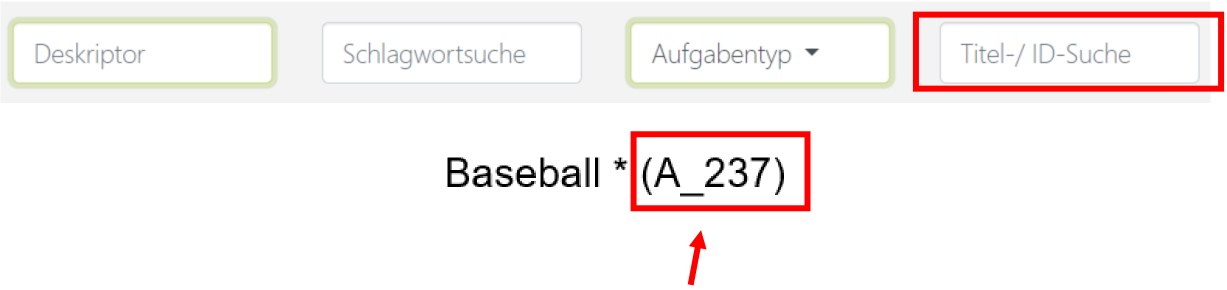
4.4 Monotonieverhalten, Steigung der Tangente und Steigungswinkel, lokale Extrema, qualitatives Krümmungsverhalten, Wendepunkte (LÖSUNGEN)

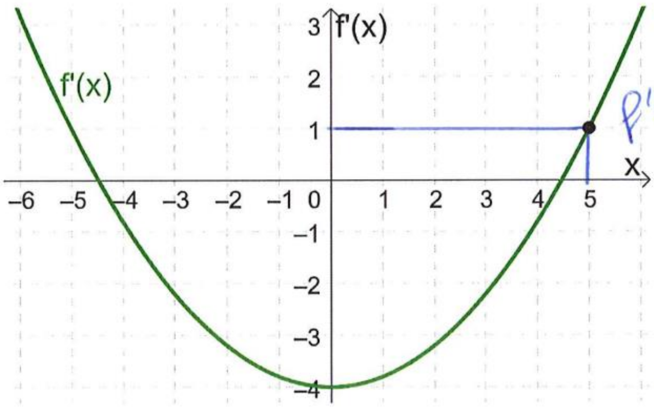
Lösungen Maturaaufgaben:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik BHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM
2) Gib im Feld „**Titel-/ID-Suche**“ die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.



Nummer

Bsp. 1) Gegeben ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$. Der Punkt $P = (3|7)$ liegt auf dem Graphen der Funktion f. Bestimme die Gleichung der Tangente der Funktion f durch den Punkt P.



$f'(5)=1$ $\quad$ $P=(3|7)$

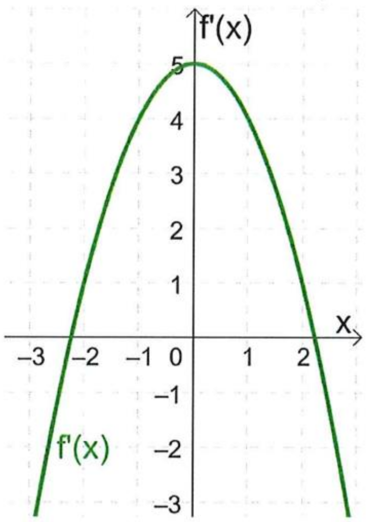
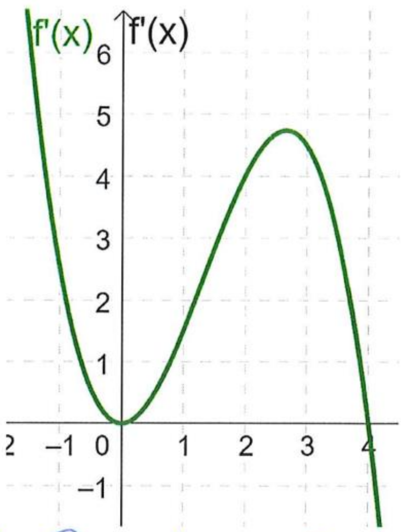
$t: y=1x+d$

$7=1\cdot 3+d \quad |-3$

$4=d$

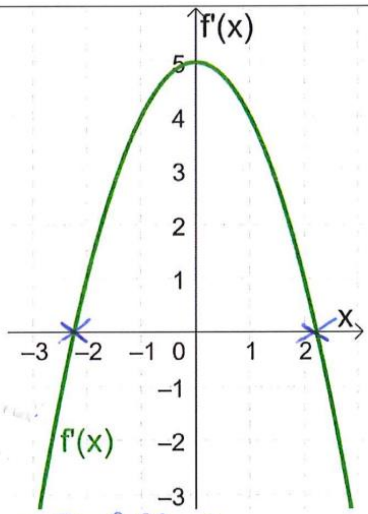
$t: y=x+4$

Bsp. 2) Gegeben ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$. Bestimme die Steigung der ursprüngliche Funktion $f(x)$ an den gesuchten Stellen.

$x_1 = -2\,; x_2 = 0\,; x_3 = 1$	$x_1 = 0\,; x_2 = 2\,; x_3 = 4$
	
$f'(-2)=1$ $f'(1)=4$ $f'(0)=5$	$f'(0)=0$ $f'(4)=0$ $f'(2)=4$

Bsp. 3) Gegeben ist der Graph einer Ableitungsfunktion $f'(x)$.

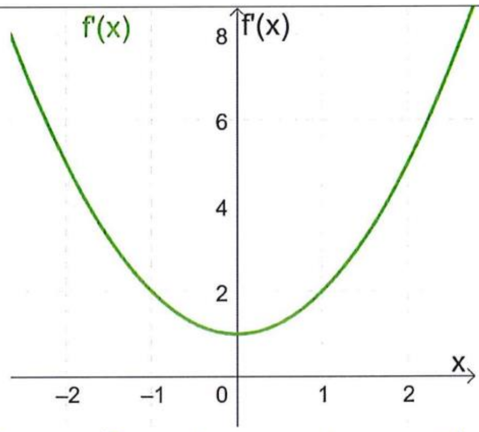
- Bestimme die möglichen Extremstellen der Funktion f und gib auch an, welcher Art sie sind.
- Bestimme das Monotonieverhalten der ursprünglichen Funktion $f(x)$.



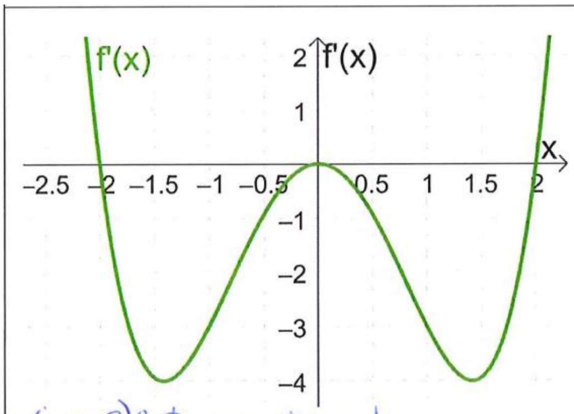
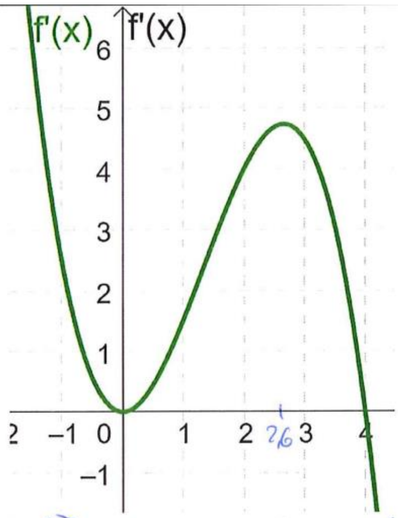
- $(-\infty; -2,3)$: fallend
- $(-2,3; 2,3)$: steigend
- $(2,3; +\infty)$: fallend

$x=-2,3$ ↘↗ Minimumstelle

$x=2,3$ ↗↘ Maximumstelle



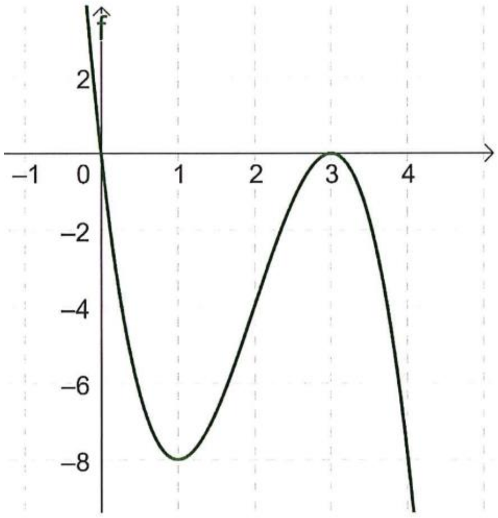
- $(-\infty; +\infty)$: str. mon. steigend!
- Keine lokalen Extremstellen

	
• $(-\infty; -2)$: str. mon. steigend • $(-\infty; 2)$: str. mon. fallend bei $x=0$: Sattelstelle • $(2; +\infty)$: str. mon. steigend $x_1 = -2$ … Maximumstelle $x_2 = 2$ … Minimumstelle	• $(-\infty; 4)$: str. mon. steigend $x=0$… Sattelstelle • $(4; +\infty)$: str. mon. fallend $x=4$… Maximumstelle!

Bsp. 4)

a. $f(x) = x^2 - 5x$	b. $f(x) = 3x^4 + 6x^3 - 2$	c. $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 7x + 1$
$f'(x) = 2x - 5$ $f''(x) = 2$	$f'(x) = 12x^3 + 18x^2$ $f''(x) = 36x^2 + 36x$	$f'(x) = -6x^2 + 10x - 7$ $f''(x) = -12x + 10$
③ $f'(3) = 1$ $f'(7) = 9$ ④ $f''(-4) = 2$ $f''(8) = 2$ ⑤ $f(-5) = 50 \Rightarrow P_1 = (-5\|50)$ $f(10) = 50 \Rightarrow P_2 = (10\|50)$	③ $f'(3) = 486$ $f'(7) = 4998$ ④ $f''(-4) = 432$ $f''(8) = 2592$ ⑤ $f(-5) = 1123$ $P_1 = (-5\|1123)$ $f(10) = 35998$ $P_2 = (10\|35998)$	③ $f'(3) = -31$ $f'(7) = -231$ ④ $f''(-4) = 58$ $f''(8) = -86$ ⑤ $f(-5) = 411$ $P_1 = (-5\|411)$ $f(10) = -1569$ $P_2 = (10\|-1569)$

Bsp. 5)



$f'(0) < 0$	X
$f'(3) = 0 \,\&\, f''(3) < 0$	X
$f''(2) = 0 \,\&\, f'''(2) \neq 0$	X
$f'(1) = 0 \,\&\, f''(1) < 0$	O
$x = 3$ ist eine lokale Maximumstelle	X
$f(1) < 0$	X
$f''(3) > 0$	O
$f(3) = 0 \,\&\, f'(3) = 0$	X
$f(2) > 0$	O
$f'(2{,}5) > 0$	X

Bsp. 6)

a. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$	b. $f(x) = -4x^2 + 10$	c. $f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 7$
$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ $f''(x) = 6x - 6$	$f'(x) = -8x$ $f''(x) = -8$	$f'(x) = 8x^3 - 8x$ $f''(x) = 24x^2 - 8$
① $f'(x) = 0$: $3x^2 - 6x + 2 = 0$ $\Rightarrow x_1 \approx 0{,}42;\ x_2 \approx 1{,}58$ ② $f''(0{,}42) = -3{,}48 < 0$ MAX. $f''(1{,}58) = 3{,}48 > 0$ MIN. ③ $f(0{,}42) = 0{,}38$ $H = (0{,}42 \mid 0{,}38)$ $f(1{,}58) \approx -0{,}38$ $T = (1{,}58 \mid -0{,}38)$	① $f'(x) = 0$ $-8x = 0 \quad \mid :(-8)$ $x = 0$ ② $f''(0) = -8 < 0$ $\rightsquigarrow x = 0$… MAXIMUM ③ $f(0) = 10$ $\Rightarrow H = (0 \mid 10)$	① $f'(x) = 0$: $8x^3 - 8x = 0$ $\Rightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 0;\ x_3 = 1$ ② $f''(-1) = 16 > 0$ MIN $f''(0) = -8 < 0$ MAX $f''(1) = 16 > 0$ MIN ③ $f(-1) = -9 \rightsquigarrow T = (-1 \mid -9)$ $f(0) = -7 \rightsquigarrow H = (0 \mid -7)$ $f(1) = -9 \rightsquigarrow T = (1 \mid -9)$

Bsp. 7a)

29a) $f(x)=x^3-6x^2+9x$

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$f''(x)=6x-12$

$f'''(x)=6$

① $f(x)=0$

$x^3-6x^2+9x=0$

$\to$ $x_1=0$ $x_2=3$

② $f'(x)=0$

$3x^2-12x+9=0$

$\to$ $x_1=1 \to f''(1)=-6<0$ x_1... Maximumstelle

$f(1)=4 \to H=(1|4)$

$\to$ $x_2=3 \to f''(3)=6>0$ x_2... Minimumstelle

$f(3)=0 \to T=(3|0)$

③ $f''(x)=0$

$6x-12=0$

$6x=12$

$x=2$

$f'''(2)=6\neq0$ ✓

$f(2)=2$

$W=(2|2)$

Wendetangente:

$t: y=kx+d$

$f'(2)=-3$

$t: y=-3x+d$

$t: 2=-6+d \quad |+6$

$8=d$

$t_w: y=-3x+8$

Bsp. 7b)

b) $f(x) = x^2 - 4$

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2$

① $f(x) = 0$

$x_1 = -2$ $x_2 = 2$

② $f'(x) = 0$

$2x = 0$

$x = 0$

$f''(0) = 2 \Rightarrow x = 0$ Minimumstelle

$\rightsquigarrow f(0) = -4 \Rightarrow T = (0|-4)$

③ Keine Wendestelle! $f''(x) = 0$ $2 \neq 0$ ↯

9 $f(x) = x^4 - 2x^2$

① $x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x_1 \approx -1{,}4 \quad x_2 \approx 0 \quad x_3 \approx 1{,}4$

② $f'(x) = 4x^3 - 4x \qquad f''(x) = 12x^2 - 4 \qquad f'''(x) = 24x$

$f'(x) = 0$

- $x_1 = -1 \Rightarrow f''(-1) = 8 > 0$ MINIMUM $\Rightarrow f(-1) = -1$ $\quad T_1 = (-1|-1)$
- $x_2 = 0 \Rightarrow f''(0) = -4 < 0$ MAXIMUM $\Rightarrow f(0) = 0$ $\quad H = (0|0)$
- $x_3 = 1 \Rightarrow f''(1) = 8 > 0$ MINIMUM $\Rightarrow f(1) = -1$ $\quad T_2 = (1|-1)$

③ $f''(x) = 0$

$x_1 = -0{,}58$

$f'''(-0{,}58) = -13{,}8 \neq 0$ ✓

$f(-0{,}58) = -0{,}56 \Rightarrow W_1 = (-0{,}58|-0{,}56)$

$f'(-0{,}58) = 1{,}54$

$t_{W_1}: y = 1{,}54x + 0{,}33$

$x_2 = +0{,}58$

$f'''(0{,}58) = 13{,}8 \neq 0$ ✓

$f(0{,}58) = -0{,}56 \Rightarrow W_2 = (0{,}58|-0{,}56)$

$f'(0{,}58) = -1{,}54 \Rightarrow t_W: y = -1{,}54x + 0{,}33$

Bsp. 8)

30) $h(x) = -0{,}01x^2 + 0{,}7x$

$h'(x) = v(x) = -0{,}02x + 0{,}7$

$h''(x) = -0{,}02 \quad (= a(x))$

a) $h(x) = 0$

↳ $x_1 = 0$

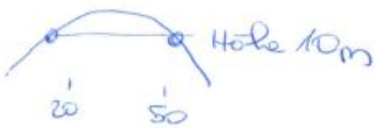
↳ $x_2 = 70$ ⇝ $D = [0;70]$

b) $h(x) = 10$

Geo-Gebra ↳ $-0{,}01x^2 + 0{,}7x = 10$

⇒ $x_1 = 20\,m$ $\quad x_2 = 50\,m$

Nach 20m & 50m.



c) $h(40) = \underline{\underline{12\,m}}$

d) $h'(x) = 0$ ⇝ $x = 35$

$h''(35) = -0{,}02 < 0$ MAXIMUM!

⇝ Nach 35m erreicht der Ball seine maximale Höhe!

⇓

$h(35) = 12{,}25\,m$

Bsp. 9)

31) $s(t) = -\frac{1}{64}t^3 + \frac{15}{16}t^2$

$s'(t) = v(t) = -\frac{3}{64}t^2 + \frac{30}{16}t$

$s''(t) = a(t) = -\frac{6}{64}t + \frac{30}{16}$

a) $s(30) - s(15) = 421{,}9 - 158{,}2 = \underline{263{,}7\,m}$

Zwischen der 15. & 30. Sekunde wurden ca. 263,7 m zurückgelegt!

b) $\frac{s(20) - s(5)}{20 - 5} \approx \underline{\underline{15{,}2\,\frac{m}{s}}}$

c) $s'(10) = 14{,}1\,\frac{m}{s}$ Momentane Geschw. nach 10 Sekunden

$s''(25) = -0{,}47\,\frac{m}{s^2}$ Momentane Beschleunigung nach 25 s.

d) $v(t) = -\frac{3}{64}t^2 + \frac{30}{16}t$

$v'(t) = -\frac{6}{64}t + \frac{30}{16}$

$v''(t) = -\frac{6}{64}$

$\rightarrow v'(t) = 0 \Rightarrow t = 20\,s$

$v''(20) = -\frac{6}{64} < 0$ ↗ MAXIMUM!

$v(20) = 18{,}75\,\frac{m}{s}$

Nach 20 sek erreicht das Auto eine maximale Geschwindigkeit von $18{,}75\,\frac{m}{s}$.

Bsp. 10)

Aufgabenstellung:

f hat an der Stelle x eine Minimumstelle	D
f hat an der Stelle x eine Nullstelle	C
f besitzt an der Stelle x eine Sattelstelle	B
f hat an der Stelle x die Steigung 2	F

A	$f'(x) = 0 \,\&\, f''(x) < 0$
B	$f'(x) = 0 \,\&\, f''(x) = 0$
C	$f(x) = 0$
D	$f'(x) = 0 \,\&\, f''(x) > 0$
E	$f'(x) = 2$
F	$f'(2) = 2$

Bsp. 11)

33) $s(t) = -\frac{t^3}{3} + 2t^2 + \frac{t}{3}$

$v(t) = s'(t) = -t^2 + 4t + \frac{1}{3}$

$a(t) = s''(t) = -2t + 4$

a) $a(t) = 0$

$-2t + 4 = 0$

$-2t = -4$

$t = 2$

b) $v'(t) = 0 \Leftrightarrow a(t) = 0 \rightsquigarrow t = 2$

$v''(t) = a'(t) = -2$

$\Rightarrow v''(2) = -2 < 0$ MAXIMUM! ✓