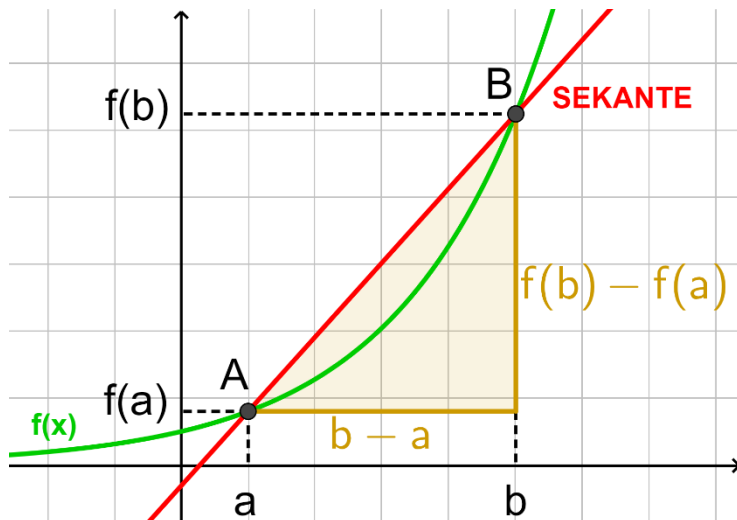


## 4.2 Differenzen- und Differentialquotient

### Maturaskript BHS – Teil A (12 Seiten)

Grundkompetenzen:

- **4.2** Differenzen- und Differentialquotient als mittlere bzw. lokale Änderungsraten interpretieren, damit anwendungsbezogen modellieren, rechnen und argumentieren

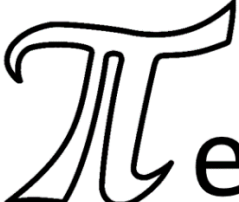


Zusätzlich:

**Erklärvideos** (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

**QR-Codes** im SKRIPT!

**Maturaaufgaben** aus dem Matura-Aufgabenpool

Prof.  egischer

## Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben** (Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool) gelöst werden, um das Erlernete zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info: *bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, ...) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): <https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/>
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

- 1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: <https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM>
- 2) Gib im Feld „**Volltextsuche**“ die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.

### Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. A\_263) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**“ und „**GeoGebra**“ erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**“ erstellt.

### Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln	Weitere Regeln für Lehrpersonen
<ul style="list-style-type: none"><li>▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen.</li><li>▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist <b>nicht erlaubt</b>, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen.</li><li>▪ <b>Sie dürfen mein Materialen NICHT gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden.</b></li><li>▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden.</li><li>▪ Bei einem <b>Missbrauch</b> erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.</li></ul>	<p><b>WICHTIGSTE REGEL:</b> LehrerInnen dürfen die Materialien in <b>Ihrem eigenen Unterricht</b> verwenden:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen.</li><li>▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben.</li><li>▪ Es ist <b>nicht erlaubt</b>, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben.</li><li>▪ <b>LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.</b></li></ul>

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren ([info@prof-tegischer.com](mailto:info@prof-tegischer.com)). Auf meiner Homepage [prof-tegischer.com](http://prof-tegischer.com) finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.



[Video](#)

Sei  $f$  eine reelle Funktion. Für ein Intervall  $[a; b]$  aus der Definitionsmenge definiert man:

- $f(b) - f(a)$  ... absolute Änderung von  $f$  in  $[a; b]$
- $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  ... mittlere Änderungsrate (Differenzenquotient) von  $f$  in  $[a; b]$
- $\frac{f(b)-f(a)}{f(a)}$  ... relative Änderung von  $f$  in  $[a; b]$
- $\frac{f(b)-f(a)}{f(a)} \cdot 100$  ... prozentuelle Änderung von  $f$  in  $[a; b]$

**Bsp. 1)** Gegeben ist eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Bestimme jeweils die (1) absolute Änderung, (2) mittlere Änderung, (3) relative Änderung und (4) prozentuelle Änderung im Intervall  $[2; 5]$ .

a. $f(x) = 2x - 7$	b. $f(x) = -x^2 + 6x$
c. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$	d. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 4x$

### Gold \* (A\_160)

Das Edelmetall Gold gilt als besonders wertvoll, weil es selten vorkommt, leicht zu Schmuck verarbeitet werden kann und sehr beständig ist.

- c) Die nachstehende Grafik zeigt die weltweite jährliche Förderung von Gold ab dem Jahr 1900 in Tonnen.



- Lesen Sie aus der obigen Grafik ab, in welchem Jahrzehnt die weltweite Förderung absolut am stärksten gestiegen ist.

## Bewegungsaufgaben in Zusammenhang mit der mittleren Änderungsrate

- $s(t)$  ... gibt den zurückgelegten Weg nach  $t$  Sekunden/Minuten/Stunden an!  
Einheiten:  $m, km$
- $v(t)$  ... gibt die (momentane) Geschwindigkeit nach  $t$  Sekunden/Minuten/Stunden an!  
Einheiten:  $\frac{m}{s}; \frac{km}{h}$  es gilt:  $1 \frac{m}{s} = 3,6 \frac{km}{h}$
- $a(t)$  ... gibt die (momentane) Beschleunigung nach  $t$  Sekunden/Minuten/Stunden an!  
Einheit:  $\frac{m}{s^2}$

### Mittlere Geschwindigkeit und Mittlere Beschleunigung:

- a.  $\bar{v}(t_1, t_2) = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$  ... gibt die mittlere Geschwindigkeit im Intervall  $[t_1; t_2]$  an!  
(=Mittlere Änderungsrate / Differenzenquotient des Weges in Bezug auf die Zeit)

$$\text{Beispiel: } \bar{v}(1,4) = \frac{s(4) - s(1)}{4 - 1} = 10 \frac{m}{s}$$

Im Zeitintervall  $[1;4]$  (=zwischen erster und vierter Sekunde) beträgt die mittlere Geschwindigkeit  $10 \frac{m}{s}$

- b.  $\bar{a}(t_1, t_2) = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$  ... gibt die mittlere Beschleunigung im Intervall  $[t_1; t_2]$  an!  
(=Mittlere Änderungsrate / Differenzenquotient der Geschwindigkeit in Bezug auf die Zeit)

$$\text{Beispiel: } \bar{a}(1,4) = \frac{v(4) - v(1)}{4 - 1} = 3 \frac{m}{s^2}$$

Im Zeitintervall  $[1;4]$  (=zwischen erster und vierter Sekunde) beträgt die mittlere Beschleunigung  $3 \frac{m}{s^2}$

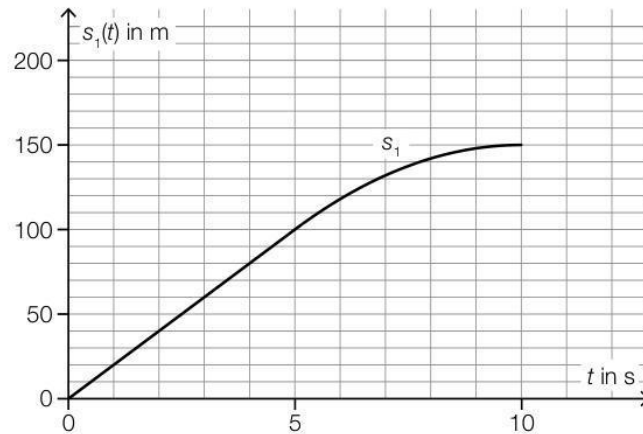
**Bsp. 2)** Gegeben ist eine Wegfunktion  $s(t) = -2t^4 + 8t^3$  eines Körpers ( $s$  in  $m, t$  in  $sek$ ),  $D = [0; 4]$

- Bestimme die **mittlere Geschwindigkeit** im Intervall  $[0;1]$ .
- Bestimme die **momentane Geschwindigkeit** nach 1 Sekunde.
- Bestimme den **zurückgelegten Weg** nach 3 Sekunden.
- Bestimme die **maximale Geschwindigkeit** mit Hilfe der Differentialrechnung. Zeige nachweislich, dass es sich um ein Maximum handelt.
- Berechne die **mittlere Beschleunigung** im Intervall  $[0;2]$ .
- Ermittle, nach wie vielen Sekunden der Körper zum ersten Mal die 40 Meter-Marke erreicht.
- Ermittle, nach wie vielen Sekunden der Körper mit einer Geschwindigkeit von  $10 \frac{m}{s}$  unterwegs ist.

### Testfahrten \* (A\_326)

Auf drei Teststrecken werden Testfahrten mit Autos durchgeführt.

- a) Eine bestimmte Testfahrt auf der ersten Teststrecke kann modellhaft durch die nachstehend dargestellte Weg-Zeit-Funktion  $s_1$  beschrieben werden.



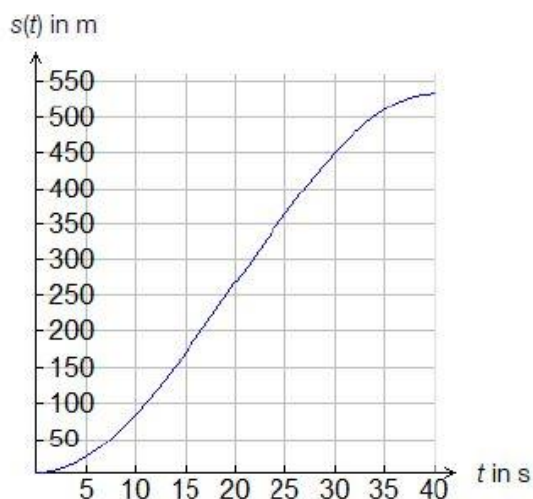
$t$  ... Zeit in s

$s_1(t)$  ... zurückgelegter Weg zur Zeit  $t$  in m

- 1) Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit des Autos auf den letzten 70 m der Testfahrt.

### Autofahrt (1) (B\_072)

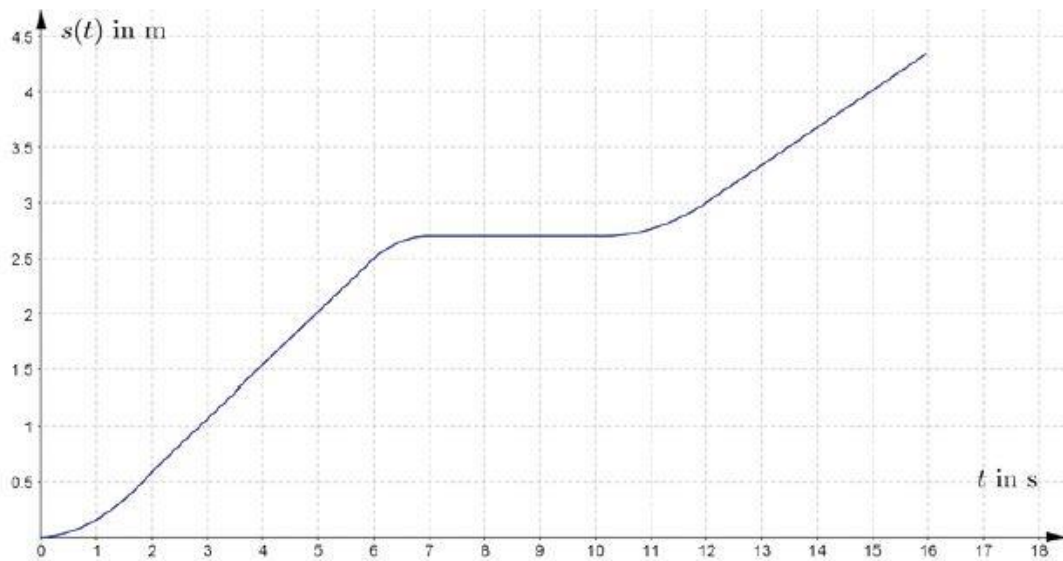
- a) Im folgenden Weg-Zeit-Diagramm ist die von einem Auto zurückgelegte Strecke  $s$  in Metern (m) in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  in Sekunden (s) für  $0 \text{ s} \leq t \leq 40 \text{ s}$  dargestellt.



- Lesen Sie aus der Grafik die mittlere Geschwindigkeit des Autos für das Zeitintervall  $15 \text{ s} \leq t \leq 30 \text{ s}$  ab.
- Lesen Sie aus der Grafik die momentane Geschwindigkeit des Autos für den Zeitpunkt  $t = 30 \text{ s}$  ab.

### Roboter (1) (B\_108)

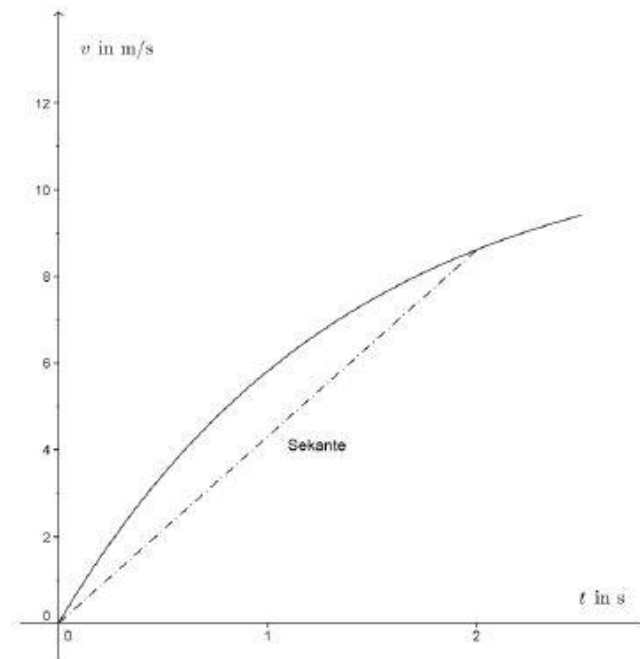
Die nachstehende Grafik stellt in einem Weg-Zeit-Diagramm die Bewegung eines Industrieroboters in einer Produktionshalle dar.



- b) – Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate im Intervall  $[0 \text{ s}; 15 \text{ s}]$ .  
– Erklären Sie, welche Größe der Bewegung durch diese mittlere Änderungsrate beschrieben wird.

### Usain Bolt (B\_007)

- c) Die Laufgeschwindigkeit während der ersten 2 Sekunden des Weltrekordlaufs über 200 m ist in der nachstehenden Grafik dargestellt.



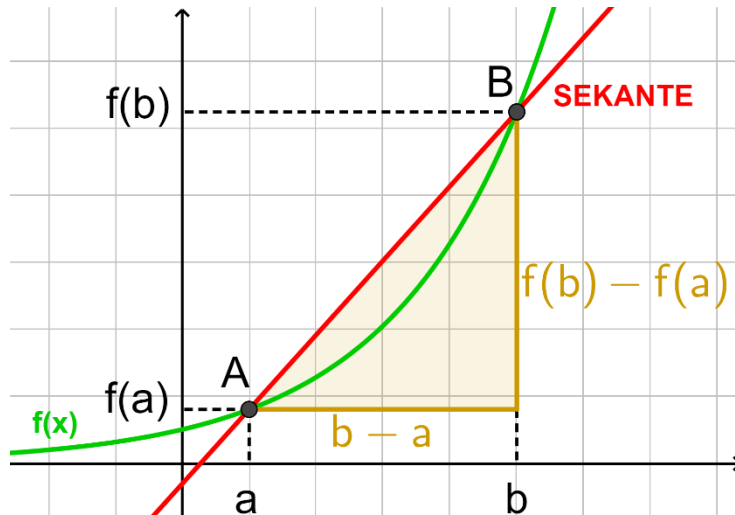
- Lesen Sie die Steigung der eingezeichneten Sekante ab.  
– Interpretieren Sie diese Steigung physikalisch.

**Definition (Differenzenquotient):**

Die **mittlere Änderungsrate** einer reellen Funktion  $f$  im Intervall  $[a; b]$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

wird als **Differenzenquotient** bezeichnet. Graphisch entspricht der Differenzenquotient der **Steigung der Sekante** durch die Punkte  $A = (a|f(a))$  und  $B = (b|f(b))$  an. Die Steigung entspricht der mittleren Änderung der Funktionswerte von  $f$ , wenn das Argument um 1 erhöht wird.



Video

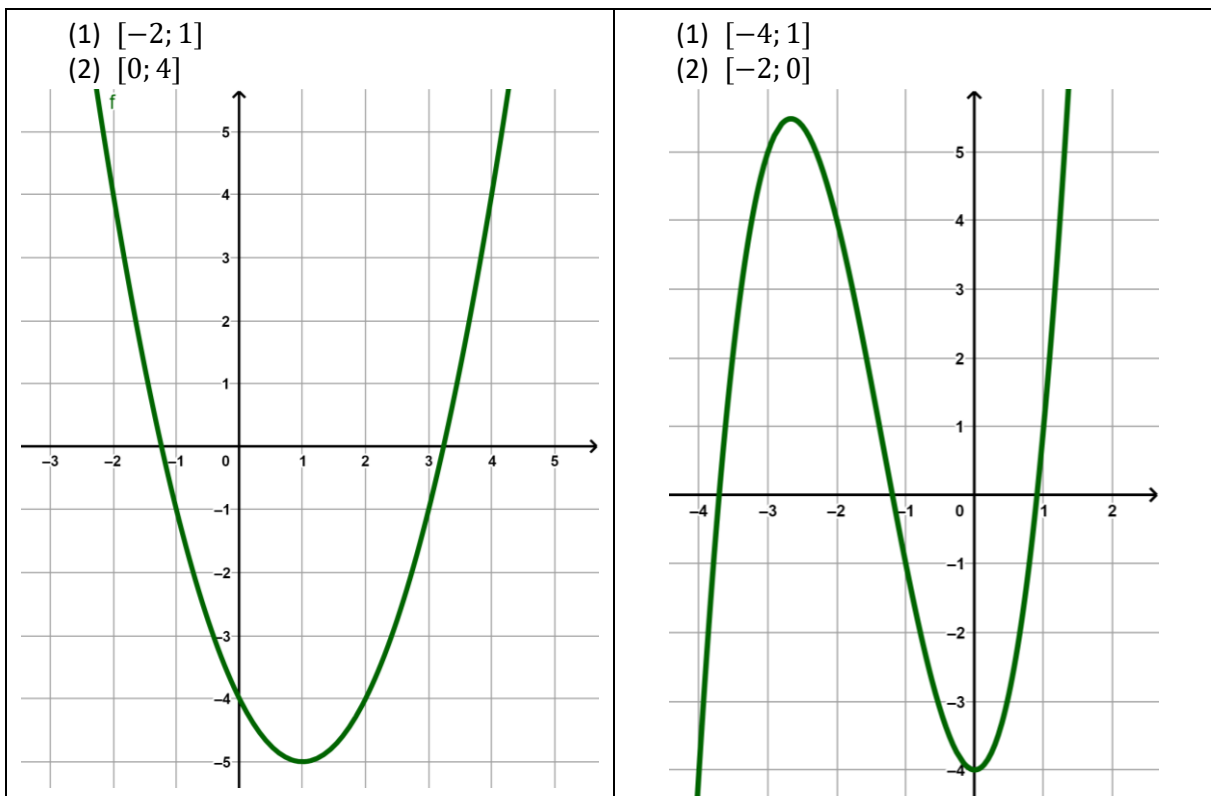


Graphische Deutung  
Differenzenquotient <->  
Steigung der Sekante

**Bsp. 3)** Berechne den Differenzenquotient in (1)  $[-4; -1]$ , (2)  $[-2; 4]$  und (3)  $[1; 2]$ .

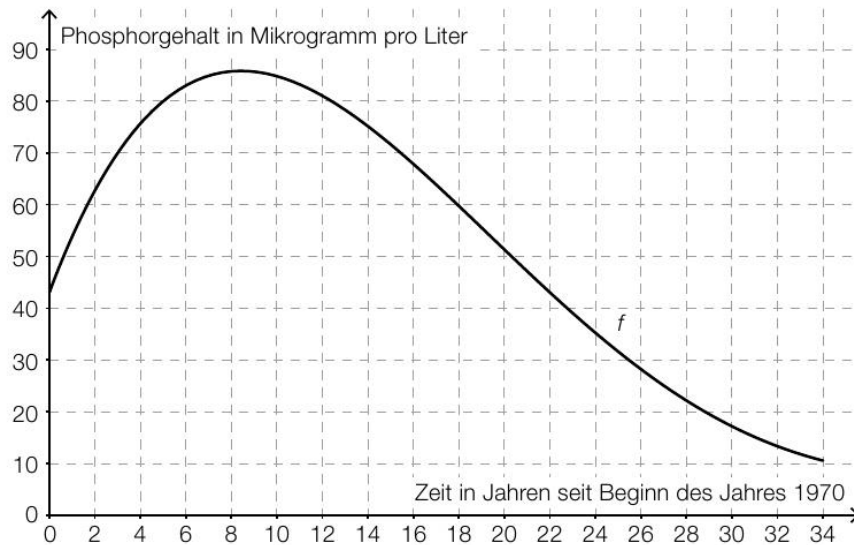
- a.  $f(x) = 2x - 1$
- b.  $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

**Bsp. 4)** Berechne den Differenzenquotient für die gegebenen Intervalle. Zeichne jeweils die Sekante ein. Stelle die Funktionsgleichung jeder Sekante auf.



### Der Bodensee \* (A\_253)

- b) Der Phosphorgehalt im Bodensee kann im Zeitraum von 1970 bis 2004 näherungsweise durch eine Polynomfunktion  $f$  beschrieben werden.



- Ermitteln Sie mithilfe des oben dargestellten Graphen von  $f$  die mittlere Änderungsrate des Phosphorgehalts im Zeitintervall  $[12; 18]$ .

### Die Genussformel \* (A\_263)

Der Physiker Werner Gruber erklärt in seinem Buch *Die Genussformel* (Salzburg: Ecowin, 2008) die kleinen chemischen und physikalischen Tricks der großen Köchinnen und Köche. Dabei werden auch mathematische Zusammenhänge betrachtet.

- b) Für die optimale Bratdauer einer Gans gibt Gruber folgende Werte an:

Masse der Gans in Kilogramm	Bratdauer in Minuten
2,0	104
3,0	136
3,8	159

- Zeigen Sie mithilfe des Differenzenquotienten, dass zwischen Masse und Bratdauer kein exakter linearer Zusammenhang vorliegt.

### Papier \* (A\_316)

- c) In der nachstehenden Tabelle ist die Gesamtproduktion von Papier in Österreich für die Jahre 1990, 2000 und 2012 angegeben.

Jahr	1990	2000	2012
Gesamtproduktion von Papier in Millionen Tonnen	2,93	4,39	5,00

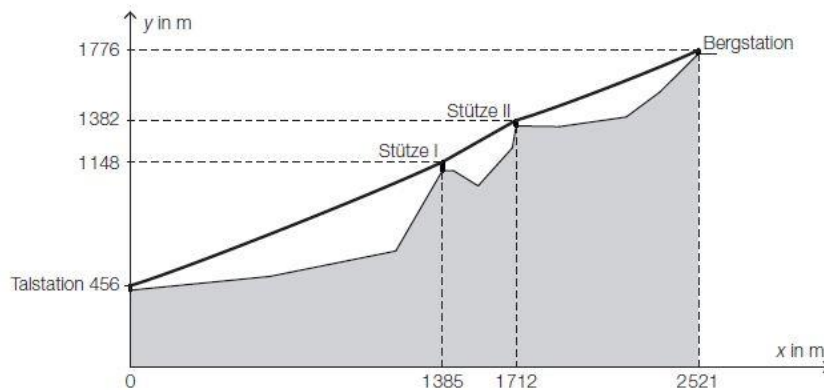
Datenquelle: Austropapier

- 1) Zeigen Sie mithilfe des Differenzenquotienten, dass sich die Entwicklung der Gesamtproduktion von Papier in Österreich im Zeitraum von 1990 bis 2012 nicht durch ein lineares Modell beschreiben lässt.



### Gondelbahn auf den Untersberg \* (A\_224)

In nachstehender Abbildung ist der Verlauf des Trageseils der Gondelbahn von St. Leonhard auf den Untersberg vereinfacht dargestellt.



x ... horizontaler Abstand von der Talstation in Metern (m)  
y ... Höhe über Meeresniveau in m

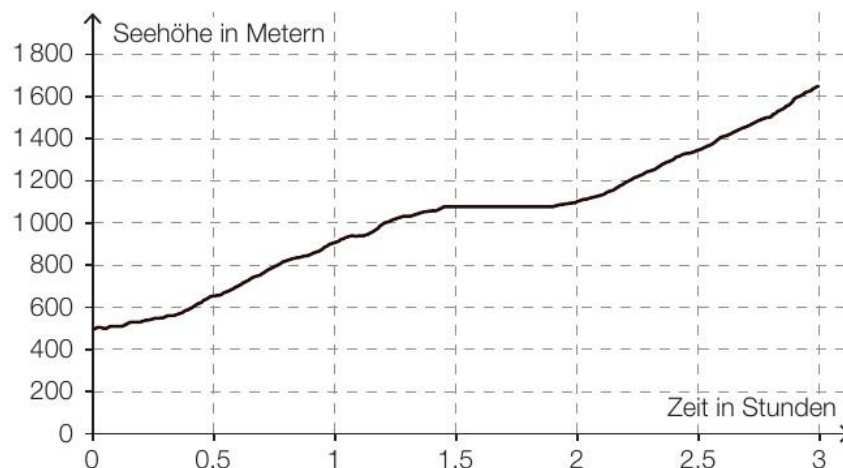
a) Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1776 - 456}{2521 - 0} \approx 0,52$$

– Beschreiben Sie, was das Ergebnis im gegebenen Sachzusammenhang bedeutet.

### Wandern \* (A\_089)

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Höhenverlauf während einer 3-stündigen Wanderung dargestellt.



1) Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate der Seehöhe in Abhängigkeit von der Zeit für die gesamte Wanderung. Geben Sie das Ergebnis mit der zugehörigen Einheit an.

Jemand behauptet: „Nach etwa 1,5 Stunden wurde eine Pause eingelegt. Das erkennt man daran, dass der Graph während der Pause waagrecht verläuft.“

2) Argumentieren Sie, dass diese Behauptung nicht zwingend richtig sein muss.



### Definition (Differentialquotient):

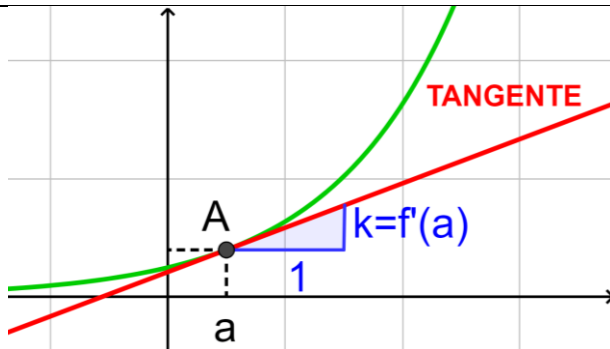
Die **momentane Änderungsrate** einer Funktion  $f$  an der Stelle  $a$

$$f'(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

[Video](#)

wird als **Differentialquotient** (1. Ableitung) bezeichnet.

Der Differentialquotient gibt die Steigung der **Tangente** durch den Punkt  $A = (a|f(a))$  an.



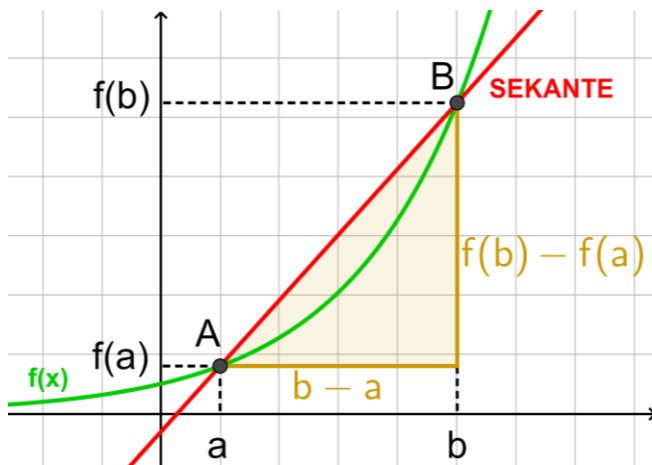
**Bemerkung:** Unter der Steigung einer Funktion an einer Stelle versteht man die Steigung der Tangente an dieser Stelle!!!!

### Weitere Formeln zum Differentialquotient:

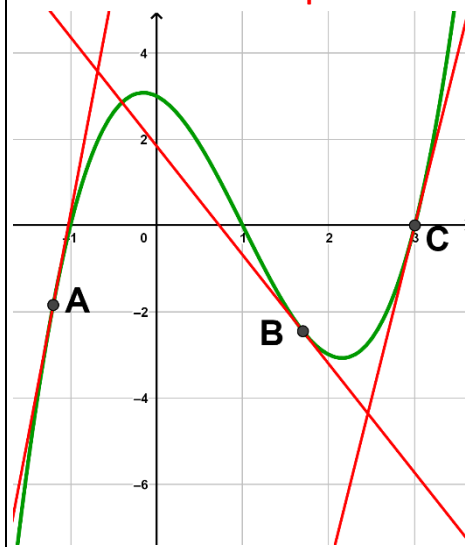
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

#### Differenzenquotient <-> Sekante

Die Sekante geht durch 2 Punkte.



#### Differentialquotient <-> Tangente



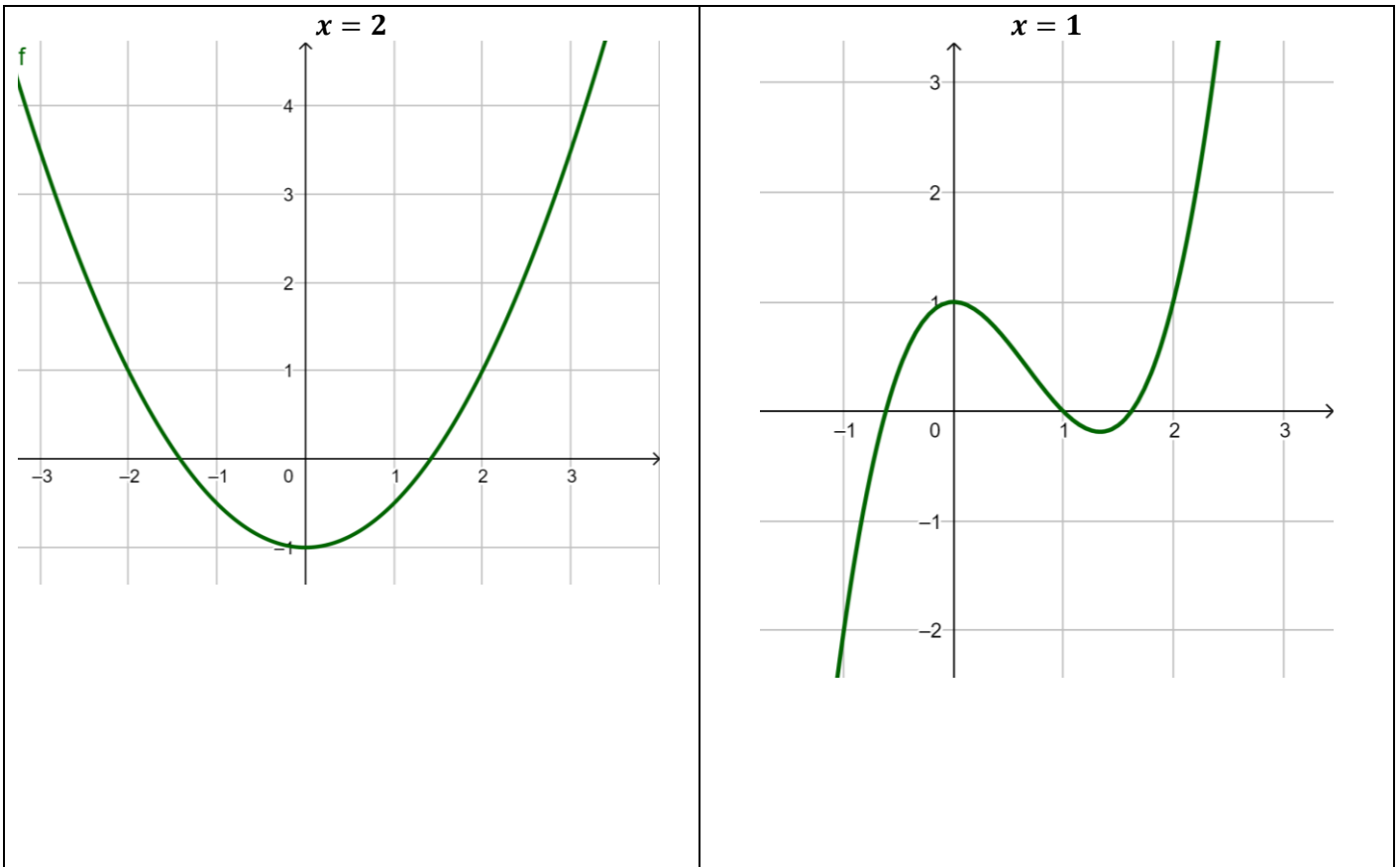
Die Tangente berührt die Funktion in einem Punkt.

Die Tangente zeichnet man mit der Hand nach Gefühl, sodass die Tangente die Funktion nur in einem Punkt berührt.

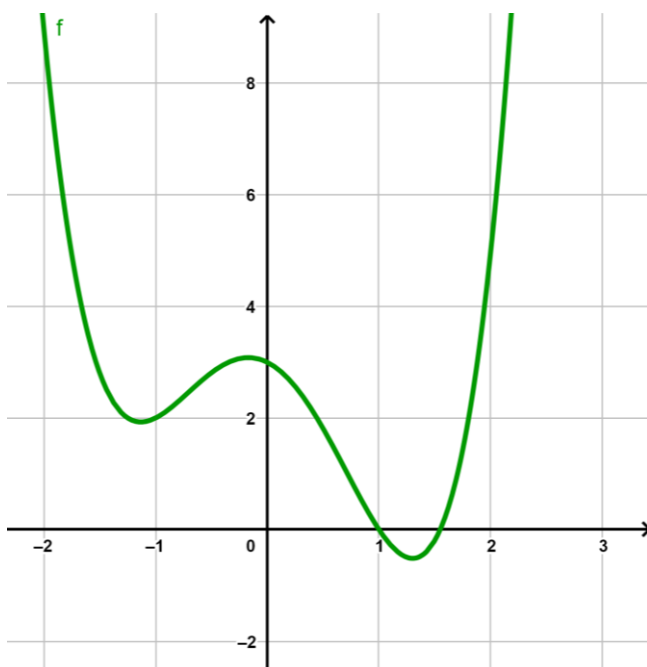
Davor und danach ist der Abstand zum Funktionsgraphen ungefähr gleich groß.

## Bestimmung Differentialquotient über die Tangentensteigung

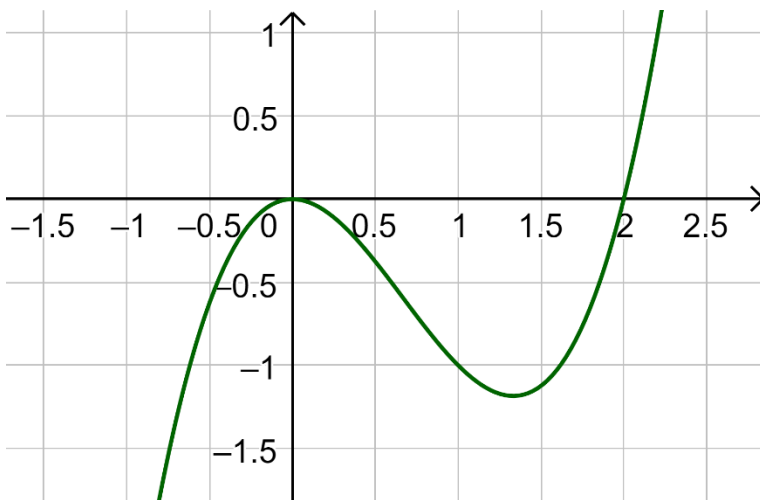
**Bsp. 5)** Zeichne die Tangente an der gesuchten Stelle ein. Bestimme geometrisch die Steigung der Tangente und gib den Differentialquotient an. Gib jeweils die Tangentengleichung an.



**Bsp. 6)** Zeichne bei den Stellen  $x_1 = -1,5$ ;  $x_2 = -0,5$ ;  $x_3 = 0,5$  und  $x_4 = 2$  jeweils die Tangente ein. Ordne die Werte  $f'(-1,5)$ ,  $f'(-0,5)$ ,  $f'(0,5)$  und  $f'(2)$  der Größe nach. Beginne mit dem größten Wert.



**Bsp. 7)** Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades.  
Kreuze die **beiden** zutreffenden Aussagen an.



Der Differentialquotient von $f$ an der Stelle $x = 1$ ist Null.	<input type="checkbox"/>
$f'(x) < 0$ für alle $x \in [0; 2)$ .	<input type="checkbox"/>
Der Differenzenquotient von $f$ im Intervall $[0,5; 2]$ ist positiv.	<input type="checkbox"/>
Die momentane Änderungsrate von $f$ an der Stelle 0 ist Null.	<input type="checkbox"/>
$f'(x) > 0$ für $x = 0,5$	<input type="checkbox"/>

### Brennofen \* (A\_236)

Bei einem Keramik-Produzenten werden Krüge hergestellt. Sobald ein Krug aus dem Brennofen genommen wird, beginnt er abzukühlen. Der Temperaturverlauf lässt sich durch die Funktion  $T$  beschreiben:

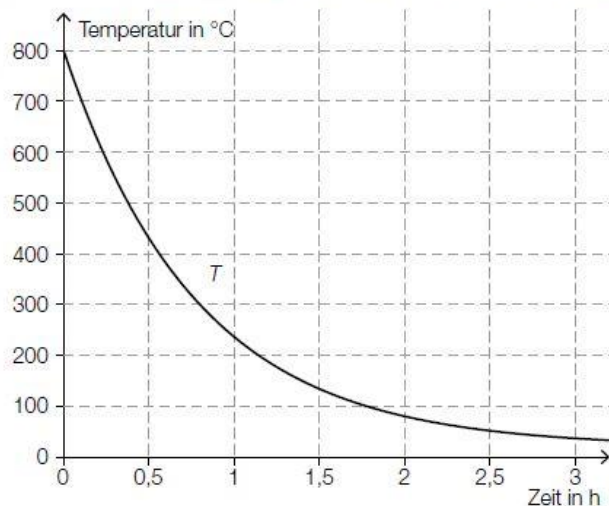
$$T(t) = 20 + 780 \cdot e^{-k \cdot t}$$

$t$  ... Zeit seit der Entnahme aus dem Brennofen in Stunden (h)

$T(t)$  ... Temperatur des Kruges zur Zeit  $t$  in Grad Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ )

$k$  ... Konstante

b) Der Graph der Funktion  $T$  ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt:



- Skizzieren Sie in der obigen Abbildung diejenige Tangente an den Funktionsgraphen, deren Ordinatenabschnitt (Achsenabschnitt auf der vertikalen Achse) 600 beträgt.
- Beschreiben Sie, was mit dem folgenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird:  $\frac{T(3) - T(1)}{2}$

### Feinstaub \* (A\_327)

Feinstaub in der Atemluft stellt ein Gesundheitsrisiko dar.

- a) An einer Messstelle in Graz wurde an einem bestimmten Tag von 5:00 Uhr bis 13:00 Uhr die Feinstaubbelastung gemessen. Die Funktion  $f$  beschreibt näherungsweise die Feinstaubbelastung in Abhängigkeit von der Zeit.

$$f(t) = -1,4 \cdot t^2 + 11 \cdot t + 47 \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 8$$

$t$  ... Zeit in h mit  $t = 0$  für 5:00 Uhr

$f(t)$  ... Feinstaubbelastung zur Zeit  $t$  in  $\mu\text{g}/\text{m}^3$

- 1) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

Es gilt:  $t_1 = 0$  h,  $t_2 = 4$  h

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = 5,4$$

- 2) Ermitteln Sie diejenige Uhrzeit, zu der  $f'(t) = -10$  gilt.

### Blockflöte (B\_239)

Die Blockflöte ist ein Holzblasinstrument.

- c) Die Schallgeschwindigkeit beeinflusst die Tonhöhe der Blockflöte. Der Zusammenhang zwischen der Schallgeschwindigkeit und der Temperatur kann durch die folgende Funktion  $c$  dargestellt werden:

$$c(T) = 331,5 \cdot \sqrt{1 + \frac{T}{273,15}}$$

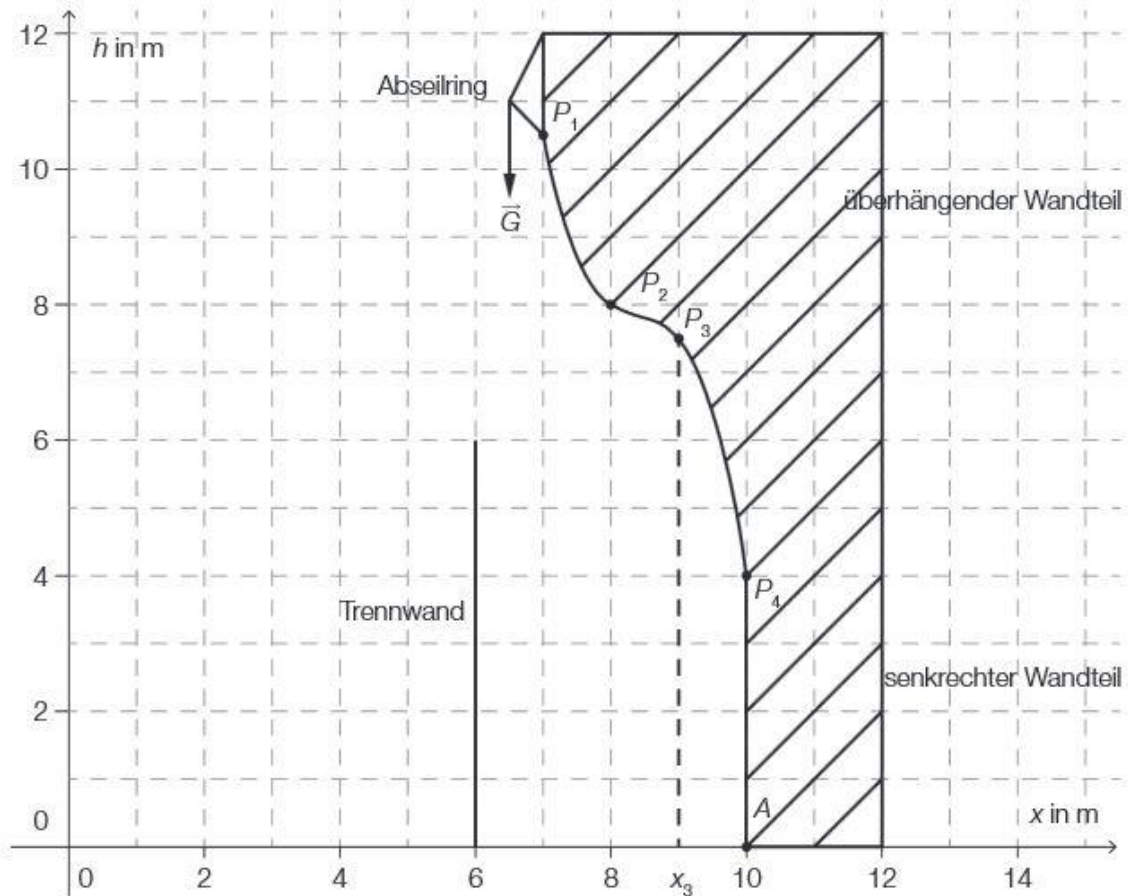
$T$  ... Temperatur in  $^{\circ}\text{C}$

$c(T)$  ... Schallgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s) bei einer Temperatur  $T$  in  $^{\circ}\text{C}$

- Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Schallgeschwindigkeit von  $19^{\circ}\text{C}$  bis  $35^{\circ}\text{C}$ .
- Dokumentieren Sie, wie man die Steigung der Tangente an die Funktion  $c$  an der Stelle  $T = 20^{\circ}\text{C}$  berechnen kann.

## Kletterwand (B\_015)

Die nachstehende Abbildung zeigt die Seitenansicht einer Kletterroute an einer Kletterwand.



- b) Um die ungefähre Neigung (= Steigung) der Kletterwand an der Stelle  $x_3$  abzuschätzen, geht ein Kletterer folgendermaßen vor:

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} \approx \frac{7,5 - 6,5}{9 - 9,5} = -2$$

- Stellen Sie mithilfe des Differenzialquotienten eine Formel auf, mit der Sie den Winkel  $\alpha$  der Neigung der Kletterwand zur Horizontalen an der Stelle  $x_3$  bestimmen können, wenn der Verlauf des überhängenden Wandteils durch eine Funktion  $h$  in Abhängigkeit von  $x$  beschrieben wird.
- Erklären Sie, wie der angegebene Differenzenquotient und der Differenzialquotient zusammenhängen.