

4.3 Regeln zum Differenzieren

Maturaskript BHS – Teil A (5 Seiten)

Grundkompetenzen:

- **4.3** Regeln zum Berechnen von Ableitungsfunktionen von Potenz-, Polynom- und Exponentialfunktionen und Funktionen, die aus diesen zusammengesetzt sind, verstehen und anwenden: Faktorregel, Summenregel, Produktregel, Kettenregel

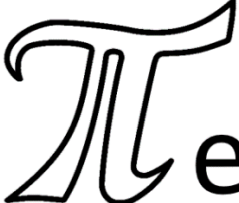
Regel	$f(x)$	$f'(x)$	Bemerkung
Potenzregel	x^n	$n \cdot x^{n-1}$	Der Exponent kommt herunter. Die Hochzahl wird um 1 vermindert.
$f(x) = x^9 \rightarrow f'(x) = 9 \cdot x^8$			
Konstantenregel $c \in \mathbb{R}$	c	0	Konstante Funktionen haben keine Steigung. Somit ergibt auch die Ableitung stets 0.
$f(x) = 5 \rightarrow f'(x) = 0$ oder $g(x) = x^2 + 1 \rightarrow g'(x) = 2x$			
Faktorregel $a \in \mathbb{R}$	$a \cdot f(x)$	$a \cdot f'(x)$	Ein konstanter Faktor ist von der Ableitung nicht betroffen und wird mitgeschrieben.
$f(x) = 2 \cdot x^3 \rightarrow f'(x) = 2 \cdot 3 \cdot x^2 = 6x^2$			
Summenregel	$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$	Eine Summe wird abgeleitet, indem jeder einzelne Summand einzeln abgeleitet wird.
$f(x) = x^2 + 3x^4 \rightarrow f'(x) = 2x + 3 \cdot 4x^3 = 2x + 12x^3$			
Differenzenregel	$f(x) - g(x)$	$f'(x) - g'(x)$	Analog zur Summenregel.

Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Prof.  egischer

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben** (Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool) gelöst werden, um das Erlernete zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info: *bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, ...) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): <https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/>
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

- 1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: <https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM>
- 2) Gib im Feld „**Volltextsuche**“ die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. A_263) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**“ und „**GeoGebra**“ erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**“ erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln	Weitere Regeln für Lehrpersonen
<ul style="list-style-type: none">▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen.▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen.▪ Sie dürfen mein Materialen NICHT gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden.▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden.▪ Bei einem Missbrauch erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.	<p>WICHTIGSTE REGEL: LehrerInnen dürfen die Materialien in Ihrem eigenen Unterricht verwenden:</p> <ul style="list-style-type: none">▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen.▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben.▪ Es ist nicht erlaubt, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben.▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

BHS Teil A 4.3 – Regeln für das Differenzieren



In diesem Abschnitt lernen wir, wie man die Ableitungsfunktion $f'(x)$ bildet.

Die Funktion $f': D \rightarrow \mathbb{R}$ wird Ableitung bzw. Ableitungsfunktion von f genannt.

- ➔ Der Funktionswert von f' an der Stelle x entspricht der Steigung der Tangente der ursprünglichen Funktion f an der Stelle x .
- ➔ Die Ermittlung der Ableitungsfunktion nennt man Differenzieren oder Ableiten.

1
[Video](#)

Es gibt mehrere Ableitungsregeln, an die man sich beim **Differenzieren** halten muss:

Regel	$f(x)$	$f'(x)$	Bemerkung
Potenzregel	x^n	$n \cdot x^{n-1}$	Der Exponent kommt herunter. Die Hochzahl wird um 1 vermindert.
$f(x) = x^9 \rightarrow f'(x) = 9 \cdot x^8$			
Konstantenregel $c \in \mathbb{R}$	c	0	Konstante Funktionen haben keine Steigung. Somit ergibt auch die Ableitung stets 0.
$f(x) = 5 \rightarrow f'(x) = 0$ oder $g(x) = x^2 + 1 \rightarrow g'(x) = 2x$			
Faktorregel $a \in \mathbb{R}$	$a \cdot f(x)$	$a \cdot f'(x)$	Ein konstanter Faktor ist von der Ableitung nicht betroffen und wird mitgeschrieben.
$f(x) = 2 \cdot x^3 \rightarrow f'(x) = 2 \cdot 3 \cdot x^2 = 6x^2$			
Summenregel	$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$	Eine Summe wird abgeleitet, indem jeder einzelne Summand einzeln abgeleitet wird.
$f(x) = x^2 + 3x^4 \rightarrow f'(x) = 2x + 3 \cdot 4x^3 = 2x + 12x^3$			
Differenzenregel	$f(x) - g(x)$	$f'(x) - g'(x)$	Analog zur Summenregel.

Bsp. 1) Bilde die Ableitungsfunktion der Funktion f .

a. $f(x) = 3x^2 + 1$	b. $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2$	c. $f(x) = 6x^3 - x^2 + 17$
d. $f(x) = \frac{x^2}{2}$	e. $f(x) = \frac{3x^4}{24} + 6x^3 - \frac{x}{2}$	f. $f(x) = 13x^2 + 12x - 4$

Bsp. 2) Bestimme die Funktionsgleichung der Tangente an der Stelle p der Funktion f .

<p>a. $f(x) = x^2 + 1$ $p = 3$</p>	<p>b. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ $p = -2$</p>	<p>c. $f(x) = 3x^4 - x^3 + 17$ $p = 10$</p>
--	--	---

Ableitung einer Polynomfunktion* - 1_359, AN2.1, Lückentext

Gegeben sind eine reelle Polynomfunktion f und deren Ableitungsfunktion f' . Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satz-teile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Für die 1. Ableitung der Funktion f mit $f(x) =$ _____ ① _____ gilt: $f'(x) =$ _____ ② _____.

①	
$3x^3 - 4x^2 + 7x - 3$	<input type="checkbox"/>
$6x^2 - 4x + 7$	<input type="checkbox"/>
$3x^2 - 4x + 7$	<input type="checkbox"/>

②	
$x^3 - 2x^2 + 7x$	<input type="checkbox"/>
$6x - 4$	<input type="checkbox"/>
$6x^2 - 4$	<input type="checkbox"/>

Ableitung* - 1_603, AN2.1, 1 aus 6

Gegeben sind sechs Funktionsgleichungen mit einem Parameter k , wobei $k \in \mathbb{Z}$ und $k \neq 0$. Für welche der gegebenen Funktionsgleichungen gilt der Zusammenhang $f'(x) = k \cdot f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

Kreuzen Sie die zutreffende Funktionsgleichung an!

$f(x) = k$	<input type="checkbox"/>
$f(x) = \frac{k}{x}$	<input type="checkbox"/>
$f(x) = k \cdot x$	<input type="checkbox"/>
$f(x) = x^k$	<input type="checkbox"/>
$f(x) = e^{k \cdot x}$	<input type="checkbox"/>
$f(x) = \sin(k \cdot x)$	<input type="checkbox"/>

Ableitungsregeln* - 1_504, AN2.1, 1 aus 6

Über zwei Polynomfunktionen f und g ist bekannt, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
 $g(x) = 3 \cdot f(x) - 2$

Welche der nachstehenden Aussagen ist jedenfalls für alle $x \in \mathbb{R}$ wahr? Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an!

$g'(x) = f'(x)$	<input type="checkbox"/>
$g'(x) = f'(x) - 2$	<input type="checkbox"/>
$g'(x) = 3 \cdot f'(x)$	<input type="checkbox"/>
$g'(x) = 3 \cdot f'(x) - 2$	<input type="checkbox"/>
$g'(x) = 3 \cdot f'(x) - 2 \cdot x$	<input type="checkbox"/>
$g'(x) = -2 \cdot f'(x)$	<input type="checkbox"/>

Reelle Funktion* - 1_456, AN2.1, Halboffenes Antwortformat

Eine reelle Funktion f ist durch die Funktionsgleichung $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2$ gegeben. Geben Sie eine Funktionsgleichung der Ableitungsfunktion f' der Funktion f an!

$f'(x) =$ _____

Regeln des Differenzierens* - 1_1193, AN2.1, 2 aus 5

Gegeben sind die zwei differenzierbaren Funktionen f und g und die positive reelle Zahl a . Kreuzen Sie die beiden Funktionen an, die auf jeden Fall mit $(a^2 \cdot (f + g))'$ übereinstimmen. [2 aus 5]

$2 \cdot a \cdot f' + 2 \cdot a \cdot g'$	<input type="checkbox"/>
$a^2 \cdot f' + a^2 \cdot g'$	<input type="checkbox"/>
$2 \cdot a \cdot (f + g)'$	<input type="checkbox"/>
$a^2 \cdot (f + g)'$	<input type="checkbox"/>
$f' + g'$	<input type="checkbox"/>

$$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$$

Bemerkung: Tritt die Exponentialfunktion in einer Verkettung von Funktionen auf, so musst du bei der Ableitung u.a. die Kettenregel anwenden:

Äußere Ableitung · Innere Ableitung

$$f(x) = e^{3x} \rightarrow f'(x) = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$$
$$f(x) = e^{4x^3+2x^2} \rightarrow f'(x) = e^{4x^3+2x^2} \cdot (12x^2 + 4x)$$

$$f(x) = \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \ln(3) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \ln(x^2 - 5x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2 - 5x} \cdot (2x - 5) = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x}$$

$$f(x) = \sin(x) \rightarrow f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x) \rightarrow f'(x) = -\sin(x)$$

Beispiele:

$$f(x) = \sin(3x^2) \rightarrow f'(x) = \cos(3x^2) \cdot 6x$$

$$f(x) = \cos(-7x) \rightarrow f'(x) = -\sin(-7x) \cdot (-7) = 7 \cdot \sin(-7x)$$

$$f(x) = \sin(e^{2x}) \rightarrow f'(x) = \cos(e^{2x}) \cdot e^{2x} \cdot 2$$

Ableitung einer Winkelfunktion* - 1_432, AN2.1, Offenes Antwortformat

Eine Gleichung einer Funktion f lautet:

$$f(x) = 5 \cdot \cos(x) + \sin(3 \cdot x)$$

Geben Sie eine Gleichung der Ableitungsfunktion f' der Funktion f an!

Sinusfunktion und Cosinusfunktion* - 1_580, AN2.1, 1 aus 6

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = \sin(a \cdot x)$ und g mit $g(x) = a \cdot \cos(a \cdot x)$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Welche Beziehung besteht zwischen den Funktionen f und g und deren Ableitungsfunktionen?

Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, die für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt!

$a \cdot f'(x) = g(x)$	<input type="checkbox"/>
$g'(x) = f(x)$	<input type="checkbox"/>
$a \cdot g(x) = f'(x)$	<input type="checkbox"/>
$f(x) = a \cdot g'(x)$	<input type="checkbox"/>
$f'(x) = g(x)$	<input type="checkbox"/>
$g'(x) = a \cdot f(x)$	<input type="checkbox"/>

Werte einer Ableitungsfunktion* - 1_700, AN2.1, 2 aus 5

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3 \cdot e^x$.

Die nachstehenden Aussagen beziehen sich auf Eigenschaften der Funktion f bzw. deren Ableitungsfunktion f' .

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Es gibt eine Stelle $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 2$.	<input type="checkbox"/>
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f'(x) > f'(x + 1)$.	<input type="checkbox"/>
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f'(x) = 3 \cdot f(x)$.	<input type="checkbox"/>
Es gibt eine Stelle $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$.	<input type="checkbox"/>
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f'(x) \geq 0$.	<input type="checkbox"/>