4.6 Unbestimmtes Integral

Maturaskript BHS – Teil A (5 Seiten)

Grundkompetenzen:

- **4.6** Regeln zum Berechnen von Stammfunktionen von Potenz- und Polynomfunktionen verstehen und anwenden

Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Prof. πegischer

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM
2) Gib im Feld „**Volltextsuche**" die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. A_263) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**" und „**GeoGebra**" erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**" erstellt.

Lizenzbedingungen:

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

Video

BHS Teil A 4.6 Unbestimmtes Integral

Die **Umkehroperation** zur **Differentialrechnung** nennt man **Integralrechnung**. Mit Hilfe von Ableitungsregeln konnten wir zu einer Funktion f die Ableitungsfunktion f' bestimmen. In weiterer Folge ist nun das Ziel, von einer Ableitungsfunktion die zugehörige Ausgangsfunktion zu finden.

Definition (Stammfunktion):

Eine Funktion F heißt **Stammfunktion** der Funktion f, wenn für alle x aus derselben Definitionsmenge gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

Musterbeispiel: Sei $f(x) = 4x$. Dann gibt es unendlich viele Stammfunktionen, weil:

$$F_1(x) = 2x^2 \quad \rightarrow \quad weil\ F_1'(x) = 4x$$

$$F_2(x) = 2x^2 + 3 \quad \rightarrow \quad weil\ F_2'(x) = 4x$$

$$F_3(x) = 2x^2 - 1000 \quad \rightarrow \quad weil\ F_3'(x) = 4x$$

Die Funktionen $F_1, F_2\ und\ F_3$ sind Stammfunktionen von $f(x) = 4x$, da die **konstanten Zahlen** durch das **Ableiten wegfallen**.

Allgemein geben wir die Stammfunktion mit einer Integrationskonstante c an (Bemerkung: eine konstante Zahl fällt beim Ableiten weg)

$$f(x) = 4x \quad \rightarrow \quad F(x) = 2x^2 + c \quad mit\ c \in \mathbb{R}.$$

Integrationskonstante c:

Die Integrationskonstante c ist der **unbekannte konstante Term** ($c \in \mathbb{R}$) der Stammfunktion, der durch das **Ableiten wegfällt**. Deswegen ist die Integration keine exakte Umkehrung zur Ableitung einer Funktion, da die Integrationskonstante c ohne weitere Information nicht bestimmt werden kann.

Folge: Es gibt unendlich viele Stammfunktionen zu einer Funktion f(x), da die Integrationskonstante c alle reellen Zahlen annehmen kann.

Definition (Unbestimmtes Integral):

Die Bestimmung von Stammfunktionen nennt man unbestimmtes Integrieren. Dazu führt man eine neue Schreibweise mit Hilfe des Integralzeichens $\int$ ein.

Es gilt:

Stammfunktion

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

Integrationskonstante c

Integrand vorkommende Funktion

Integrationsvariable

Den Ausdruck dx bezeichnet man als Differential. Dieser zeigt, nach welcher Variable integriert werden soll.

Integrationsregeln:

Konstante Zahl $f(x) = k$ mit $k \in \mathbb{R}$	$\int k\ dx = k \cdot x + c$	$f(x) = 4 \ \rightarrow\ F(x) = 4x + c$
Potenzregel $f(x) = x^n$ mit $n \neq -1$	$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	Exponent um 1 erhöhen und durch den neuen Exponenten dividieren. Die Potenzregel gilt für alle Potenzen mit $n \neq -1$.
	$f(x) = x^2 \ \rightarrow\ F(x) = \frac{x^3}{3} + c$	$f(x) = x^6 \rightarrow F(x) = \frac{x^7}{7} + c$
Faktorregel	$\int c \cdot f(x)\ dx = c \cdot \int f(x)\ dx$	Ein konstanter Faktor kann herausgehoben werden.
	$f(x) = 4x^2 \ \rightarrow\ F(x) = 4 \cdot \frac{x^3}{3} + c$	
Summenregel	$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx$	Bei einer Summe werden die Summanden einzeln integriert. (analog Differenz)
	$f(x) = 5x^2 - 3x + 3 \ \rightarrow\ F(x) = 5 \cdot \frac{x^3}{3} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + c$	

Video

Bsp. 1) Berechne eine Stammfunktion von f. Überprüfe durch Differenzieren.

a. $f(x) = 3x + 2$	**b.** $f(x) = 4x^2 - 3x$	**c.** $f(x) = 6x^5 - 3x^2$
d. $f(x) = x^{-4}$	**e.** $f(x) = -3x + 2$	**f.** $f(x) = 4x^{-2} - 2x$

Bsp. 2) Gegeben sind eine Polynomfunktion f und eine ihrer möglichen Stammfunktionen F. Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an.

Eine Funktion f hat unendlich viele Stammfunktionen, die sich nur durch eine additive Integrationskonstante unterscheiden.	O
Wenn man die Funktion F integriert, erhält man die Funktion f.	O
Eine Funktion F heißt Stammfunktion der Funktion f, wenn gilt: $f(x) = F(x) + c$	O
Es gilt: $f(x) = F'(x)$	O
Wenn man die Funktion f differenziert, erhält man die Funktion F.	O

Musterbeispiel: Bestimme jene Stammfunktion von f, für die die gegebene Bedingung gilt. $f(x) = 2x + 3 \ \ \& \ \ F(3) = 23$	$F(x) = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + c$ $= x^2 + 3x + c$ **Gesucht:** Parameter c **Wir wissen:** $F(3) = 23$	$3^2 + 3 \cdot 3 + c = 23$ $9 + 9 + c = 23 \ \ \vert - 18$ $c = 5$ $\boldsymbol{F(x) = x^2 + 3x + 5}$

Bsp. 3) Bestimme jene Stammfunktion von f, für die die gegebene Bedingung gilt.

a. $f(x) = 4 \ \ \& \ \ F(-2) = -5$	**b.** $f(x) = 2x \ \ \& \ \ F(3) = 2$	**c.** $f(x) = x^2 - 4 \ \& \ F(6) = 49$
d. $f(x) = x^4 - e^x \ \& \ F(0) = -5$	**e.** $f(x) = -6x^5 \ \& \ F(-1) = -101$	**f.** $4x^2 - 3x \ \& \ F(6) = 245$

Ernteertrag (A_128)

Ein Landwirt will den Ertrag pro Quadratmeter für eine bestimmte Gemüsesorte steigern.
Dazu prüft er den Einsatz eines Düngemittels.

a) Die Ableitungsfunktion E' der Ertragsfunktion E lautet:

$E'(x) = -891 \cdot x^2 + 297 \cdot x$ mit $0 \leq x \leq 0{,}53$

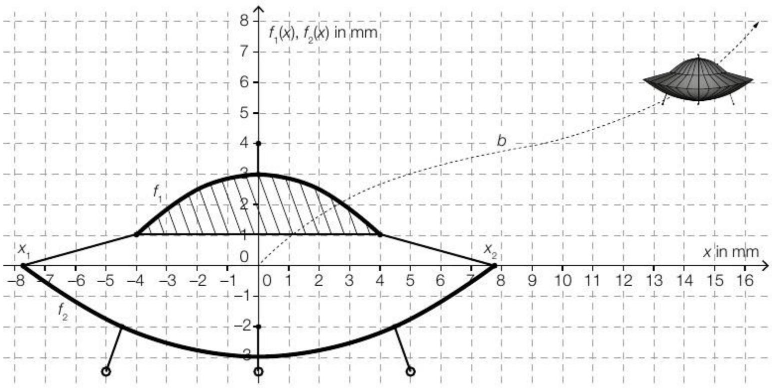
x … Düngermenge in kg/m²
$E'(x)$ … lokale Ertragsänderungsrate des Ertrags bei der Düngermenge x

Ohne Düngemittel erntet der Landwirt durchschnittlich 2,5 kg Gemüse pro Quadratmeter.

– Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Ertragsfunktion E.

UFO (A_188)

Für ein Computerspiel wurde ein einfaches UFO gezeichnet. Die Kuppel und der Unterbau werden durch die quadratischen Funktionen f_1 und f_2 modelliert (siehe nachstehende Abbildung).



c) Die Steigung der dargestellten Flugbahn b des UFOs erhält man durch folgende Ableitungsfunktion:

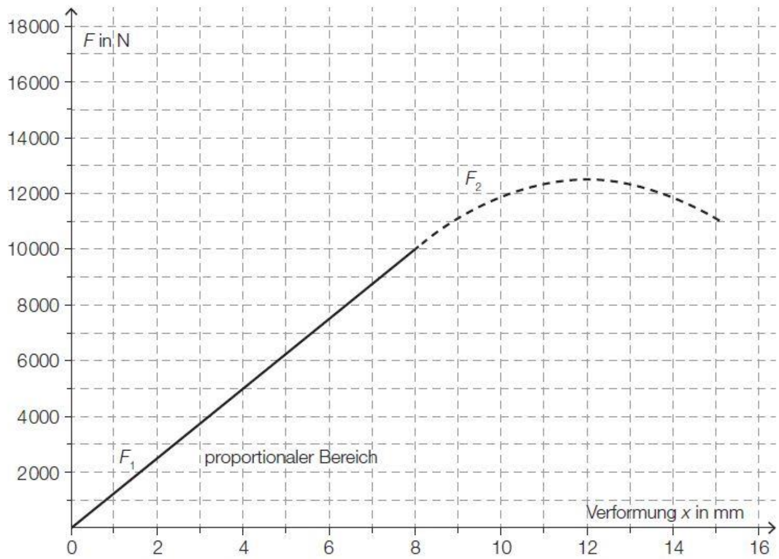
$$b'(x) = \frac{x^2}{80} - \frac{x}{5} + 1$$

– Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung der Funktion b.

Bruchbiegepruefung (B_027)

Bei einer Bruchbiegeprüfung wird die Festigkeit von Materialproben bestimmt. Unter Erhöhung des Betrags der Kraft $\vec{F}$ in Newton (N) wird die verursachte Verformung x in Millimetern (mm) ermittelt. Das Kraft-Verformungs-Diagramm beschreibt den Zusammenhang von Kraft und Verformung.

Der Verlauf einer Bruchbiegeprüfung an einer Holzprobe ist im nachstehenden Kraft-Verformungs-Diagramm dargestellt.



$$F_2(x) = -\frac{625}{4} \cdot x^2 + 3750 \cdot x - 10000 \quad \text{mit} \quad 8 \leq x \leq 15{,}1$$

b) Nach einer Verformung von 15,1 mm kam es zum Bruch.

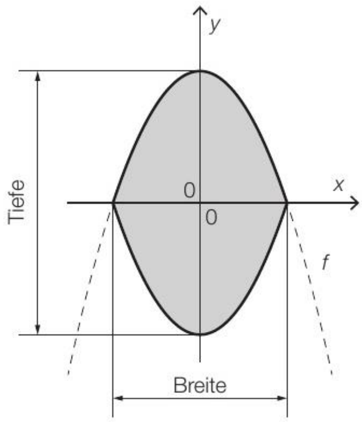
– Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion F_1.
– Berechnen Sie die Arbeit W ($W = \int F(x)\,dx$), die bis zum Bruch verrichtet wurde.

Dinosaurier (A_142)

a) Um das Körpervolumen eines Dinosauriers zu schätzen, werden Messungen am Skelett durchgeführt. Die Form des Körperquerschnitts wird dann – wie in der nachstehenden Abbildung dargestellt – mithilfe einer Funktion f modelliert:

$f(x) = 1 - a \cdot x^2, \;\; a > 0$

Der Graph von f bildet die obere Begrenzung des Querschnitts, die untere Begrenzung verläuft dazu symmetrisch bezüglich der x-Achse.



Quelle: Etemenanki3 – own work, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diplodocus_longus_Denver_1.jpg [15.01.2020].

Zur Berechnung der Querschnittsfläche mithilfe des Integrals wird eine Stammfunktion von f benötigt.

– Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion F von f, für die gilt: $F(0) = 0$