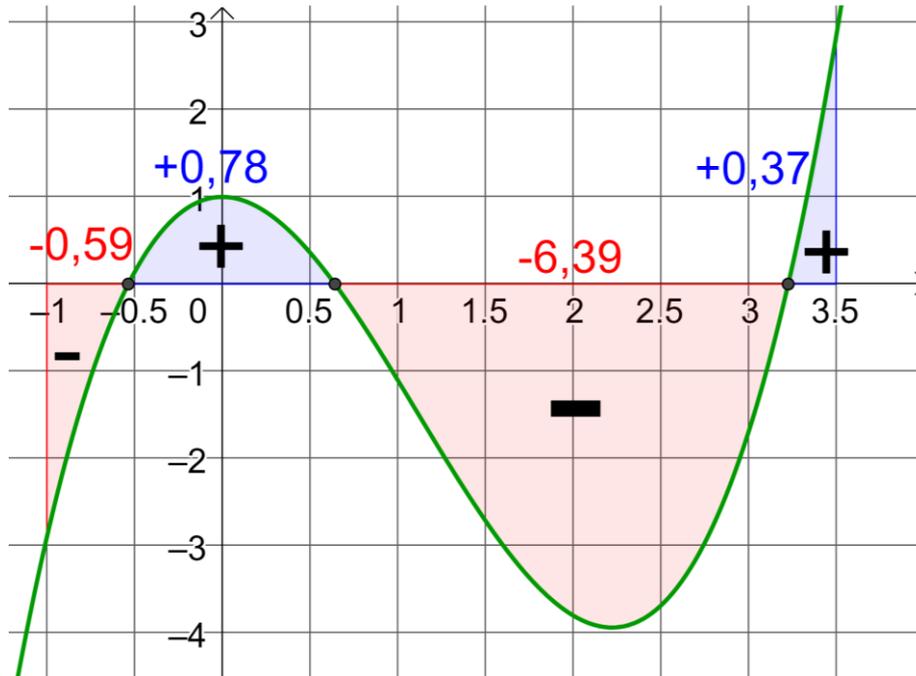


4.7 Bestimmtes Integral

Maturaskript BHS – Teil A (10 Seiten)

Grundkompetenzen:

- **4.7** das bestimmte Integral auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes als Grenzwert einer Produktsumme interpretieren und damit argumentieren

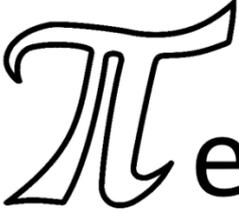


Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Prof.  egischer

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben** (Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool) gelöst werden, um das Erlernete zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info: *bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, ...) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): <https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/>
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

- 1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: <https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM>
- 2) Gib im Feld „**Volltextsuche**“ die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. A_263) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**“ und „**GeoGebra**“ erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**“ erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

| Allgemeine Regeln | Weitere Regeln für Lehrpersonen |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none">▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen.▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen.▪ Sie dürfen mein Materialen NICHT gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden.▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden.▪ Bei einem Missbrauch erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden. | <p>WICHTIGSTE REGEL: LehrerInnen dürfen die Materialien in Ihrem eigenen Unterricht verwenden:</p> <ul style="list-style-type: none">▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen.▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben.▪ Es ist nicht erlaubt, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben.▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen. |

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

BHS Teil A 4.7 – Bestimmtes Integral



1. Bestimmtes Integral

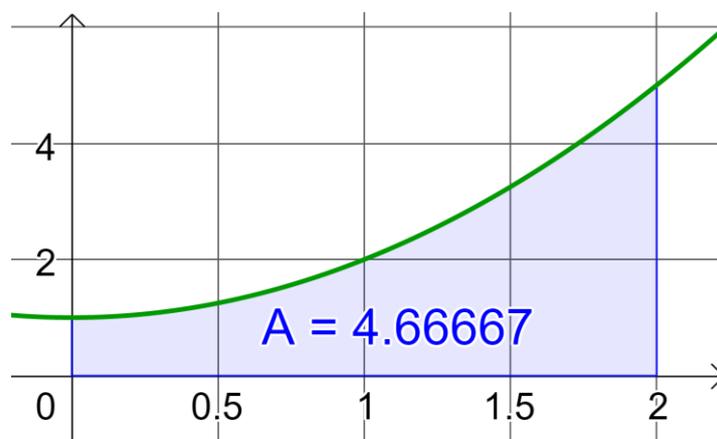
In diesem Kapitel lernt ihr, wie ihr den Flächeninhalt zwischen x-Achse und Funktionsgraph berechnen könnt.

[Video](#)

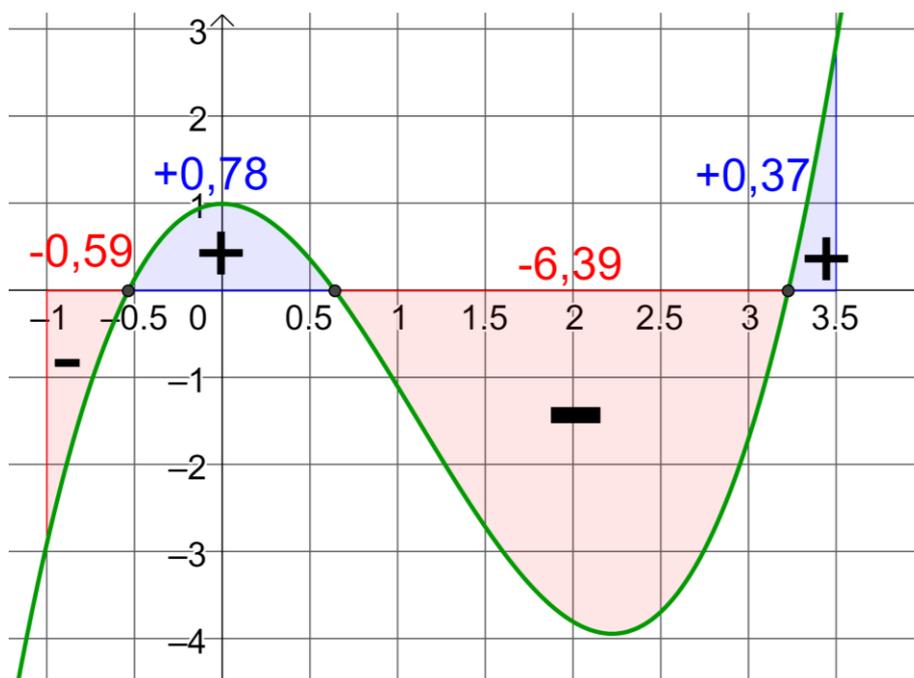
Ist f eine stetige Funktion auf einem Intervall $[a; b]$, dann beschreibt das **bestimmte** Integral $\int_a^b f(x) dx$ die **orientierte Fläche** zwischen der Kurve von $f(x)$ und der x-Achse zwischen den Grenzen a und b .

- a wird untere, bzw. b wird obere Grenze genannt.
- Sprechweise: „Integral von f zwischen den Grenzen a und b “

Hat die Funktion $f(x)$ im Intervall $[a; b]$ nur **positive Funktionswerte**, so entspricht das bestimmte Integral dem **tatsächlichen Flächeninhalt** zwischen Graph und x-Achse.



Treten jedoch auch **negative Funktionswerte** auf, so besteht das bestimmte Integral aus **Summen/Differenzen von Flächeninhalten**. (=orientierte Fläche).



$$\int_{-1}^{3,5} f(x) dx = -0,59 + 0,78 - 6,39 + 0,37 = -5,83$$

Das bestimmte Integral kann daher wie bei diesem Beispiel auch negative Werte annehmen. Dann entspricht das bestimmte Integral nicht mehr dem tatsächlichen Flächeninhalt. Der Flächeninhalt zwischen x-Achse und Funktionsgraph ist:

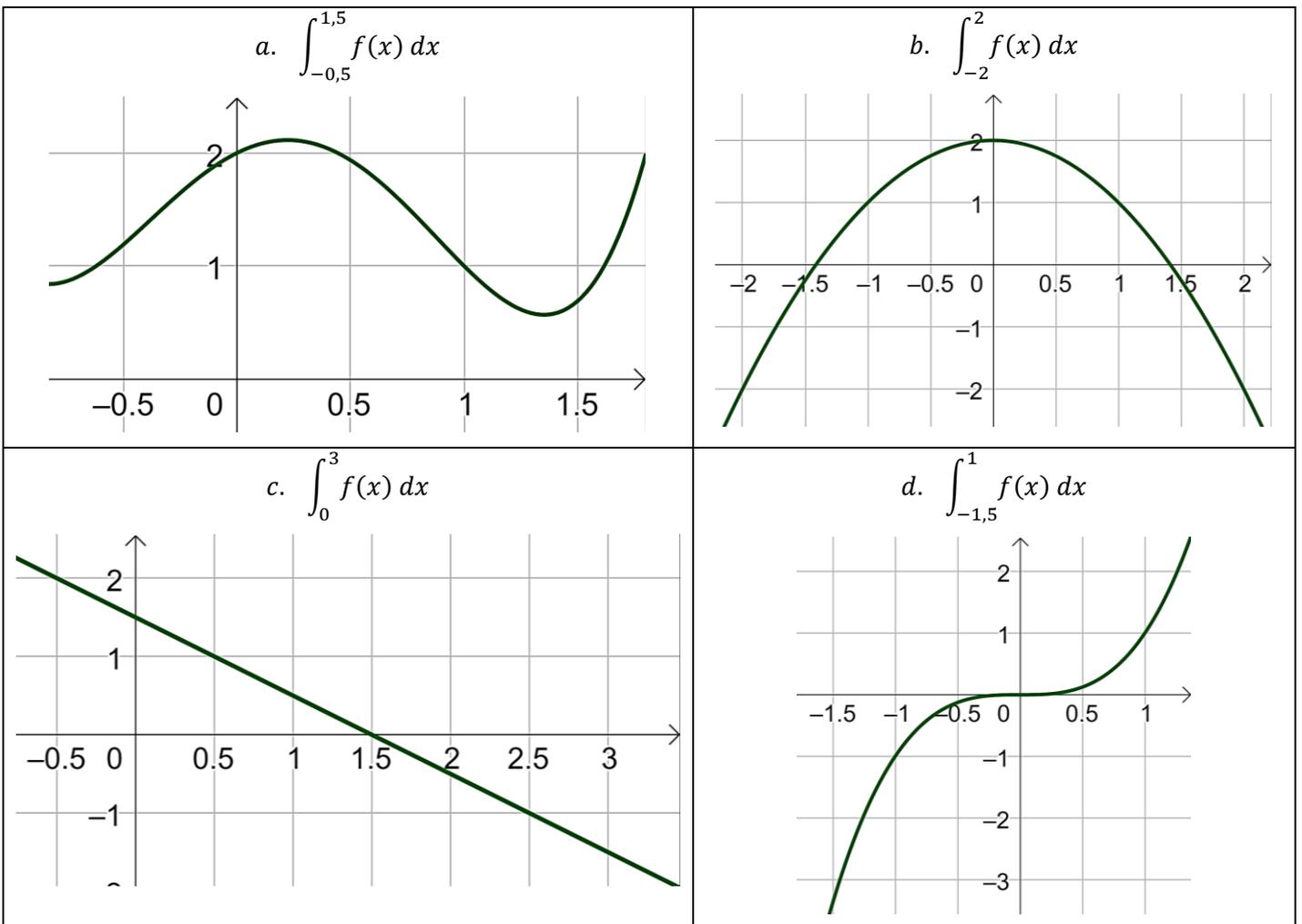
$$A = 0,59 + 0,78 + 6,39 + 0,37 = 8,13 E^2$$

Definition – Orientierte Fläche:

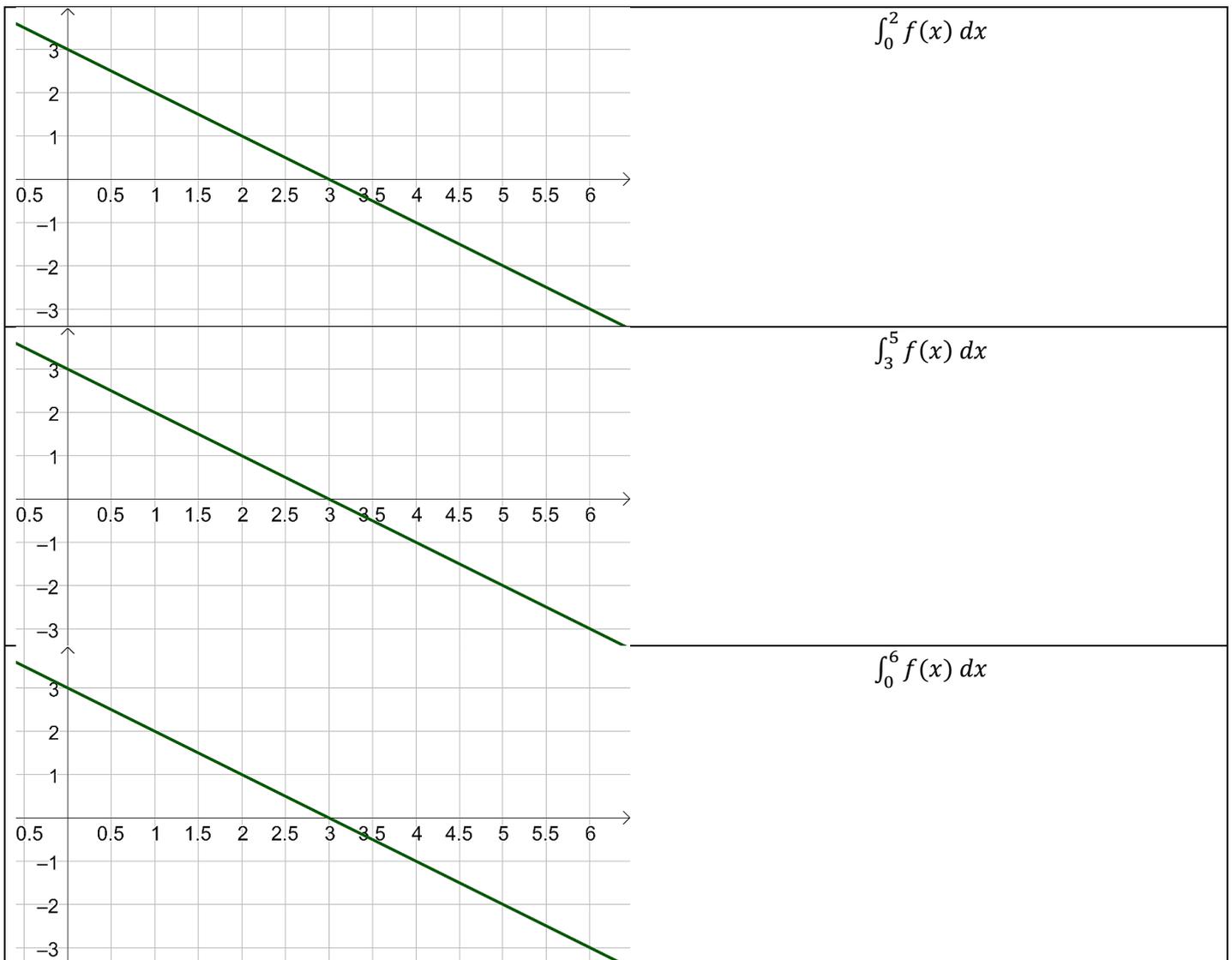
- Liegt der Funktionsgraph oberhalb der x-Achse, so ist das bestimmte Integral positiv.
- Liegt der Funktionsgraph unterhalb der x-Achse, so ist das bestimmte Integral negativ.

Möchte man den tatsächlichen Flächeninhalt berechnen, müssen positive und negative Teile separat betrachtet und addiert werden (später mehr dazu).

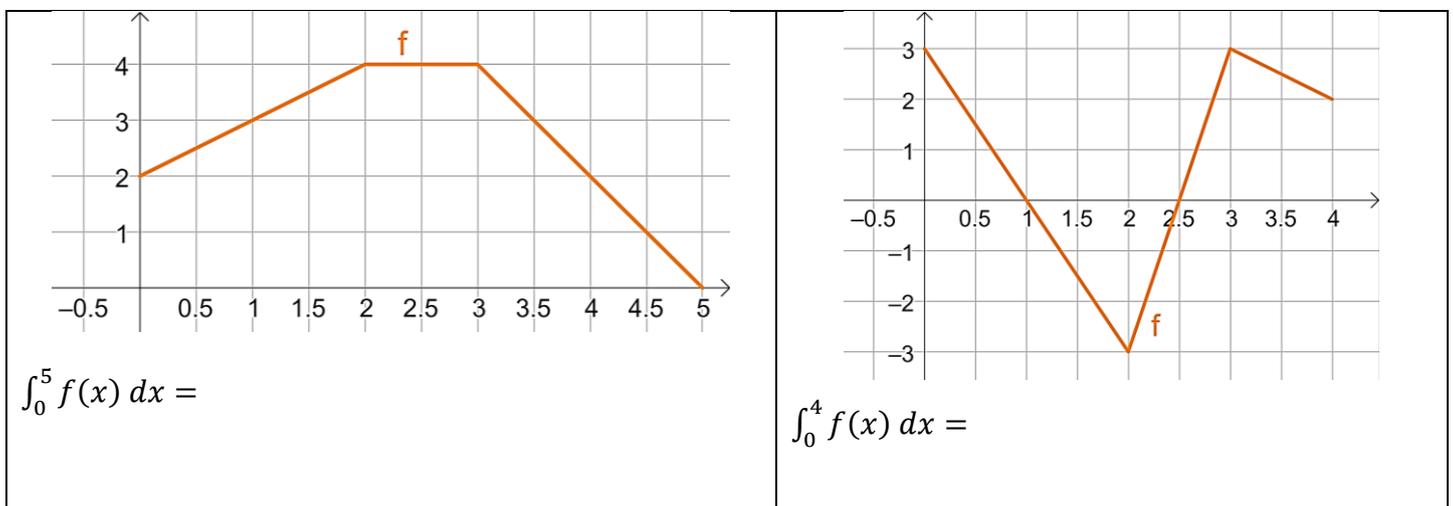
Bsp. 1) Gegeben ist der Graph einer Funktion f. Stelle das bestimmte Integral graphisch dar.



Bsp. 2) Markiere das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$. Berechne den Wert ohne Verwendung von Technologie. Was fällt dir auf?



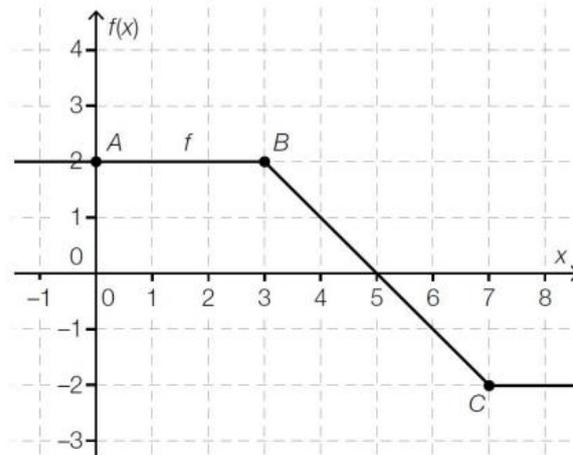
Bsp. 3) Gegeben ist der Graph einer Funktion f . Stelle das bestimmte Integral graphisch dar und berechne es.



AHS Aufgabenpool:

Bestimmtes Integral* - 1_654, AN4.2, Halboffenes Antwortformat

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer abschnittsweise linearen Funktion f dargestellt. Die Koordinaten der Punkte A , B und C des Graphen der Funktion sind ganzzahlig.

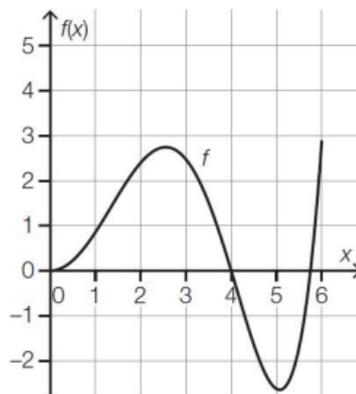


Ermitteln Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^7 f(x) dx$!

$$\int_0^7 f(x) dx = \underline{\hspace{4cm}}$$

Aussagen über bestimmte Integrale* - 1_871, AN4.3, 2 aus 5

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion f im Intervall $[0; 6]$ dargestellt.



Unten stehend sind einige Aussagen über bestimmte Integrale der Funktion f gegeben.

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. [2 aus 5]

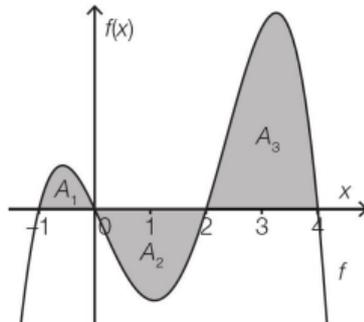
| | |
|---------------------------------------|--------------------------|
| $\int_0^4 f(x) dx > \int_0^5 f(x) dx$ | <input type="checkbox"/> |
| $\int_3^4 f(x) dx > \int_4^5 f(x) dx$ | <input type="checkbox"/> |
| $\int_0^6 f(x) dx > \int_0^4 f(x) dx$ | <input type="checkbox"/> |
| $\int_0^4 f(x) dx = 0$ | <input type="checkbox"/> |
| $\int_4^6 f(x) dx > 0$ | <input type="checkbox"/> |

Bestimmte Integrale* - 1_751, AN4.3, 2 aus 5

Nachstehend ist der Graph einer Polynomfunktion f mit den Nullstellen $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ und $x_4 = 4$ dargestellt.

Für die mit A_1 , A_2 und A_3 gekennzeichneten Flächeninhalte gilt:

$A_1 = 0,4$, $A_2 = 1,5$ und $A_3 = 3,2$.

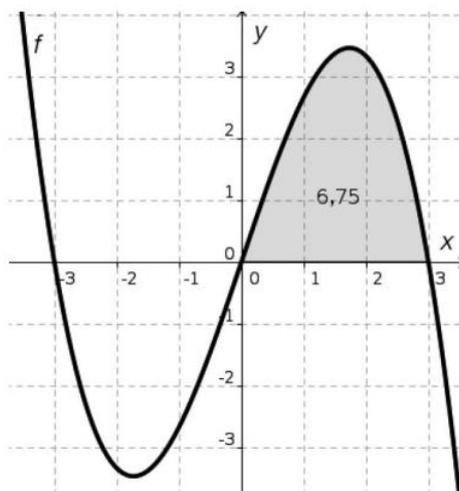


Kreuzen Sie die beiden Gleichungen an, die wahre Aussagen sind.

| | |
|-----------------------------|--------------------------|
| $\int_{-1}^2 f(x) dx = 1,9$ | <input type="checkbox"/> |
| $\int_0^4 f(x) dx = 1,7$ | <input type="checkbox"/> |
| $\int_{-1}^4 f(x) dx = 5,1$ | <input type="checkbox"/> |
| $\int_0^2 f(x) dx = 1,5$ | <input type="checkbox"/> |
| $\int_2^4 f(x) dx = 3,2$ | <input type="checkbox"/> |

Integral* - 1_380, AN4.3, 2 aus 5

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer punktsymmetrischen Funktion f (das bedeutet: $f(-x) = -f(x)$) dargestellt. Die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x -Achse im Intervall $[0; 3]$ ist grau unterlegt. Ihre Maßzahl beträgt 6,75.

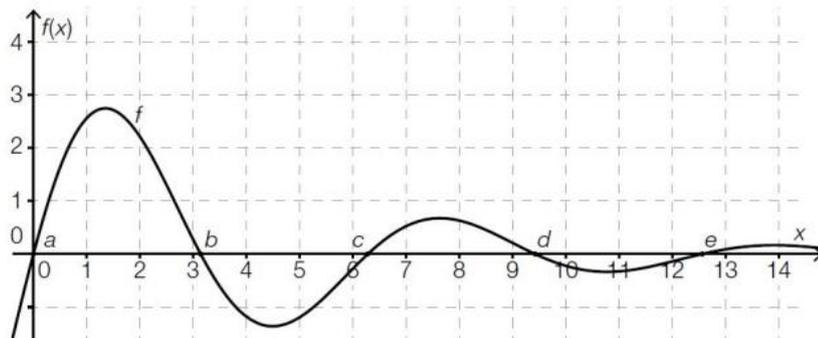


Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an!

| | |
|-------------------------------|--------------------------|
| $\int_0^3 f(x) dx = 6,75$ | <input type="checkbox"/> |
| $\int_{-3}^3 f(x) dx = 13,5$ | <input type="checkbox"/> |
| $\int_{-3}^3 f(x) dx = -13,5$ | <input type="checkbox"/> |
| $\int_{-3}^3 f(x) dx = 0$ | <input type="checkbox"/> |
| $\int_{-3}^0 f(x) dx = 6,75$ | <input type="checkbox"/> |

Bestimmtes Integral* - 1_606, AN4.2, 2 aus 5

Der Graph einer Funktion f schneidet die x -Achse in einem gewissen Bereich an den Stellen a, b, c, d und e .



Welche der nachstehend angeführten bestimmten Integrale haben einen Wert, der größer als 0 ist?

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden bestimmten Integrale an!

| | |
|--------------------|--------------------------|
| $\int_a^c f(x) dx$ | <input type="checkbox"/> |
| $\int_b^c f(x) dx$ | <input type="checkbox"/> |
| $\int_b^d f(x) dx$ | <input type="checkbox"/> |
| $\int_a^b f(x) dx$ | <input type="checkbox"/> |
| $\int_d^e f(x) dx$ | <input type="checkbox"/> |

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung



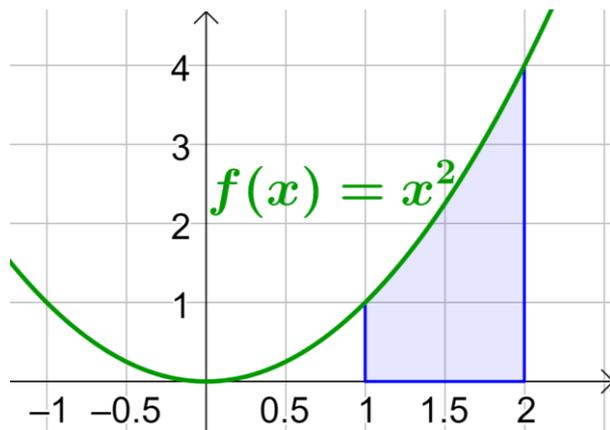
Für eine im Intervall $[a; b]$ stetige (= Graph ist eine durchgezogene Linie) Funktion f mit einer zugehörigen Stammfunktion F ($F' = f$) gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

[Video](#)

Berechnung – Bestimmtes Integral:

- (1) Stammfunktion bilden
- (2) $F(a)$ und $F(b)$ berechnen
- (3) „Obere Grenze“ MINUS „Untere Grenze“ (**Integrationskonstante fällt bei der Berechnung weg**)



$$\text{ges.: } \int_1^2 x^2 dx$$

Schritt 1: Bilde eine Stammfunktion:

$$\int_1^2 x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3} + c \right) \Big|_1^2$$

Schritt 2: Obere Grenze – Untere Grenze

$$\left(\frac{2^3}{3} + c \right) - \left(\frac{1^3}{3} + c \right) = \frac{8}{3} + c - \frac{1}{3} - c$$

$$\frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2,34 E^2$$

Rechenregeln:

- (1) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
- (2) $\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$

$$(3) \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

$$(4) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$(5) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

[Video](#)

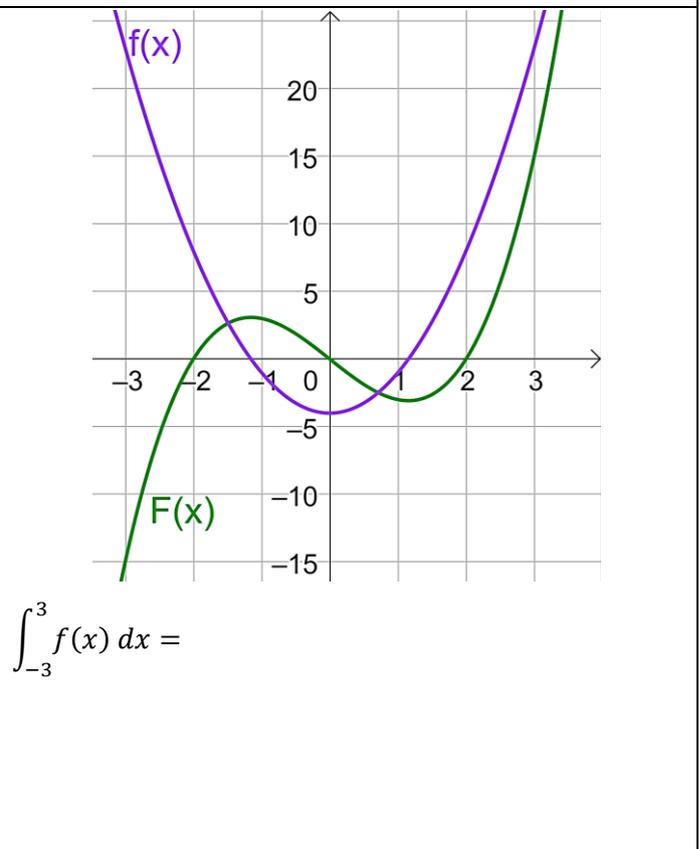
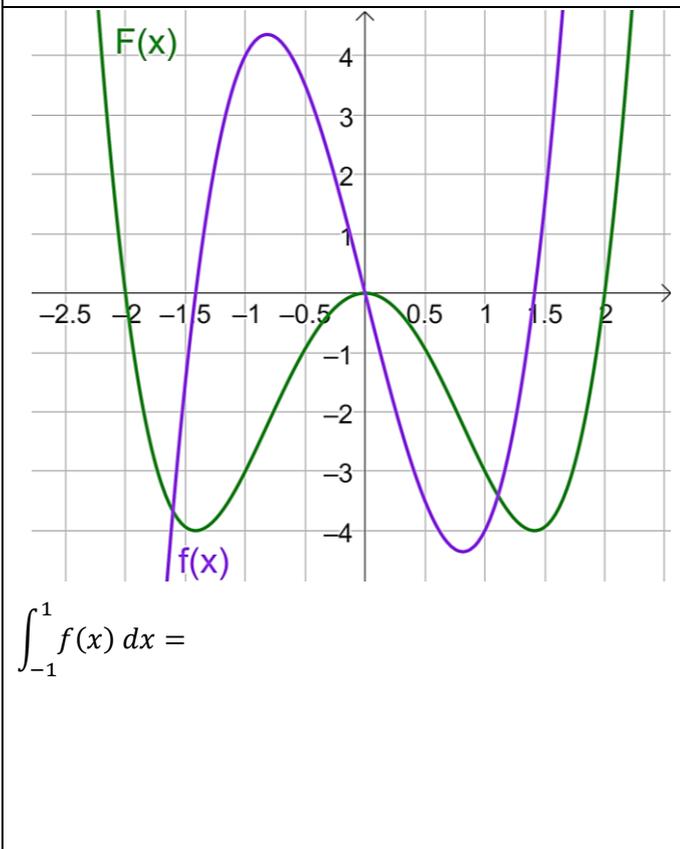
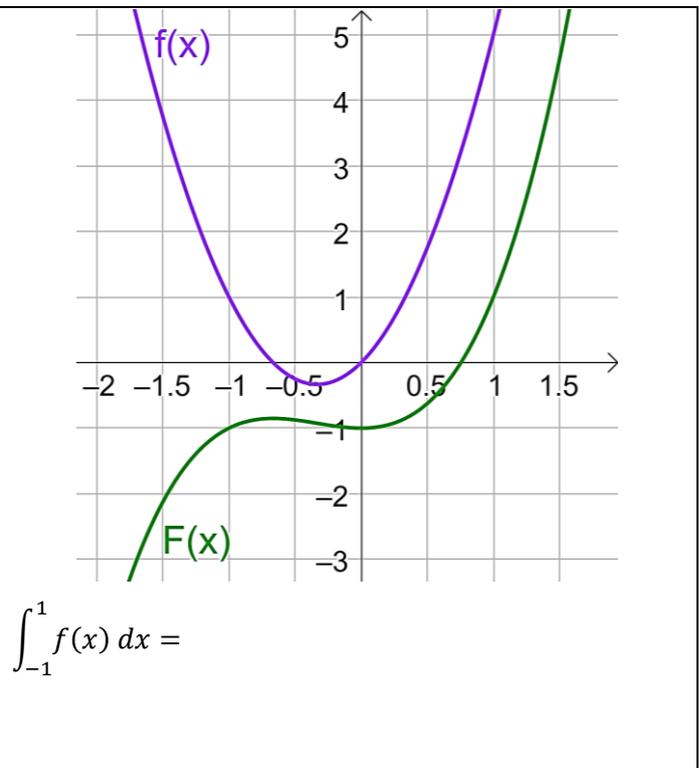
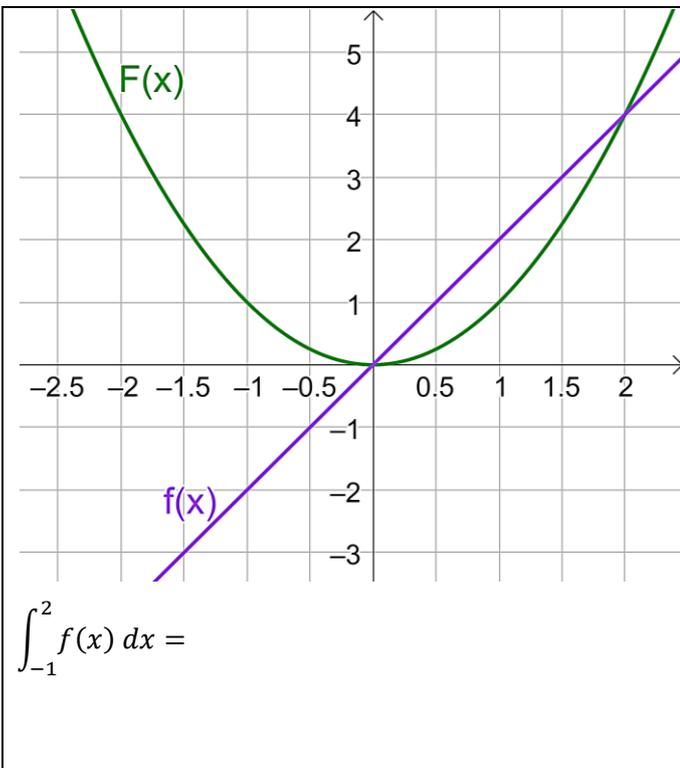
Bsp. 4) Berechne das bestimmte Integral in den Grenzen a und b von f (mit dem Hauptsatz).
Entspricht das bestimmte Integral dem Flächeninhalt, den der Funktionsgraph mit der x -Achse im Intervall $[a; b]$ einschließt?



| | |
|-------------------------------------|--|
| a. $f(x) = 2x + 1$ $a = 1, b = 3$ | b. $f(x) = 7$ $a = -2, b = 5$ |
| c. $f(x) = -3x + 5$ $a = -2, b = 3$ | d. $f(x) = 3x^2 + 2x$ $a = 0, b = 2$ |
| e. $f(x) = x^3 - x$ $a = -4, b = 2$ | f. $f(x) = 5x^4 + 2x + 4$ $a = 0, b = 1$ |

Bsp. 5) Die Funktionsgraphen der Funktion f und ihrer Stammfunktion F sind jeweils gegeben.

- Markiere das bestimmte Integral graphisch.
- Ermittle mit Hilfe der Abbildung das gesuchte Integral.
- Entspricht das bestimmte Integral dem tatsächlichen Flächeninhalt?



Bestimmtes Integral* - 1_894, AN4.2, Offenes Antwortformat

Die Polynomfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat eine bestimmte Stammfunktion F . Von dieser Stammfunktion F sind nachstehend einige Wertepaare gegeben.

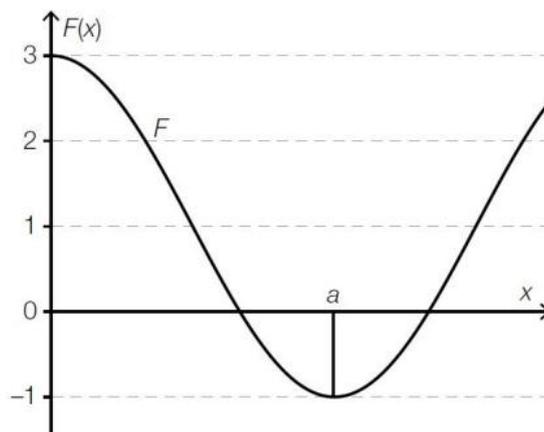
| x | $F(x)$ |
|-----|--------|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 3 |
| 3 | 6 |
| 4 | 10 |
| 5 | 15 |

Weiters ist die Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x) + 2$ gegeben.

Berechnen Sie $\int_1^4 g(x) dx$.

Wert eines bestimmten Integrals* - 1_631, AN4.3, Halboffenes Antwortformat

Von einer reellen Funktion f ist der Graph einer Stammfunktion F abgebildet.



Geben Sie den Wert des bestimmten Integrals $I = \int_0^a f(x) dx$ an!

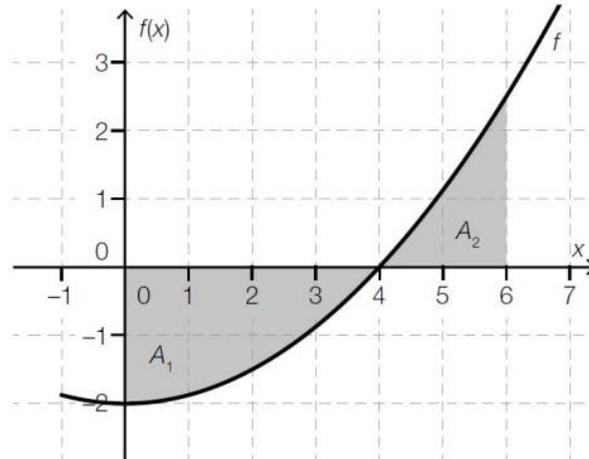
$I =$ _____

Wert eines bestimmten Integrals* - 1_679, AN4.3, Halboffenes Antwortformat

Nachstehend ist der Graph einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dargestellt. Zusätzlich sind zwei Flächen gekennzeichnet.

Die Fläche A_1 wird vom Graphen der Funktion f und von der x -Achse im Intervall $[0; 4]$ begrenzt und hat einen Flächeninhalt von $\frac{16}{3}$ Flächeneinheiten.

Die Fläche A_2 wird vom Graphen der Funktion f und von der x -Achse im Intervall $[4; 6]$ begrenzt und hat einen Flächeninhalt von $\frac{7}{3}$ Flächeneinheiten.



Geben Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^6 f(x) dx$ an!

$$\int_0^6 f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$$