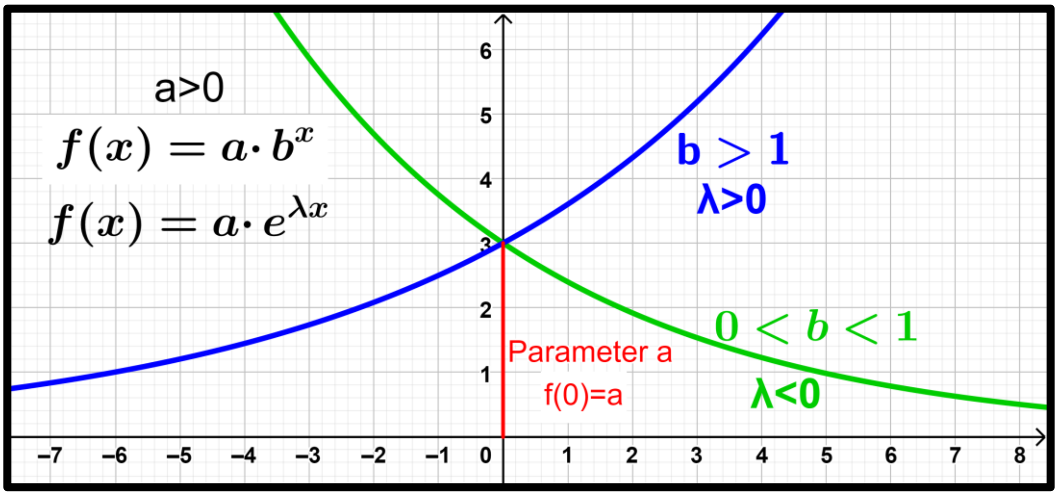
3.5 Exponentialfunktionen

Maturaskript BHS – Teil A (9 Seiten)

Grundkompetenzen:

- **3.5** Graphen von Exponentialfunktionen skizzieren, Exponentialfunktionen als Wachstumsund Abnahmemodelle interpretieren, die Verdoppelungszeit und die Halbwertszeit berechnen und im Kontext deuten sowie die Parameter von Exponentialfunktionen interpretieren



Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Prof. πegischer

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM
2) Gib im Feld „**Volltextsuche**" die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. A_263) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**" und „**GeoGebra**" erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**" erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln	**Weitere Regeln für Lehrpersonen**
▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen. ▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen. ▪ Sie dürfen mein Materialen **NICHT** gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden. ▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden. ▪ Bei einem **Missbrauch** erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.	**WICHTIGSTE REGEL:** LehrerInnen dürfen die Materialien in **Ihrem eigenen Unterricht** verwenden: ▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen. ▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben. ▪ Es ist **nicht erlaubt**, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben. ▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

BHS Teil A 3.5 – Die Exponentialfunktion

Bsp. 1) Gegeben ist ein Grundwert G. Gib an, um wie viel Prozent G insgesamt **vergrößert** bzw. **verkleinert** wurde.

a. G wird um 20% vermehrt und anschließend um 17% vermindert.	**b.** G wird zuerst zweimal um 0,9 % vermehrt, und anschließend dreimal um 1,2% vermindert.
c. G wird zehn Mal um 2,4% vermehrt.	**d.** G wird fünf Mal um 3% vermindert & anschließend fünf Mal um 3% vermehrt.

Video

1. Definition einer Exponentialfunktion

Eine reelle Funktion der Form $f(x) = a \cdot b^x \;\; (a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}^+)$ nennt man **Exponentialfunktion** mit der Basis b.

Bei einer Exponentialfunktion steht die Variable im Exponenten!!!

$$f(\boldsymbol{x}) = a \cdot b^{\boldsymbol{x}}$$

Bei einer Exponentialfunktion setzen wir $b > 0$ voraus, da die Potenz $b \leq 0$ nicht immer definiert ist:

Beispiel: $(-2)^{0,5} = (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2} \quad <- \quad negative\ Quadratwurzeln\ sind\ nicht\ definiert$

Parameter a (=Schnittpunkt mit der y-Achse)

Der Parameter a gibt den Schnittpunkt mit der y-Achse an und ist somit der Funktionswert an der Stelle $x = 0$, da folgender Zusammenhang gilt:

$$f(0) = a \cdot \boldsymbol{b^0} = a \cdot \boldsymbol{1} = a$$

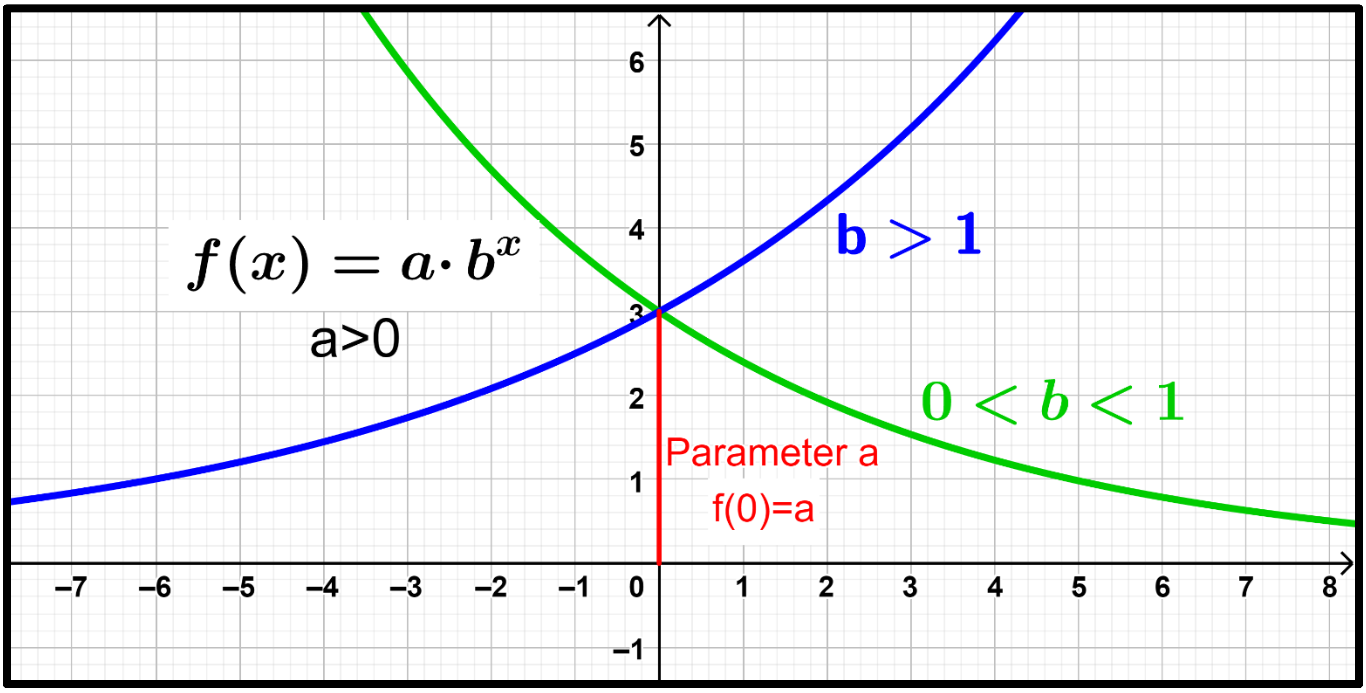
Parameter b (Annahme: $a > 0$) = Faktor mit dem f(x) multipliziert wird, wenn x um 1 erhöht wird

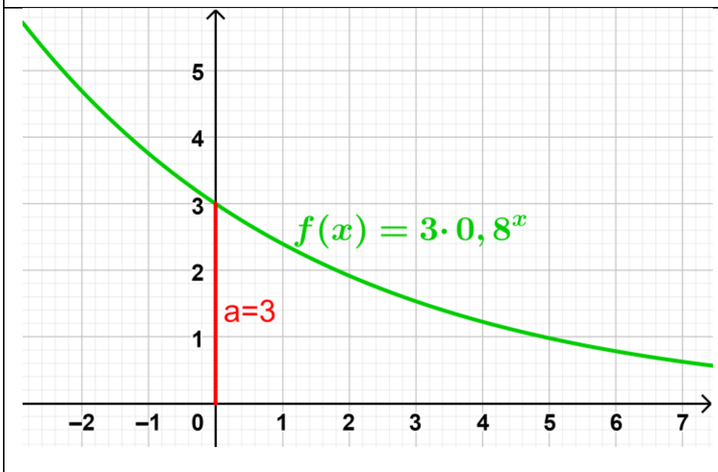
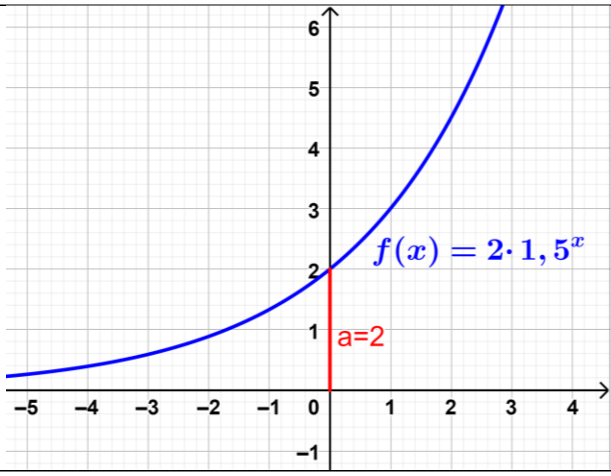
- Ist $b > 1$, so ist der Graph streng monoton steigend. Je größer b ist, desto stärker steigt der Graph.
- Für $0 < b < 1$ ist der Graph monoton fallend und nähert sich immer mehr der x-Achse.
- Ist $b = 1$, so handelt es sich um eine konstante Funktion:

$$f(x) = a \cdot 1^x = a$$

2. Graph und Eigenschaften von einer Exponentialfunktion

Fall 1: $a > 0$



<table>
<tr><th>$0 < b < 1$</th><th>$b > 1$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>

für $0 < b < 1$: streng monoton fallend
Alle Graphen gehen durch den Punkt $(0|a)$.
Für $a > 0$ sind alle Funktionswerte positiv. Die x-Achse wird nie erreicht, für $x \to +\infty$ streben die Funktionswerte gegen 0. (x-Achse = Asymptote)
Je kleiner b ist (zwischen 0 und 1), umso flacher verläuft der Graph.

</td><td>

für $b > 1$: streng monoton steigend
Alle Graphen gehen durch den Punkt $(0|a)$.
Für $a > 0$ sind alle Funktionswerte positiv. Die x-Achse wird nie erreicht, für $x \to -\infty$ streben die Funktionswerte gegen 0. (x-Achse = Asymptote)
Je größer der Parameter b ($b > 1$) ist, umso schneller steigt der Graph (exponentiell!).

</td></tr>
<tr><td colspan="2">
Die Graphen der Funktionen f_1 und f_2 mit

$$f_1(x) = b^x \text{ und } f_2(x) = \left(\frac{1}{b}\right)^x$$

liegen symmetrisch bezüglich der y-Achse.
</td></tr>
</table>

3. Graphische Ermittlung der Parameter a und b

Video

- **Parameter a**: Funktionswert an der Stelle $x = 0$ (=Abschnitt auf der y-Achse)
- **Parameter b**: Es gilt: $f(1) = a \cdot b^1 = a \cdot b$. Durch Umformen folgt daraus:

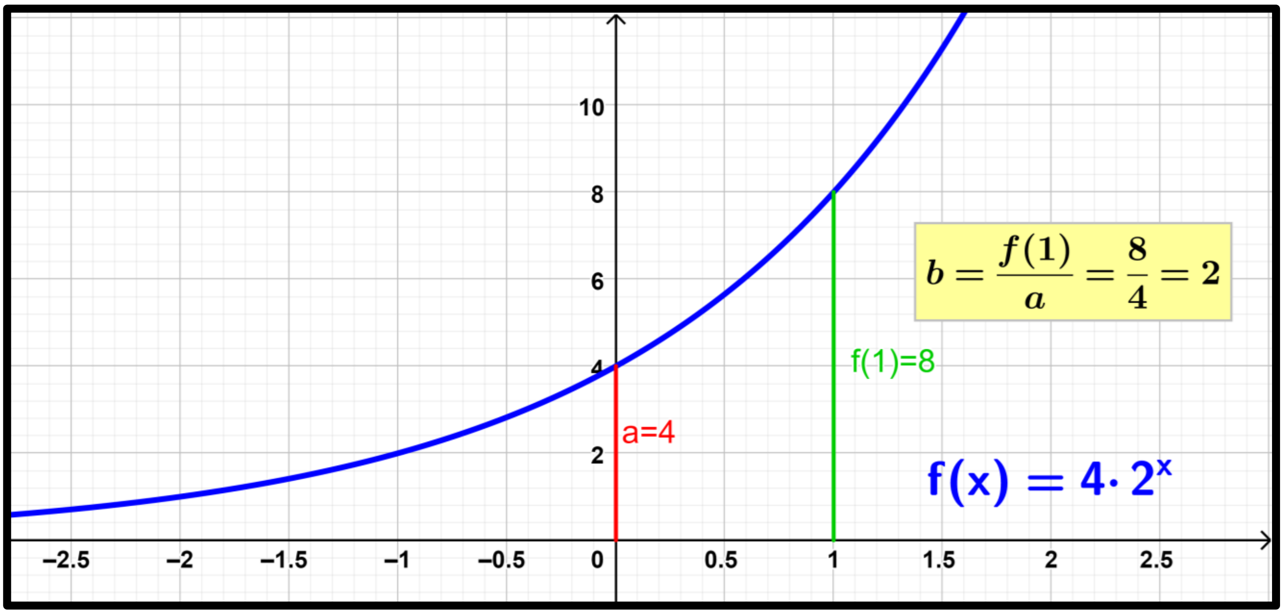
$$f(1) = a \cdot b$$

$$b = \frac{f(1)}{a}$$

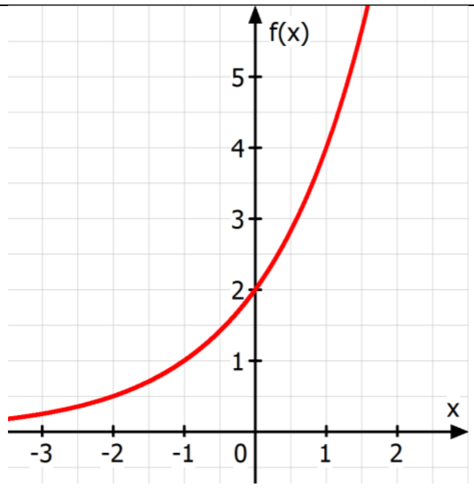
Bemerkung 1: Bestimme zuerst den Parameter a (Abschnitt auf der y-Achse) -> Bestimme anschließend den Funktionswert $f(1)$ graphisch. Dividiere diesen Wert durch den Parameter a, um den Wert von b zu erhalten! **(= Variante 1)**

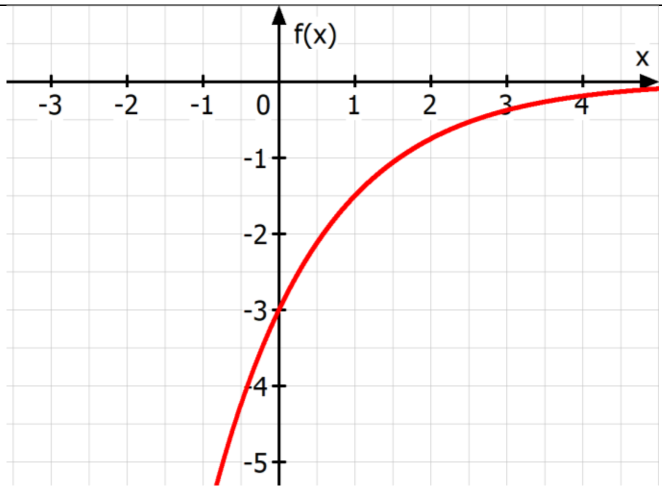
Bemerkung 2: Ist die Funktionsgleichung $f(x) = b^x$ $(a = 1)$, so entspricht der Parameter b dem Funktionswert an der Stelle 1, es gilt:

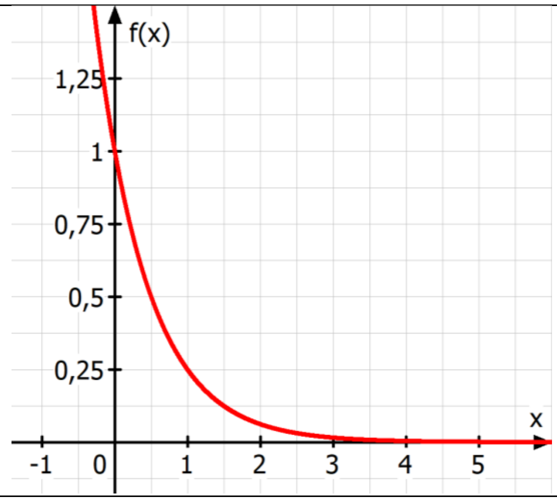
$$b = \frac{f(1)}{a} = \frac{f(1)}{1} = f(1)$$

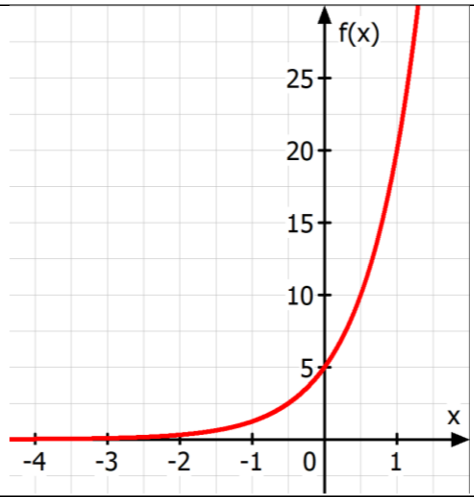


Bsp. 2) Bestimme die Funktionsgleichung der Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot b^x$.





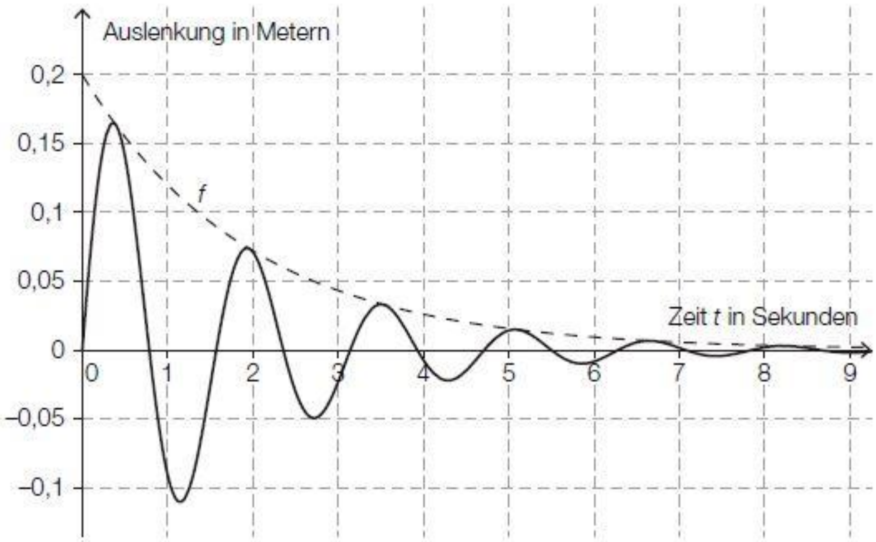




Baumkronenpfad * (A_230)

b) Auf dem Schild zum Baumkronenpfad ist zu lesen: „Der Baumkronenpfad kann schwingen!"

In der nachstehenden Grafik ist das Auf-und-ab-Schwingen des Baumkronenpfads an einer bestimmten Stelle dargestellt.



– Lesen Sie aus der obigen Grafik die maximale Auslenkung ab.

In der obigen Grafik ist die sogenannte „Einhüllende" strichliert eingezeichnet. Es handelt sich dabei um eine Funktion f mit $f(t) = c \cdot a^t$.

– Lesen Sie aus der Grafik den Parameter c ab.
– Begründen Sie mathematisch, warum für den Parameter a dieser Funktion f gilt: $0 < a < 1$.

b) Die Höhe einer anderen Sonnenblume lässt sich in Abhängigkeit von der Zeit t in einem bestimmten Zeitintervall näherungsweise durch die Funktion h beschreiben.

$h(t) = 6{,}2 \cdot a^t$

t ... Zeit ab dem Beobachtungsbeginn in Tagen
$h(t)$ ... Höhe der Sonnenblume zur Zeit t in cm

Zur Zeit $t = 17$ beträgt die Höhe der Sonnenblume 38,6 cm.

1) Berechnen Sie a.
2) Berechnen Sie die Anzahl der Tage, in denen sich die Höhe dieser Sonnenblume jeweils vervierfacht.

4. Eigenschaften einer Exponentialfunktion

Video

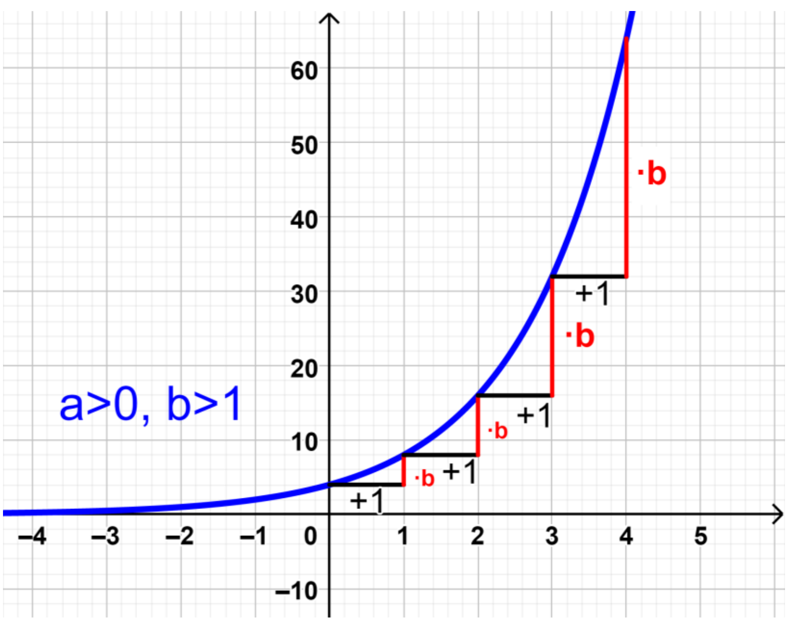
Sei f eine Exponentialfunktion mit $f(x) = a \cdot b^x$, dann gilt:

- $f(0) = a$
- $b = \frac{f(1)}{a}$
- $f(x+1) = f(x) \cdot b \qquad bzw. \qquad f(x+h) = f(x) \cdot b^h$

*Wird das Argument **um 1** vergrößert, so ändert sich der Funktionswert mit dem **Faktor b**.*
*Wird das Argument **um 2** vergrößert, so ändert sich der Funktionswert mit dem **Faktor b^2**.*
*Wird das Argument **um h** vergrößert, so ändert sich der Funktionswert mit dem **Faktor b^h**.*

- Wird das Argument um 1 erhöht, dann wächst / fällt $f(x)$ mit einem gleichen Prozentsatz p.

Fall 1: Exponentielles Wachstum: $b > 1$ (Annahme: $a > 0$)



Exponentielles Wachstum beschreibt **Änderungsprozesse**, bei denen sich ein Wert in gleichen (zeitlichen) Abständen immer um **denselben Faktor** ändert.

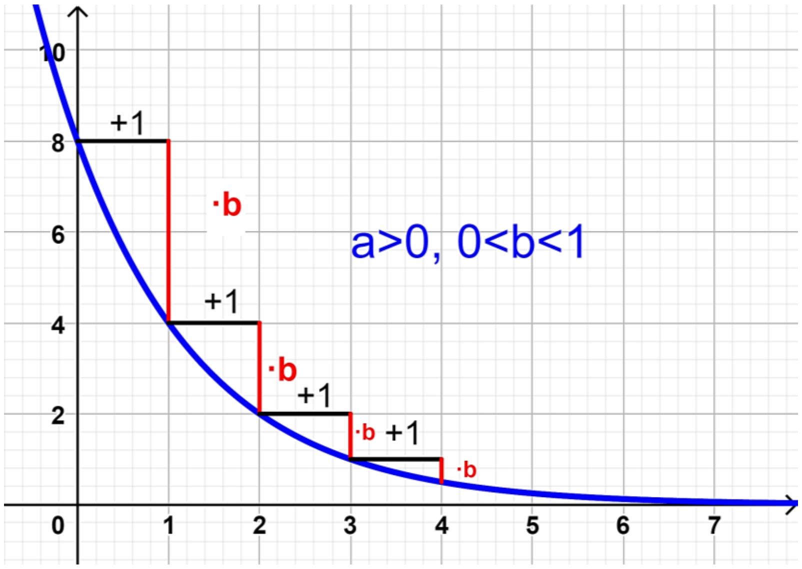
Da der Parameter $b > 1$ ist, steigen die Funktionswerte immer schneller weiter an (da sie immer mit dem Faktor b multipliziert werden! Der Graph wird immer steiler!)

$f(x) = 2 \cdot 2^x$

x	$f(x)$
0	2
1	4
2	8
3	16
4	32
5	64
6	128
7	256
8	512

+1 $\quad\quad$ $\cdot\, b$

Fall 2: Exponentielle Abnahme: $0 < b < 1$ (Annahme: $a > 0$)



Exponentielle Abnahme (=Exponentieller Zerfall) beschreibt **Änderungsprozesse**, bei denen sich ein Wert in gleichen (zeitlichen) Abständen immer um **denselben Faktor** ($0 < b < 1$) ändert.

Da der Parameter zwischen 0 und 1 liegt, werden die Funktionswerte immer kleiner (Die Kurve flacht immer weiter ab!)

$f(x) = 8 \cdot 0{,}5^x$

+1 | $\cdot b$

x	$f(x)$
0	8
1	4
2	2
3	1
4	0,5
5	0,25
6	0,125

Bsp. 3) Gegeben ist eine Exponentialfunktion. Mit welchem Faktor wächst bzw. fällt f(x), wenn man das Argument um (i) 1, (ii) 3, (iii) 10 erhöht? Um viel Prozent ändert sich der Funktionswert?

$f(x) = 3 \cdot 1{,}2^x$	$f(x) = 0{,}45^x$
$f(x) = 2 \cdot 1{,}06^x$	$f(x) = 0{,}001 \cdot 0{,}95^x$

Video

5. Aufstellen der Exponentialfunktion bei zwei gegebenen Punkten

Bsp. 4) Bestimme die Funktionsgleichung der Exponentialfunktion aus zwei gegebenen Punkten.

- Gib anschließend den Funktionswert an der Stelle $x = 7$ an.
- Bei welcher Stelle erreicht die Funktion den Funktionswert $f(x) = 100$?

$A = (-3\|0{,}5), B = (4\|64)$	$C = (-2\|50), D = (2\|0{,}005)$	$E = (2\|300), F = (6\|3\,000\,000)$

Bsp. 5) Gegeben sind drei Punkte. Können diese drei Punkte auf einer Exponentialfunktion liegen? Begründe rechnerisch. Falls ja, gib die Gleichung der Exponentialfunktion an.

$A = (1\|6), B = (6\|192), C = (9\|1536)$	$A = (-1\|8), B = (3\|0{,}5), C = (5\|0{,}25)$

6. Die natürliche Exponentialfunktion

Video

$$\textbf{Erinnerung: } f(x) = a \cdot \boldsymbol{b}^x$$

Exponentialfunktionen können eine beliebige, positive Basis besitzen. Die natürliche Exponentialfunktion besitzt als Basis die Euler'sche Zahl $e = 2{,}718\ldots(irrational)$. Den griechischen Buchstaben λ ("$Lambda$") benötigt man, sodass man die beiden Schreibweisen gleich setzen kann:

$$\textbf{Natürliche Exponentialfunktion: } f(x) = a \cdot \boldsymbol{e}^{\lambda x}$$

Da der Parameter a und die Variable x bei beiden Darstellungen gleich sind, muss dies auch für den Parameter b bzw. $\boldsymbol{e}^{\lambda}$ gelten:

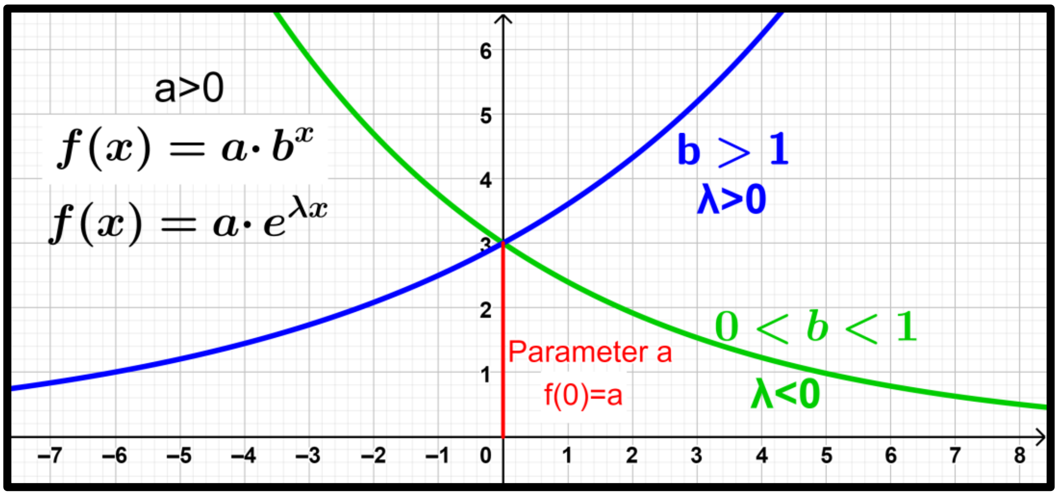
$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}^{\lambda}$$

Um diese **Exponentialgleichung** lösen zu können, wendet man den **ln** auf beiden Seiten an:

$$\ln b = \ln e^{\lambda}$$
$$\ln b = \lambda \cdot \ln e \quad |\ln e = 1$$
$$\boldsymbol{\lambda = \ln b}$$

Annahme: $\boldsymbol{a > 0}$

Die Exponentialfunktion ist **streng monoton steigend**, wenn $b > 1$ ist: $\boldsymbol{b > 1} \quad oder \quad \boldsymbol{e^{\lambda} > 1}$ Es gilt: $e^0 = 1$ $Sobald\ \lambda > 0\ ist, ist\ auch\ e^{\lambda} > 1$ Die Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot \boldsymbol{e}^{\lambda x}$ ist streng monoton steigend, wenn $\lambda > 0$ ist.
Die Exponentialfunktion ist **streng monoton fallend**, wenn $0 < b < 1$ ist: $\boldsymbol{0 < b < 1} \quad oder \quad \boldsymbol{0 < e^{\lambda} < 1}$ Es gilt: $e^0 = 1$ $Sobald\ \lambda < 0\ ist, gilt: 0 < e^{\lambda} < 1$ Die Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot \boldsymbol{e}^{\lambda x}$ ist streng monoton fallend, wenn $\lambda < 0$ ist.



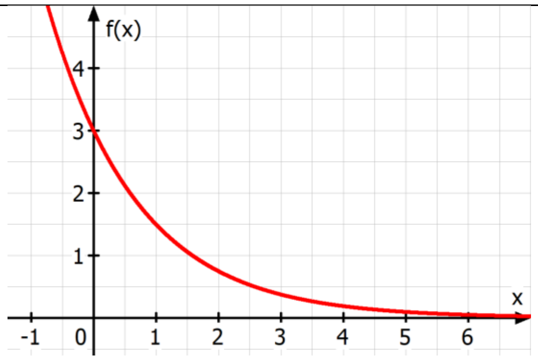
Bsp. 6) Stelle die Exponentialfunktion f in der Form $f(x) = a \cdot b^x$ dar.

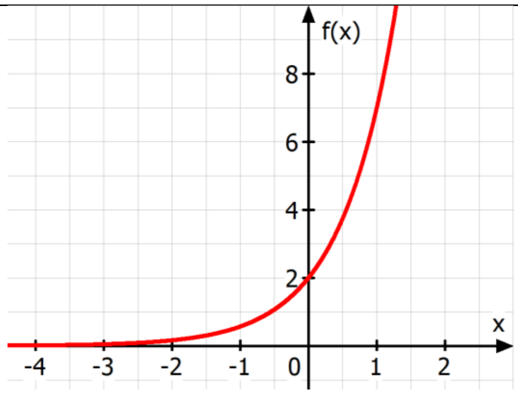
$f(x) = a \cdot e^{-1{,}2x}$	$f(x) = a \cdot e^{0{,}8x}$	$f(x) = a \cdot e^{3x}$

Bsp. 7) Stelle die Exponentialfunktion f in der Form $f(x) = a \cdot e^{\lambda x}$ dar.

$f(x) = a \cdot 0{,}6^x$	$f(x) = a \cdot 3^x$	$f(x) = a \cdot 2{,}2^x$

Bsp. 8) Stelle die Exponentialfunktion f in der Form $f(x) = a \cdot e^{\lambda x}$ dar.





Bsp. 9) Die Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot e^{\lambda x}$ geht durch die Punkte (0|3) und (2|27).

a. Bestimme die Parameter λ und a.
b. Bei welchem Argument x beträgt der Funktionswert 100?
c. Wie lautet der Funktionswert bei der Stelle $x = 7$?
d. Stelle die Funktion in der Form $f(x) = a \cdot \mathrm{b}^{\mathrm{x}}$ dar.
e. Um wie viel Prozent ändert sich der Funktionswert, wenn das Argument um den Wert 1 erhöht wird?
f. Um wie viel Prozent ändert sich der Funktionswert, wenn das Argument um den Wert 3 erhöht wird?

Video

SCAN MICH