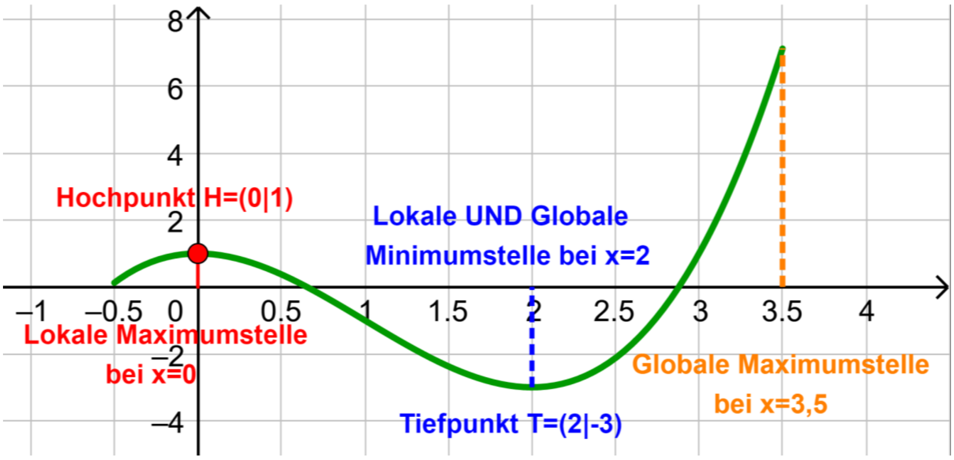
3.4 Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen

Maturaskript BHS – Teil A (11 Seiten)

Grundkompetenzen:

- **3.4** Null-, Extrem- und Wendestellen sowie das Monotonieverhalten bei Polynomfunktionen bestimmen, interpretieren und damit argumentieren, zugehörige Graphen skizzieren; bei Polynomfunktionen 2. Grades vom Typ $f(x) = a \cdot x^2 + b$ mit a, b ∈ ℝ die Parameter interpretieren und damit argumentieren



Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Prof. πegischer

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM
2) Gib im Feld „**Volltextsuche**" die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. A_263) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**" und „**GeoGebra**" erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**" erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln	**Weitere Regeln für Lehrpersonen**
▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen. ▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen. ▪ Sie dürfen mein Materialen **NICHT** gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden. ▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden. ▪ Bei einem **Missbrauch** erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.	**WICHTIGSTE REGEL:** LehrerInnen dürfen die Materialien in **Ihrem eigenen Unterricht** verwenden: ▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen. ▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben. ▪ Es ist **nicht erlaubt**, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben. ▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

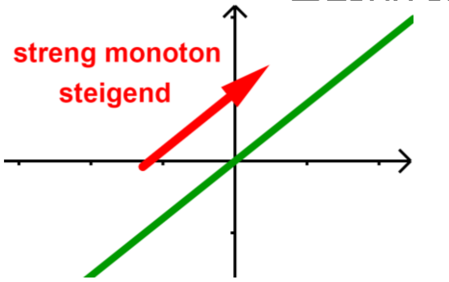
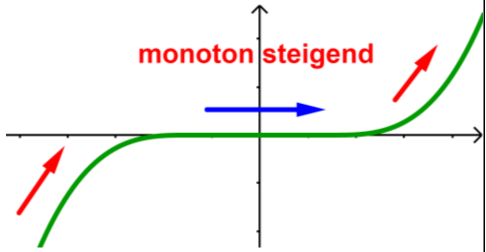
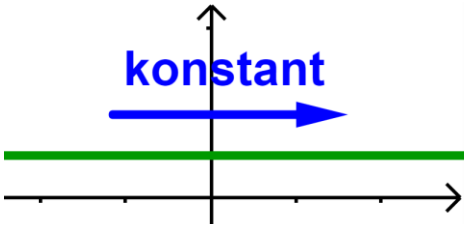
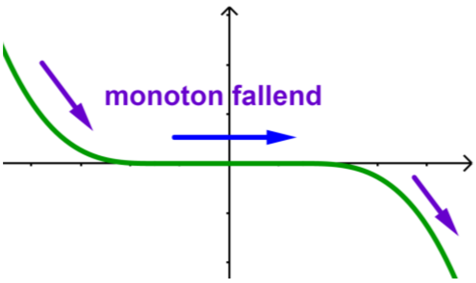
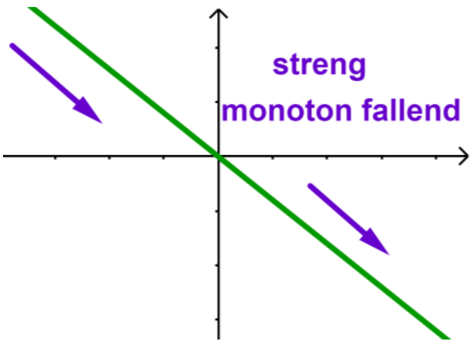
Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

BHS Teil A 3.4 – Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen

Monotonie einer Funktion:

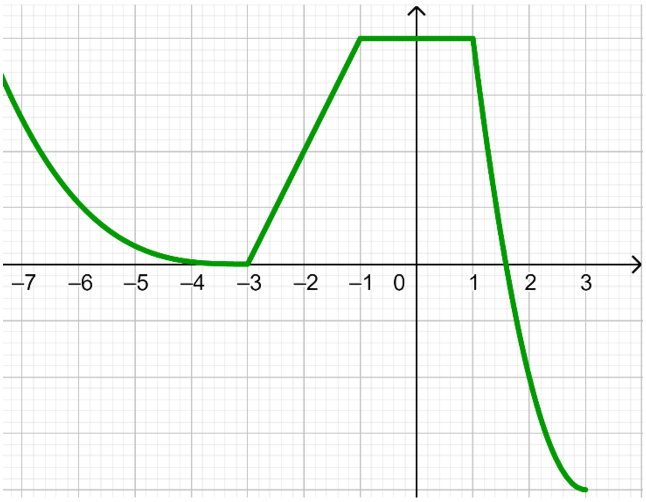
Video

Das Monotonieverhalten einer Funktion gibt an, ob der Graph **steigt, fällt oder gleich bleibt**, wobei immer von **links** nach **rechts** geschaut wird.

Eigenschaft	Erklärung	Formale Definition	Graphik
streng monoton steigend	Der Graph geht stets bergauf. Die Funktionswerte werden kontinuierlich größer!	Ist $x_1 < x_2$, dann gilt: $f(x_1) < f(x_2)$	
monoton steigend	Die Funktionswerte werden grundsätzlich immer größer – es darf aber auch Phasen geben, in denen die Funktion konstant verläuft.	Ist $x_1 < x_2$, dann gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$	
konstant	Der Graph ist waagrecht bzw. parallel zur x-Achse. Die Funktionswerte bleiben gleich.	Ist $x_1 < x_2$, dann gilt: $f(x_1) = f(x_2)$	
monoton fallend	Die Funktionswerte werden grundsätzlich immer kleiner – es darf aber auch Phasen geben, in denen die Funktion konstant verläuft.	Ist $x_1 < x_2$, dann gilt: $f(x_1) \geq f(x_2)$	
streng monoton fallend	Der Graph geht immer bergab. Die Funktionswerte werden stets kleiner!	Ist $x_1 < x_2$, dann gilt: $f(x_1) > f(x_2)$	

Bemerkung: Ist eine Funktion weder (streng) monoton steigend bzw. fallend, dann sagt man die Funktion ist **NICHT** monoton.

Bsp. 1) Bestimme das **Monotonieverhalten** der Funktion im gegebenen Intervall.



a. $[-6;-4]$:

b. $[1;3]$:

c. $[0;2]$:

d. $[-1;0{,}5]$:

e. $[-4;2]$:

f. $[-3;0]$:

g. $[-3;-1]$:

Bsp. 2) Bestimme das Monotonieverhalten der Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Verwende dazu GeoGebra.

a. $f(x)=x^2-2$	**b.** $f(x)=x^3+3x^2$	**c.** $f(x)=x^4-2x^2$

Bsp. 3) Begründe, ob die Aussage richtig oder falsch ist.

Eine monoton steigende Funktion kann auch streng monoton steigend sein.	
Gilt in einem Intervall $[a;b]$ auch $f(b)>f(a)$, so ist die Funktion streng monoton steigend.	
Jede streng monoton steigende Funktion ist auch monoton steigend.	
Eine Funktion ist streng monoton fallend, wenn für alle $x_1,x_2\in D$ gilt: $f(x_2)<f(x_1)$	
Jede monoton fallende Funktion ist auch streng monoton fallend.	

Extremstellen von Funktionen: (Bemerkung: STELLE $\neq$ PUNKT)

Video

Lokale Extremstellen

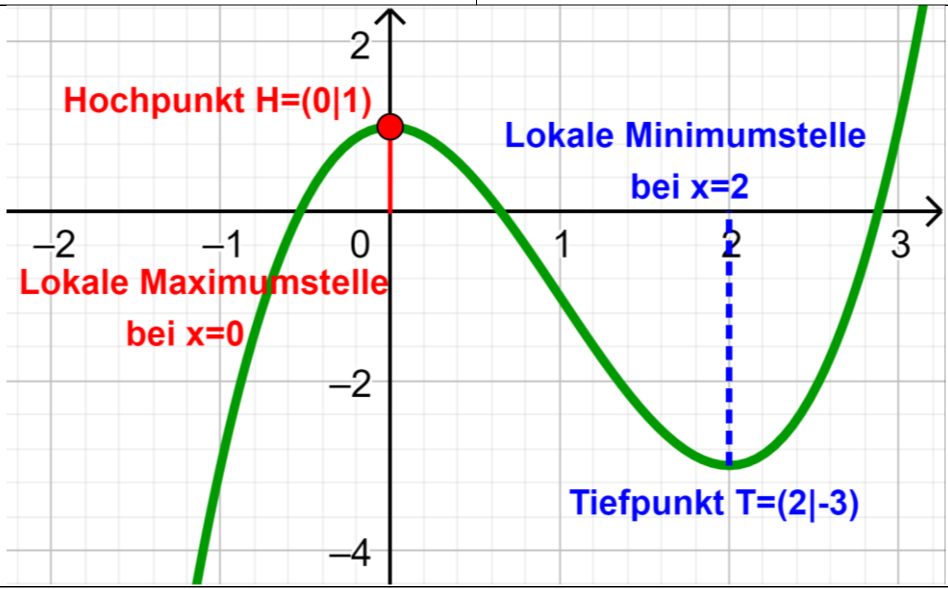
Bei lokalen Extremstellen findet stets ein **Monotoniewechsel** statt!!!

Lokale Minimumstelle

- **Monotoniewechsel**: fallend -> steigend
- Bemerkung: Die Minimumstelle ist nur diejenige **Stelle** (x-Wert), bei der dieses Minimum eintritt. Den zugehörigen Punkt nennt man **Extrempunkt** bzw. **Tiefpunkt**.

Lokale Maximumstelle

- **Monotoniewechsel**: steigend -> fallend
- Bemerkung: Die Maximumstelle ist nur diejenige **Stelle** (x-Wert), bei der dieses Maximum eintritt. Den zugehörigen Punkt nennt man **Extrempunkt** bzw. **Hochpunkt**.



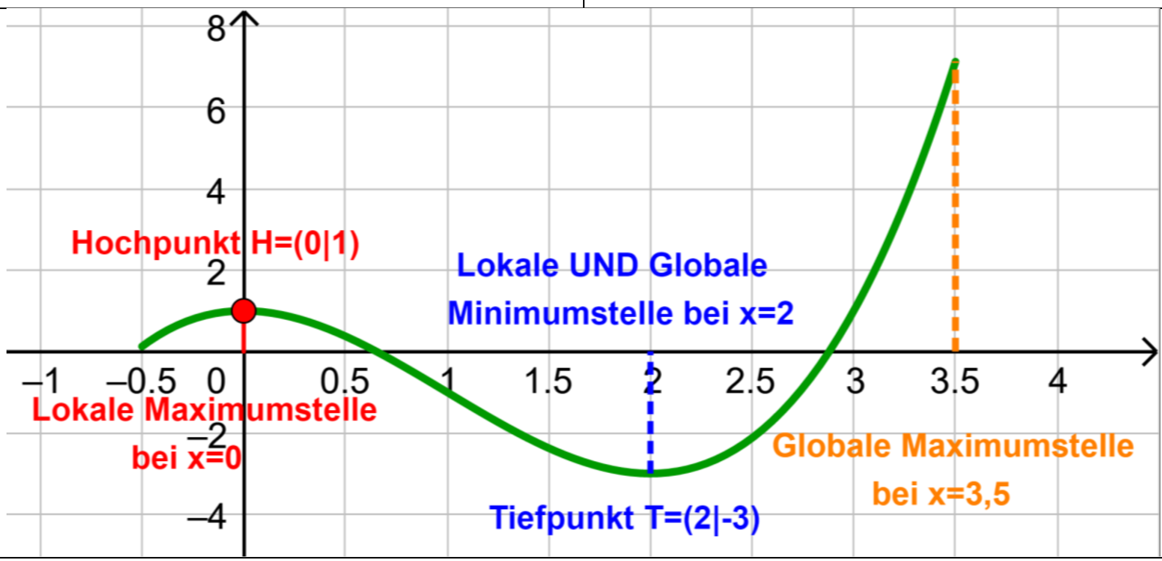
Globale Minimum- und Maximumstellen

Globale Minimum- bzw. Maximumstellen geben diejenige Stellen an, bei denen die Funktion den **kleinsten** bzw. **größten Funktionswert** in der Definitionsmenge **animmt**.

<u>**Bemerkung**</u>: Globale Minimum- bzw. Maximumstellen **können, aber müssen nicht zwingend auch lokale Extremstellen** sein, da es bei einer lokalen Extremstelle **stets zu einem Monotoniewechsel** kommen muss.

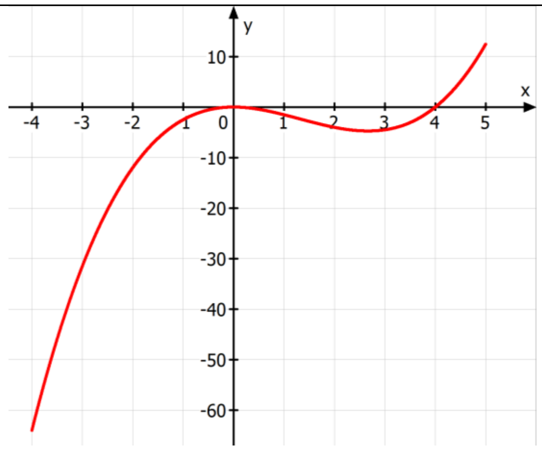
Globale Minimumstelle
= diejenige Stelle/n, bei denen die Funktion den kleinsten Funktionswert annimmt.

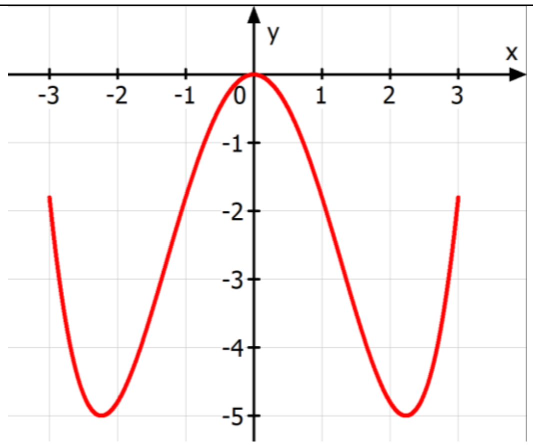
Globale Maximumstelle
= diejenige Stelle/n, bei denen die Funktion den größten Funktionswert annimmt.

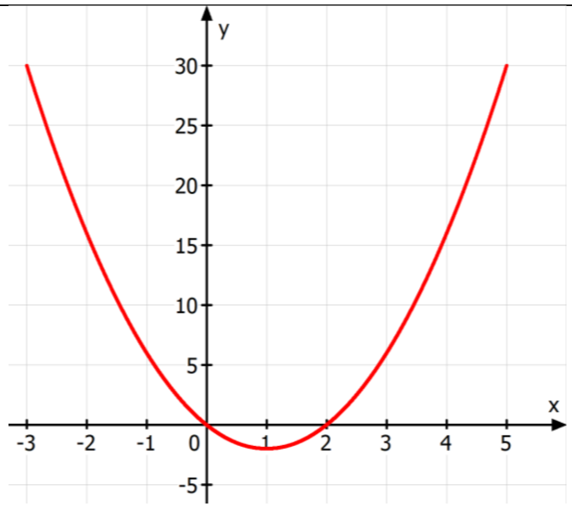


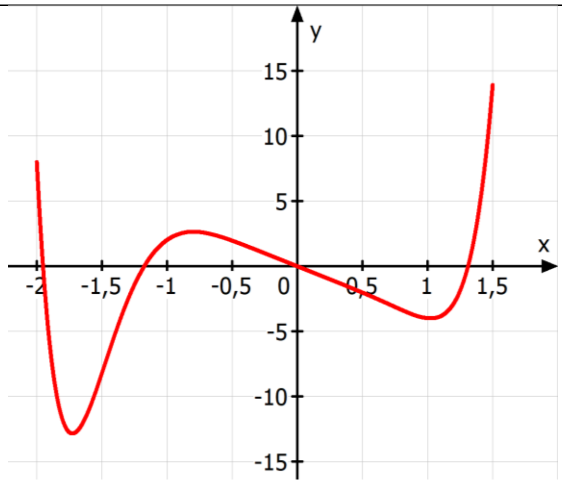
Bsp. 4) Gegeben ist der Graph einer Funktion in einem bestimmten Intervall. Bestimme…

i. die Definitions- und Wertemenge
ii. das Monotonieverhalten,
iii. alle lokalen Extremstellen (inkl. Extrempunkte: Hochpunkt/Tiefpunkt)
iv. alle globalen Extremstellen



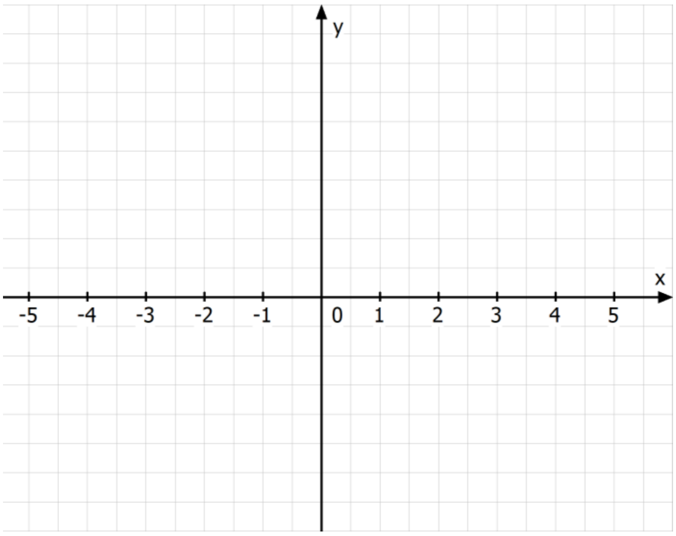




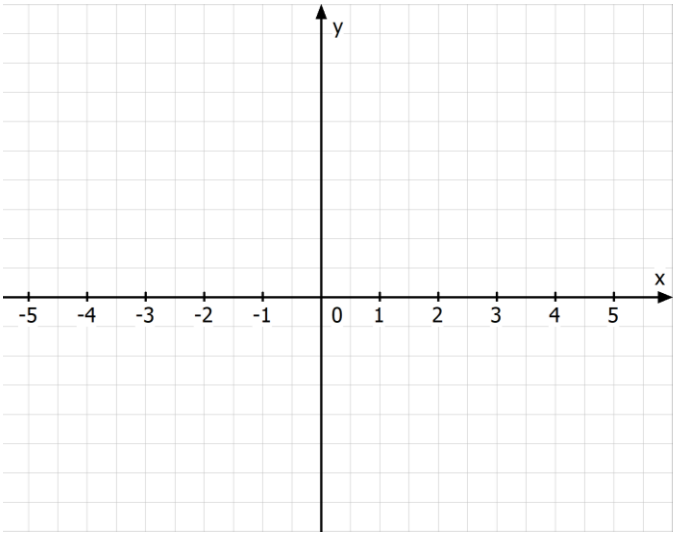


Bsp. 5) Skizziere einen möglichen Graphen mit den gegebenen Eigenschaften im Intervall $[-5; 5]$. Skaliere die y-Achse passend.

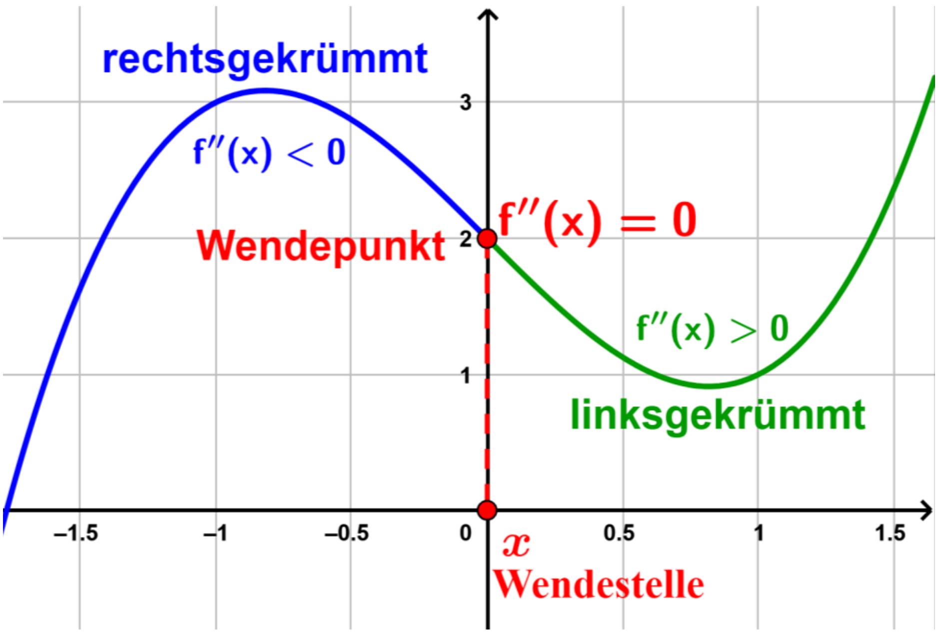
- verläuft durch den Punkt $P = (1|1)$
- Lokale und Globale Minimumstelle bei $x = -3$.
- Hochpunkt bei $(0|2)$



- Im Intervall $[-5; -2]$: streng monoton wachsend
- Hochpunkt bei $(-2|100)$
- Verläuft durch den Punkt $(-0{,}5|0)$
- Lokale Minimumstelle bei $x = 1$.
- Globales Maximum bei $x = 5$

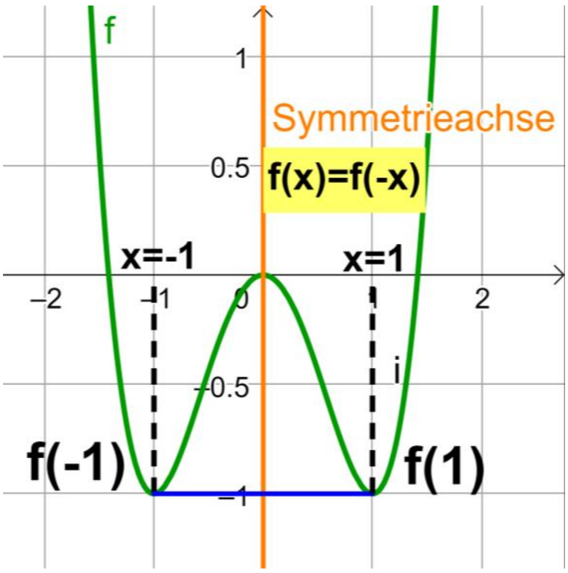
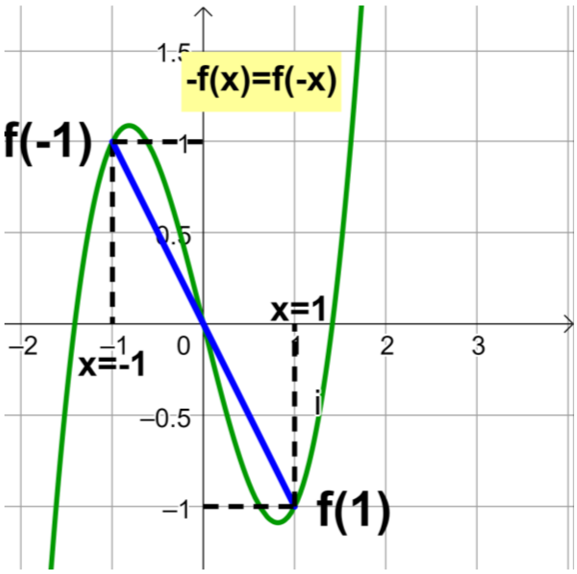


Krümmung einer Funktion

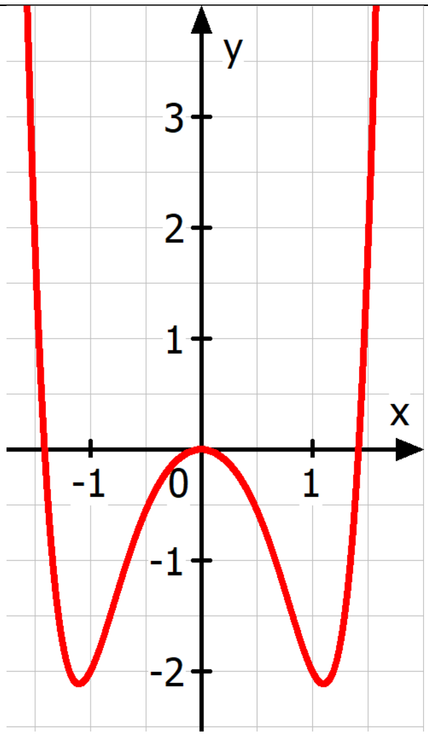


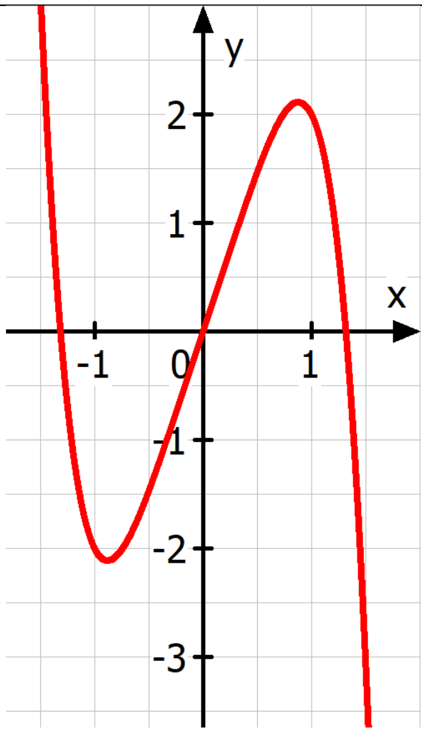
[Symmetrie]

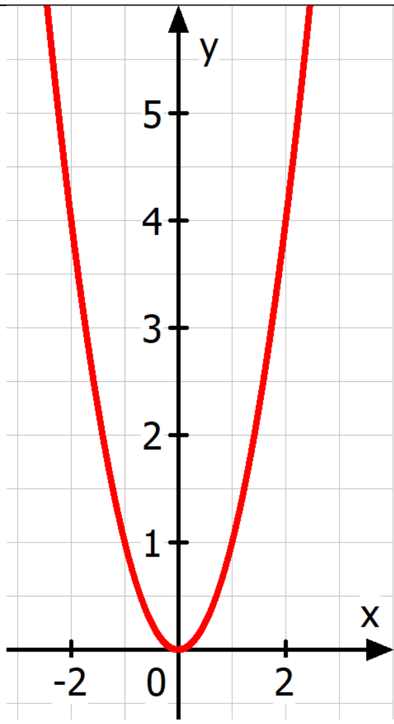
Video

<table>
<tr><th>Gerade Funktionen</th><th>Ungerade Funktionen</th></tr>
<tr><td>Graph ist symmetrisch bezüglich der y-Achse</td><td>Graph ist punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs</td></tr>
<tr><td>Es gilt: $f(x) = f(-x)$</td><td>Es gilt: $f(-x) = -f(x)$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Bsp. 6) Gib aufgrund des Graphen von f an, ob die Funktion gerade oder ungerade ist.







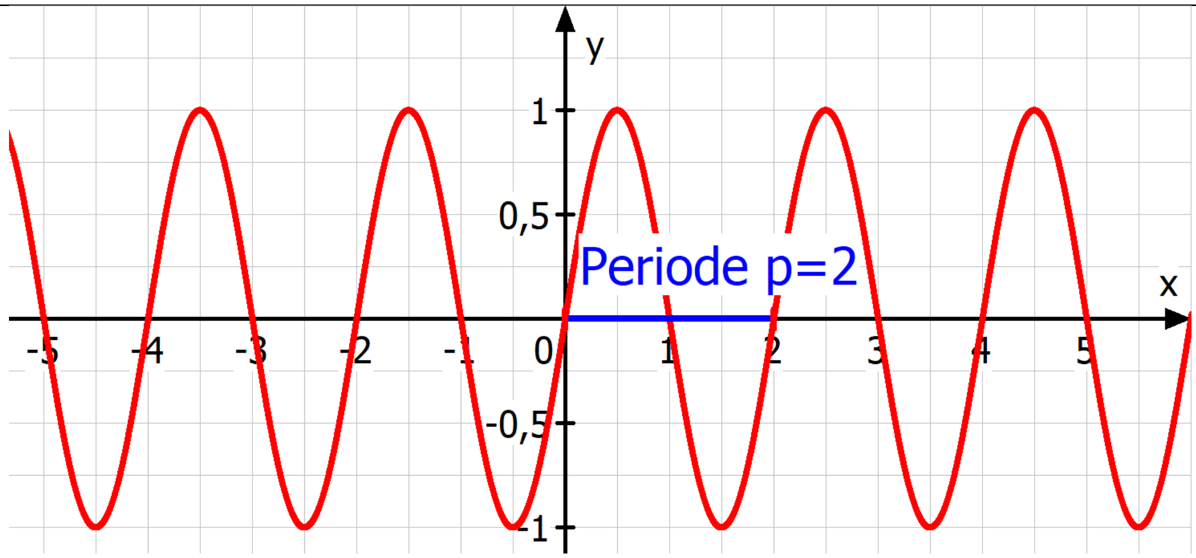
Periodizität

Video

Gilt für eine reelle Funktion f

$$\boldsymbol{f(x) = f(x+p)}$$

für alle x aus der Definitionsmenge und $p > 0$, dann nennt man f eine periodische Funktion mit Periode p.

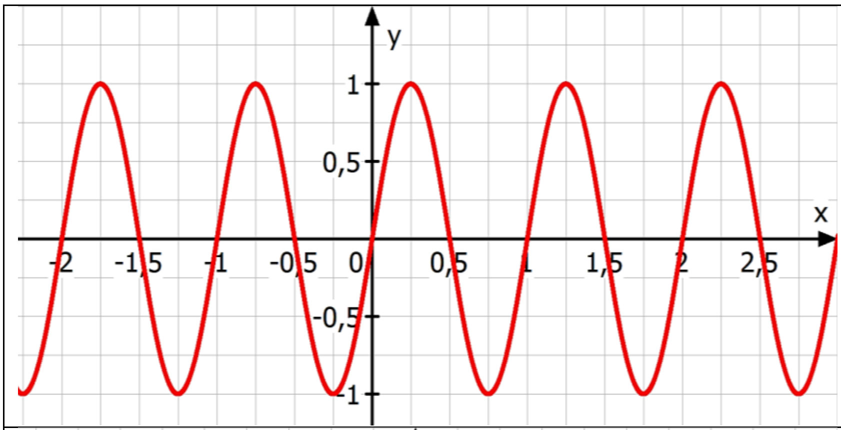


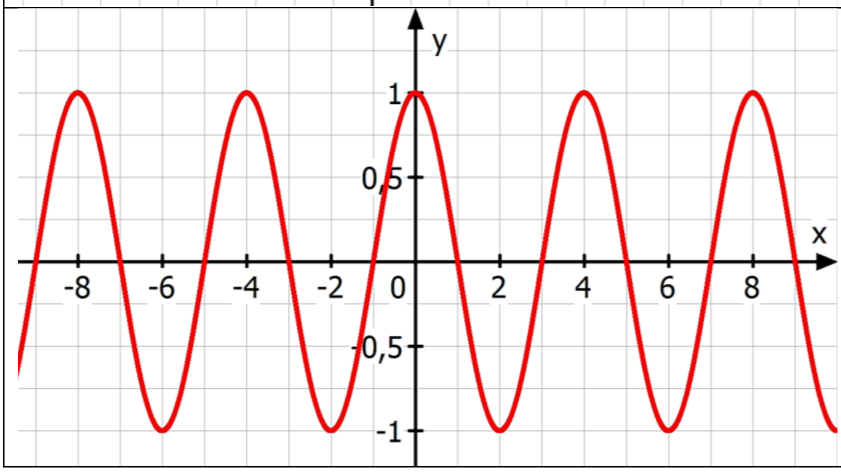
$$f(x) = f(x + 2)$$

$$f(0) = f(2) = f(4) = f(10) = f(-2) = \cdots$$

$$f(1) = f(-1) = f(3) = f(5) = f(11) = \cdots$$

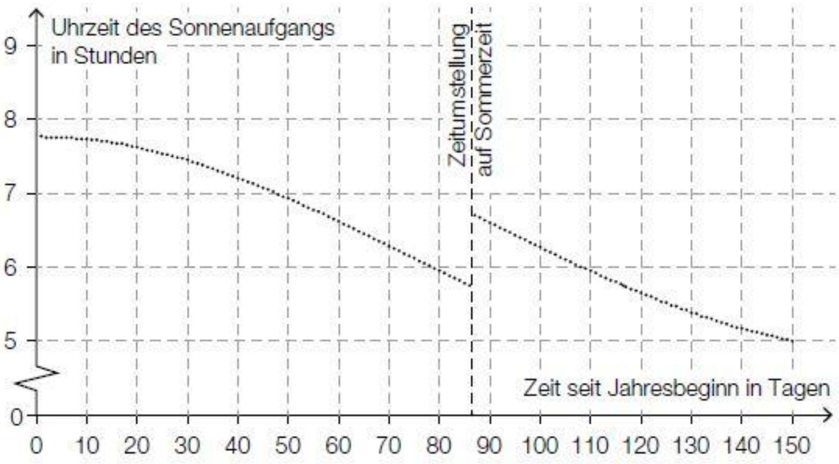
Bsp. 7) Gib die Symmetrie (Gerade/Ungerade Funktion) und die Periodizität des Funktionsgraphen an.





Sonnenaufgang* (A_284)

c) In der nachstehenden Grafik ist die jeweilige Uhrzeit des Sonnenaufgangs in Wien für die ersten 150 Tage eines Jahres dargestellt.



1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Grafik, wie viele Tage nach der Zeitumstellung der Sonnenaufgang erstmals zu einer früheren Uhrzeit als unmittelbar vor der Zeitumstellung stattfindet.

Im Zeitintervall [0; 40] kann die Uhrzeit des Sonnenaufgangs näherungsweise durch eine quadratische Funktion f modelliert werden.

$f(t) = a \cdot t^2 + c$

t … Zeit seit Jahresbeginn in Tagen
$f(t)$ … Uhrzeit des Sonnenaufgangs am Tag t in Stunden

2) Argumentieren Sie anhand der obigen Grafik, dass der Parameter a dabei negativ sein muss.

Speerwurf * (A_303)

b) Ein Teil des Graphen der Funktion f beschreibt die Flugbahn der Speerspitze bei einem bestimmten Wurf.

$f(x) = -0{,}01 \cdot x^2 + 0{,}7 \cdot x + 1{,}8 \quad \text{mit} \quad x \geq 0$

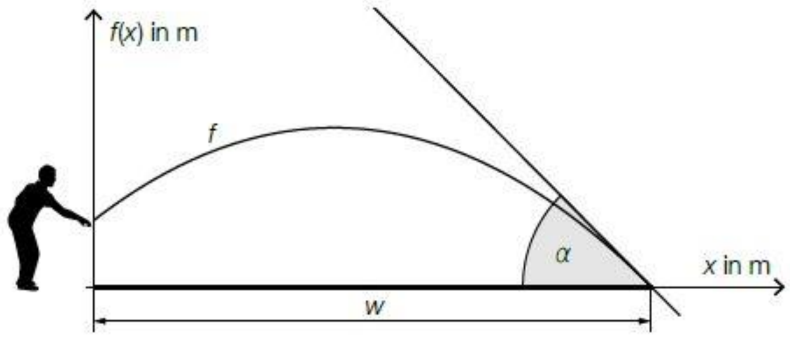
x ... horizontale Entfernung vom Abwurfpunkt in m
$f(x)$ ... Höhe über dem Boden bei der horizontalen Entfernung x in m

1) Berechnen Sie die horizontale Entfernung vom Abwurfpunkt, in der die Speerspitze bei diesem Wurf auf dem Boden auftrifft.

Boule * (B_444)

Boule ist eine Sportart, bei der Kugeln geworfen werden. Ziel ist es, mit den eigenen Kugeln möglichst nah an eine Zielkugel zu gelangen.

a) Peter wirft eine Kugel. Die Flugbahn dieser Kugel kann näherungsweise durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



$f(x) = -0{,}0959 \cdot x^2 + 0{,}767 \cdot x + 1{,}1$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m

1) Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 1,1 in der obigen Funktionsgleichung im gegebenen Sachzusammenhang.

2) Berechnen Sie die Wurfweite w.

Peter möchte, dass der Aufprallwinkel α der Kugel im Intervall [42°; 44°] liegt.

3) Überprüfen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, ob der Aufprallwinkel α in diesem Intervall liegt.

Fruchtsaftproduktion * (B_483)

Ein Unternehmen produziert den Fruchtsaft *Mangomix*.

c) Der Erlös beim Verkauf des Fruchtsafts *Mangomix* kann durch eine quadratische Funktion E beschrieben werden:

$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ mit $x \geq 0$

x ... Absatzmenge in hl

$E(x)$ ... Erlös bei der Absatzmenge x in €

1) Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht. *[Lückentext]*

Der Koeffizient a muss ___①___ sein, weil der Graph von E ___②___.

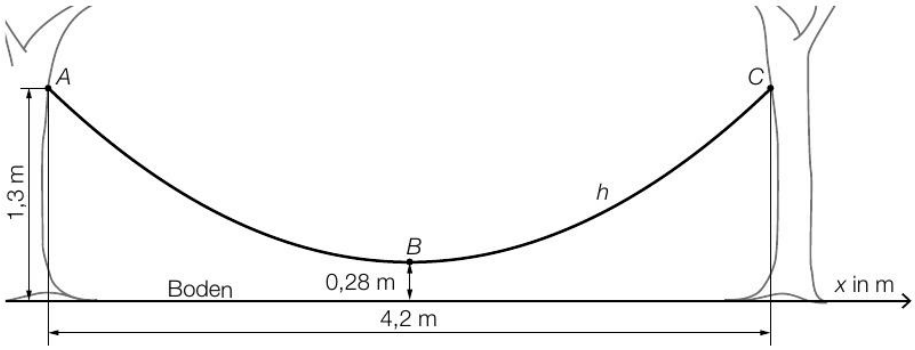
①	
positiv	☐
negativ	☐
gleich null	☐

②	
durch den Ursprung geht	☐
keinen Wendepunkt hat	☐
nach unten geöffnet ist	☐

2) Weisen Sie nach, dass der maximale Erlös bei der Absatzmenge $x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$ erzielt wird.

Haengematten * (B_445)

a) Der Graph der quadratischen Funktion h mit $h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschreibt näherungsweise den Durchhang einer Hängematte (siehe nachstehende Abbildung).



x, $h(x)$ ... Koordinaten in m

Der Graph der Funktion h verläuft durch die Befestigungspunkte A und C. Der Scheitelpunkt von h wird mit B bezeichnet. Die Punkte A und C liegen auf gleicher Höhe über dem Boden.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die fehlende senkrechte Koordinatenachse so ein, dass für den Koeffizienten b gilt: $b = 0$

2) Berechnen Sie den Koeffizienten a.

Puppenrutsche * (B_373)

b) Das seitliche Profil einer anderen Spielzeugrutsche kann durch den Graphen der Funktion g beschrieben werden:

$$g(x) = \frac{1}{108} \cdot (x^3 - 18 \cdot x^2 + 864) \text{ mit } 0 \leq x \leq 12$$

x, $g(x)$ ... Koordinaten in cm

1) Berechnen Sie diejenige Stelle, an der die Rutsche am steilsten ist.

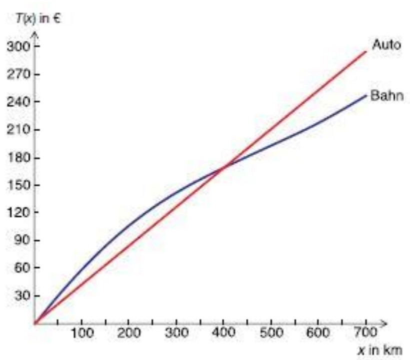
2) Begründen Sie allgemein, warum der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades höchstens 2 Extrempunkte haben kann.

Reisekosten (B_193)

Die Tarife bei Fahrten mit dem Zug hängen normalerweise von der zurückgelegten Fahrtstrecke ab. Die in dieser Aufgabe verwendeten Bezeichnungen sind:

x … Fahrtstrecke in Kilometern (km)
$T(x)$ … Tarif in Euro (€) für die Fahrtstrecke x

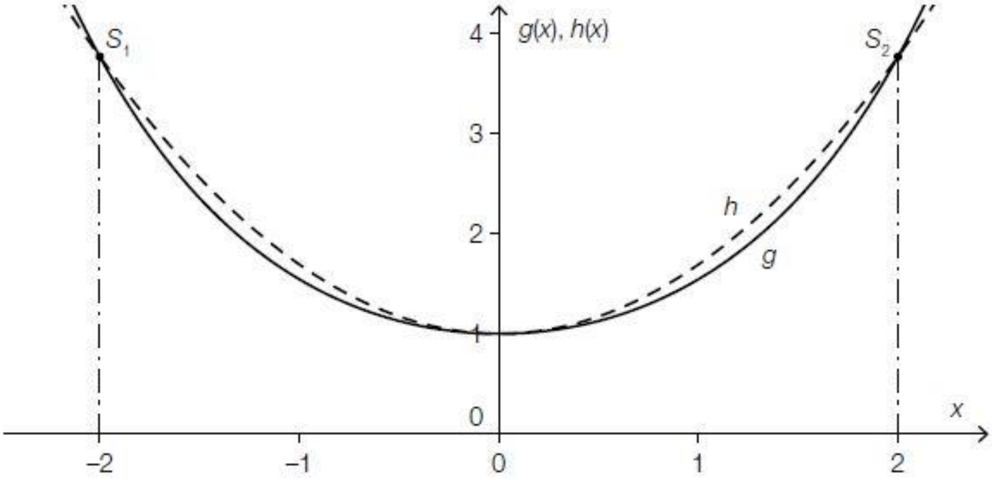
d) Eine Firma schickt 3 Angestellte auf Dienstreise. Als Kostenersatz müssen den Angestellten entweder € 0,42 pro gefahrenem Kilometer für ein gemeinsames Auto oder jeweils der Bahntarif 2. Klasse ohne Vorteilsticket rückerstattet werden. In der nebenstehenen Grafik sind die Bahnkosten für 3 Personen und das für den PKW zu erstattende Kilometergeld dargestellt.



– Geben Sie an, wann die Firma Kilometergeld und wann sie Bahnkostenersatz leisten sollte, um ihre Kosten gering zu halten.

Seile * (B_391)

b) Der Verlauf eines zwischen zwei Punkten S_1 und S_2 durchhängenden Seils kann durch den Graphen der Funktion g mit $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ dargestellt werden. Näherungsweise kann dieser Seilverlauf durch den Graphen einer quadratischen Funktion h mit $h(x) = a \cdot x^2 + c$ dargestellt werden (siehe nachstehende Abbildung).
Die Graphen der beiden Funktionen schneiden einander in den Punkten S_1 und S_2.



– Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Parameter c ab.
– Ermitteln Sie den Parameter a.
– Berechnen Sie den Schnittwinkel der Graphen von g und h im Schnittpunkt S_2.