elementarereignisse** genannt. Die **Grundmenge Ω** fasst **alle Elementarereignisse** zusammen.

Zufallsversuch	Grundmenge Ω
Würfel: Welche Augenzahl wird geworfen?	$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Münze: Welche Ausgänge sind beim Werfen einer Münze möglich?	$\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$
Roulette: Welche Zahl wird beim Roulette gewählt?	$\Omega = \{0,1, 2, 3, 4, 5, \dots,36\}$

- Ein **Ereignis** E muss stets eine Teilmenge der Grundmenge sein: $E \subseteq \Omega$. Diese Menge bezeichnet man als Ereignismenge.
  Bemerkung: Ereignisse mit nur einem Element heißen Elementarereignisse. Ereignisse können jedoch auch aus mehreren Elementen bestehen. Dies zeige ich dir anhand des Würfels:

1) Ereignis E_1: Würfeln der Zahl 3 -> Ereignismenge $E_1 = \{3\}$
2) Ereignis E_2: Würfeln einer geraden Zahl -> Ereignismenge $E_2 = \{2,4,6\}$
3) Ereignis E_3: Würfeln einer Zahl, die größer als 2 ist -> Ereignismenge $E_3 = \{3,4,5,6\}$

- Ereignisse können beim Zufallsversuch eintreten bzw. nicht eintreten.
- Zu einem Ereignis E gibt es ein Gegenereignis $\neg E$. Dies entspricht dem logischen Gegenteil.

Würfel	
Ereignis	Gegenereignis
Die Zahl 3 wird gewürfelt. $E_1 = \{3\}$	Die Zahl 3 wird nicht gewürfelt. $\neg E_1 = \{1,2,4,5,6\}$
Eine ungerade Zahl wird gewürfelt. $E_2 = \{1,3,5\}$	Eine gerade Zahl wird gewürfelt. $\neg E_2 = \{2,4,6\}$
Die gewürfelte Zahl ist größer als 2. $E_3 = \{3,4,5,6\}$	Die gewürfelte Zahl ist kleiner als 3 $\neg E_3 = \{1,2\}$

Was fällt dir auf? Die Vereinigungsmenge von der Ereignis-Menge E und Gegenereignis-Menge $\neg E$ ergibt stets die Grundmenge. Es gilt:

$$\mathrm{E} \cup \neg E = \Omega$$

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff und die Laplace-Wahrscheinlichkeit

In diesem Teil lernst du, wie du die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bestimmen kannst, mit welcher es eintritt.

Video

$P(E)$ ... beschreibt die Wahrscheinlichkeit, mit der das Ereignis E eintritt. Es gilt:

$$\mathbf{0 \leq P(E) \leq 1}$$

Die Wahrscheinlichkeit nimmt stets einen reellen Wert zwischen 0 und 1 an.

- $P(E) = 0$ ... unmögliches Ereignis – das Ereignis tritt nicht ein.
- $P(E) = 1$ ... sicheres Ereignis – das Ereignis tritt immer ein (Ereignismenge = Grundraum)

Laplace-Wahrscheinlichkeit

Voraussetzung im Grundraum Ω:

- **endlich viele Elementarereignisse**
- **alle Elementarereignisse** treten mit **gleicher Wahrscheinlichkeit** ein
  (z.B.: Beim Würfeln ist die Chance eine Augenzahl zu bekommen für alle gleich)

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses wird mit der Laplace-Wahrscheinlichkeit berechnet:

$$P(E) = \frac{Anzahl\ der\ Elemente\ von\ E}{Anzahl\ der\ Elemente\ von\ \Omega} = \frac{Anzahl\ aller\ für\ E\ günstigen\ Fälle}{Anzahl\ aller\ möglichen\ Fälle}$$

Für die Wahrscheinlichkeit $P(\neg E)$ des **Gegenereignisses** $\neg E$ gilt:

$$P(\neg E) = 1 - P(E)$$

Bemerkung: Möchtest du die Wahrscheinlichkeit in % angegeben, so musst du das **Ergebnis mit 100 multiplizieren**.

z.B. $P(E) = 0{,}3167 = 31{,}67\ \%$

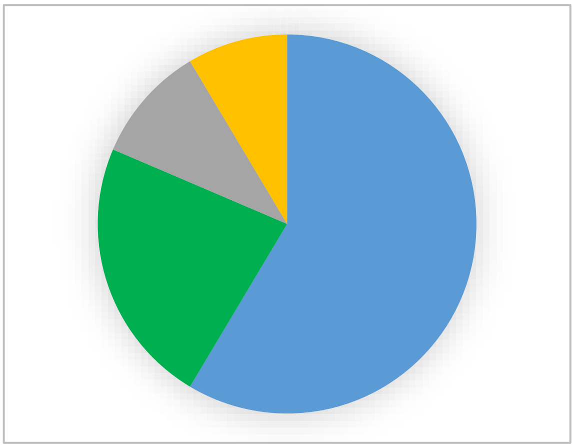
Bsp. 1) Ein Würfel wird einmal geworfen. Berechne jeweils die Wahrscheinlichkeit des gegebenen Ereignisses.

a. E_1: Die Zahl 2 wird gewürfelt.	b. E_2: Eine gerade Zahl wird gewürfelt.
c. E_3: Eine Primzahl wird gewürfelt.	d. E_4: Die Zahl ist größer als 2.

Bsp. 2) Ein Würfel wird zweimal geworfen. Berechne jeweils die Wahrscheinlichkeit des gegebenen Ereignisses. Bestimme zuerst den Grundraum:

a. E_1: Die Summe der Augenzahlen beträgt 7.	b. E_2: Beim ersten Wurf kommt eine 3.
c. E_3: Die Summe der Augenzahlen ist kleiner als 6.	d. E_4: Die beiden Augenzahlen sind gleich.
e. E_5: Es kommt bei den Würfen mindestens einmal die Zahl 3 vor.	f. E_6: Es werden nur Primzahlen gewürfelt.

Bsp. 3) Kann die Wahrscheinlichkeit des gegebenen Glücksrades der grünen Fläche mit Hilfe der Laplace-Wahrscheinlichkeit berechnet werden? Begründe anhand der Definition.



Bsp. 4) In einer Urne befinden sich drei blaue, fünf gelbe, acht schwarze und zwei rote Kugeln.

Verschiedene Ereignisse sind gegeben. Berechne jeweils die Gegenwahrscheinlichkeit.

a. E_1: Es wird eine blaue Kugel gezogen.	b. E_2: Es wird eine gelbe oder rote Kugel gezogen.

c. E_3: Es wird keine schwarze Kugel gezogen.	d. E_4: Es wird keine gelbe oder schwarze Kugel gezogen.

Bsp. 5) Berechne die Wahrscheinlichkeit möglichst intelligent (Tipp: Gegenwahrscheinlichkeit).

a. Ein 6-seitiger Würfel (Augenzahlen 1-6) wird zweimal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der beiden Augenzahlen größer als 3 ist.

b. Ein Würfel (1-6) wird dreimal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe aller Augenzahlen größer als 3 ist. (Bemerkung: Es gibt **216** mögliche Fälle)

Patchwork (A_072)

Beim Patchwork werden Stoffstücke zusammengenäht und auf diese Weise neue Textilien angefertigt. Ein Handarbeitsgeschäft bietet Patchworkkurse an.

b) Für eine Decke stehen 12 verschiedene Farben zur Auswahl. Die 5 teilnehmenden Personen wählen unabhängig voneinander jeweils eine Farbe aus. (Dabei kann eine Farbe auch von mehreren Personen gewählt werden.)

– Ordnen Sie den beiden Ausdrücken jeweils dasjenige Ereignis aus A bis D zu, dessen Wahrscheinlichkeit damit berechnet wird. *[2 zu 4]*

$\frac{12}{12} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{12} \cdot \frac{8}{12}$	
$12 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^5$	

A	Alle Personen wählen unterschiedliche Farben.
B	Alle Personen wählen die gleiche Farbe.
C	Mindestens 2 Personen wählen die gleiche Farbe.
D	Höchstens 2 Personen wählen die gleiche Farbe.

Ampelschaltung (B_329)

Laut § 38 Abs. 6 Satz 1 der Straßenverkehrsordnung (StVO) gilt:
„Das grüne Licht ist jeweils mit viermal grünblinkendem Licht zu beenden, wobei die Leucht- und die Dunkelphase abwechselnd je eine halbe Sekunde zu betragen haben.“

c) Eine Ampel hat folgendes Anzeigeprogramm:

Ampelphase	Dauer
Rot	30 s
Gelb	3 s
Grün	20 s
Grün blinkend	4 s

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, die Ampel bei einer Gelbphase anzutreffen.
– Interpretieren Sie den Ausdruck $\left(1-\frac{30}{57}\right)^n$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Wuerfel (2) * (B_115)

a) Das im Folgenden beschriebene Spiel wird mit herkömmlichen fairen Spielwürfeln gespielt, bei denen die Augenzahlen 1 bis 6 jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit als Würfelergebnis auftreten.

Es werden 2 Spielwürfel gleichzeitig geworfen und es wird deren Augensumme bestimmt. Nun sollen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden.

– Tragen Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten in die nachstehende Tabelle ein.

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wahrscheinlichkeit											

Es wird Ihnen nun folgendes Spiel vorgeschlagen:

Sie gewinnen, wenn die Augensumme 5, 6, 7 oder 8 beträgt.
oder
Sie gewinnen mit allen übrigen Augensummen.

– Ermitteln Sie, welche der beiden Möglichkeiten die höhere Gewinnwahrscheinlichkeit hat.

Wuerfelspass * (B_499)

Würfelspaß ist ein Spiel, das mit herkömmlichen fairen Spielwürfeln gespielt wird, bei denen die Augenzahlen 1 bis 6 jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit als Würfelergebnis auftreten.
Die Spieler/innen müssen Aufträge erfüllen.

a) Auftrag „Größer“:
Ein Würfel wird 2-mal hintereinander geworfen. Der Auftrag „Größer“ ist erfüllt, wenn die Augenzahl des 2. Wurfes größer als die Augenzahl des 1. Wurfes ist.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, den Auftrag „Größer“ zu erfüllen.

Auftrag „Sieben“:
Es werden 2 Würfel gleichzeitig geworfen. Der Auftrag „Sieben“ ist erfüllt, wenn die Augensumme 7 ergibt.

2) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, den Auftrag „Sieben“ zu erfüllen, kleiner ist als die Wahrscheinlichkeit, den Auftrag „Größer“ zu erfüllen.