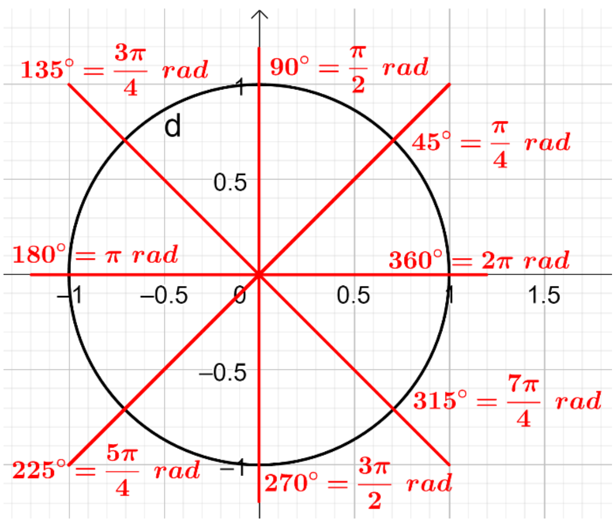
3.10 Winkelfunktionen

Maturaskript BHS – Teil A (9 Seiten)

Grundkompetenzen:

- **3.10** Graphen von f(x) = sin(x), f(x) = cos(x) und f(x) = tan(x) mit Winkeln im Bogenmaß skizzieren und die Eigenschaften dieser Funktionen interpretieren und damit argumentieren; den Zusammenhang zwischen Grad- und Bogenmaß verstehen und anwenden; die Zusammenhänge im Einheitskreis verstehen und anwenden



Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Prof. Tegischer

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM
2) Gib im Feld „**Volltextsuche**" die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.

Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. A_263) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**" und „**GeoGebra**" erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**" erstellt.

Lizenzbedingungen:

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

BHS Teil A 3.10 Winkelfunktionen

Video

Vorwissen aus der Unterstufe:

- Umfang eines Kreises: $u = 2r\pi$
- Länge eines Kreisbogens b mit Winkel α: $b = \frac{r\pi\alpha}{180}$

1. Ein weiteres Winkelmaß: Das Bogenmaß

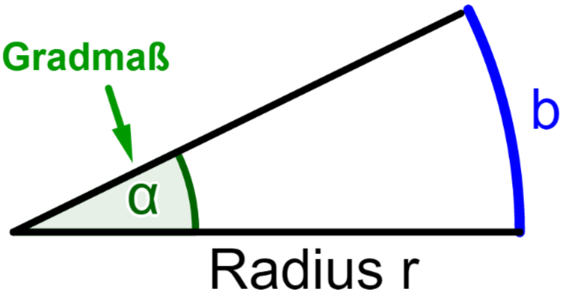
Bisher haben wir Winkel im **Gradmaß** gemessen. Ein rechter Winkel entspricht dabei 90°. Ein voller Winkel 360°. Wie der Name „Gradmaß" bereits sagt, werden die Winkel in der Einheit **Grad °** angegeben.

Definition (Bogenmaß)

Das Bogenmaß eines Winkels ist das Verhältnis der Länge des zum Winkel gehörigen Kreisbogens b und dessen Radius r:

$$\varphi = \frac{b}{r}$$

$$(Einheit: \boldsymbol{Radiant} - kurz: rad)$$

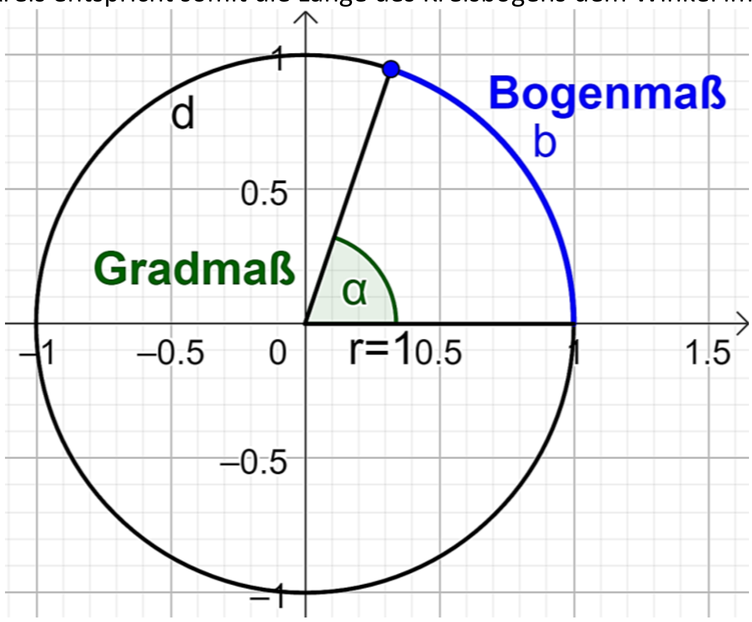


Zusammenhang: Gradmaß & Bogenmaß am Einheitskreis:

Beim Einheitskreis ist der Radius $r = 1$. Für die Berechnung des Kreisbogens gilt:

$$\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{1} = b$$

Im Einheitskreis entspricht somit die Länge des Kreisbogens dem Winkel im Bogenmaß!



Winkel im Bogenmaß = Länge des Kreisbogens am Einheitskreis

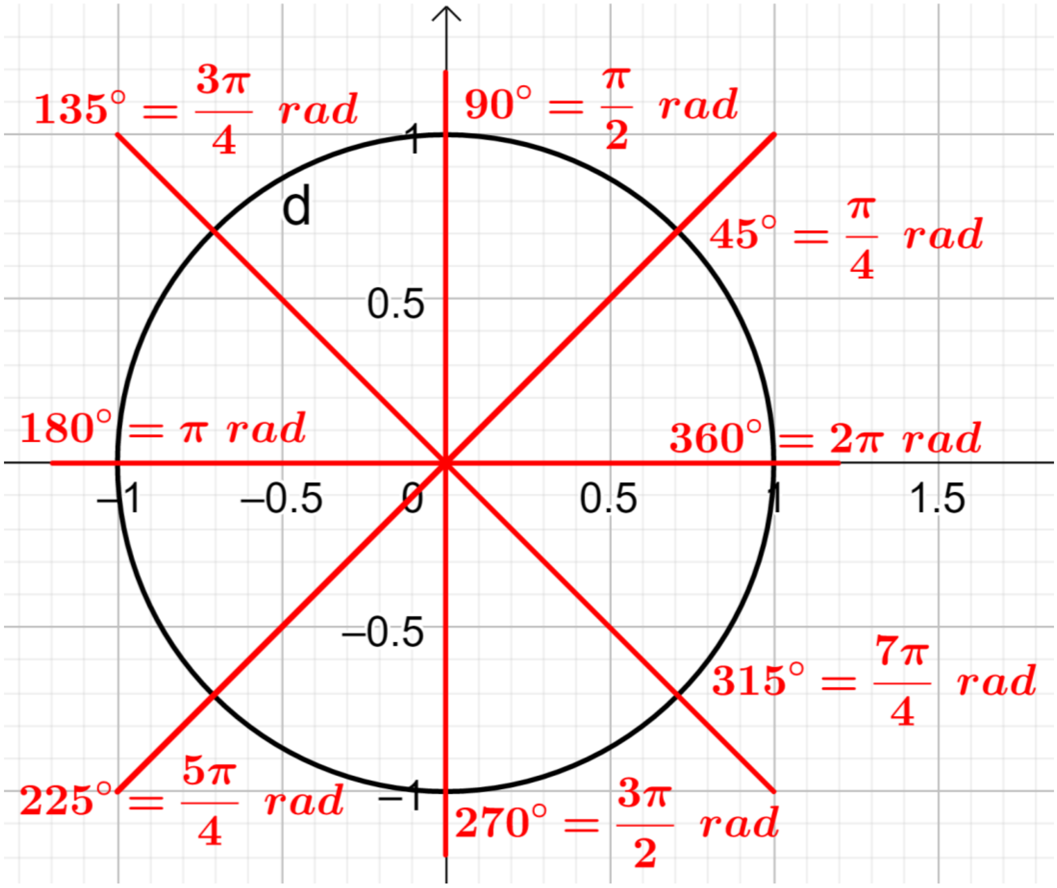
- Umfang des Kreisbogens: $u = 2r\pi = 2 \cdot 1 \cdot \pi = 2\pi$

$\boldsymbol{\alpha}$ $(\mathbf{in}\ °)$	$0°$	$45°$	$90°$	$135°$	$180°$	$225°$	$270°$	$315°$	$360°$
$\boldsymbol{\varphi}$ $(\mathbf{in\ rad})$	$0\ rad$	$\frac{\pi}{4}\ rad$	$\frac{\pi}{2}\ rad$	$\frac{3\pi}{4}\ rad$	$\pi\ rad$	$\frac{5\pi}{4}\ rad$	$\frac{3\pi}{2}\ rad$	$\frac{7\pi}{4}\ rad$	$2\pi\ rad$

➔ Der Winkel 360° entspricht einem vollen Winkel bzw. dem gesamten **Kreisumfang**. Im Bogenmaß kann man den vollen Winkel mit 2π $(in\ rad)$ angeben [= gesamter Umfang].

➔ Der Winkel 90° entspricht einem Viertel von 360° -> es gilt: $\boldsymbol{\varphi} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\ rad$

➔ Der Winkel 45° enstspricht der Hälfte von 90°. Es gilt: $\boldsymbol{\varphi} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}\ rad$



Umrechnungen zwischen dem Grad- und Bogenmaß

Für die Umrechnungen gilt folgender Zusammenhang am Einheitskreis:

$$Kreisbogen\ b = \varphi\ rad = \frac{\pi \cdot \alpha°}{180}$$

Umrechnung Bogenmaß -> Grad: $\alpha° = \frac{180° \cdot \varphi}{\pi}$

Umrechnung Grad -> Bogenmaß: $\varphi = \frac{\pi \cdot \alpha°}{180°}$

Bsp. 1) Rechne das Gradmaß ins Bogenmaß um.

a. $\alpha = 0{,}8°$	b. $\alpha = 22°$	c. $\alpha = 49°$	d. $\alpha = 99°$
e. $\alpha = 134°$	f. $\alpha = 200°$	g. $\alpha = 300°$	h. $\alpha = 359{,}5°$

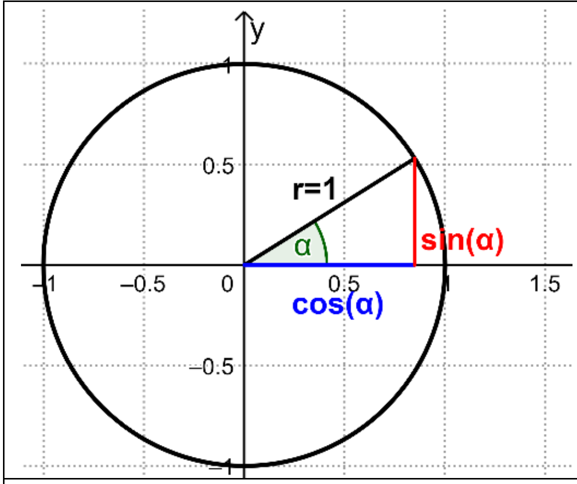
Bsp. 2) Rechne das Bogenmaß ins Gradmaß um.

a. $\varphi = 0{,}8\,rad$	b. $\varphi = 0{,}04\,rad$	c. $\varphi = 6\,rad$	d. $\varphi = 4\,rad$
e. $\varphi = 3{,}3\,rad$	f. $\varphi = 2{,}04\,rad$	g. $\varphi = 0{,}005\,rad$	h. $\varphi = 1{,}78\,rad$

2. Sinus, Cosinus- und Tangensfunktion

2.1 WH: Sinus, Cosinus und Tangens am Einheitskreis

Video 2/7

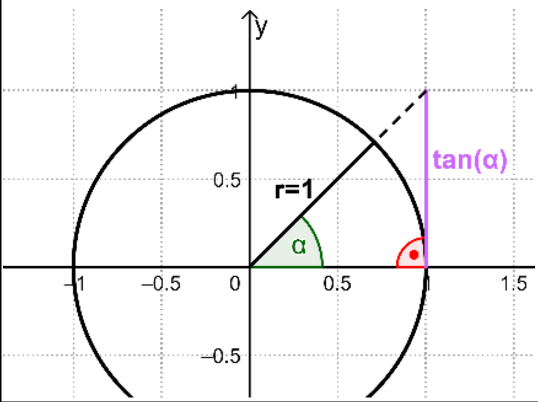


Zu jedem Punkt $P = (x|y)$ auf der Kreislinie des Einheitskreises kann man ein rechtwinkliges Dreieck einzeichnen. Da die Hypotenuse immer dem Radius mit der Länge 1 entspricht, gilt:

$$x = \mathbf{cos}(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{Ankathete}{1} = Ankathete$$

$$y = \mathbf{sin}(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{Gegenkathete}{1} = Gegenkathete$$

Für einen Punkt P gilt: $P = (x|y) = (\cos(\alpha)|\sin(\alpha))$



Im Punkt $(1|0)$ des Einheitskreises wird eine zur zweiten Achse **parallele Tangente** gelegt und der **Kreisradius** über P hinaus **verlängert**. Die Länge der Strecke von $(1|0)$ bis zum Schnittpunkt der verlängerten Hypotenuse mit der Tangente ist der **Tangenswert** des Winkels α:

$$\mathbf{tan}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{Gegenkathete}{1} = Gegenkathete$$

Besondere Sinus-, Cosinus- und Tangenswerte

α	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$					
$\cos\alpha$					
$\tan\alpha$					

Welchen Wertebereich nehmen Sinus, Cosinus und Tangens in den Quadranten an?

	1. Quadrant $0 < \alpha < 90°$	**2. Quadrant** $90 < \alpha < 180°$	**3. Quadrant** $180 < \alpha < 270°$	**4. Quadrant** $270 < \alpha < 360°$
$\sin\alpha$				
$\cos\alpha$				
$\tan\alpha$				

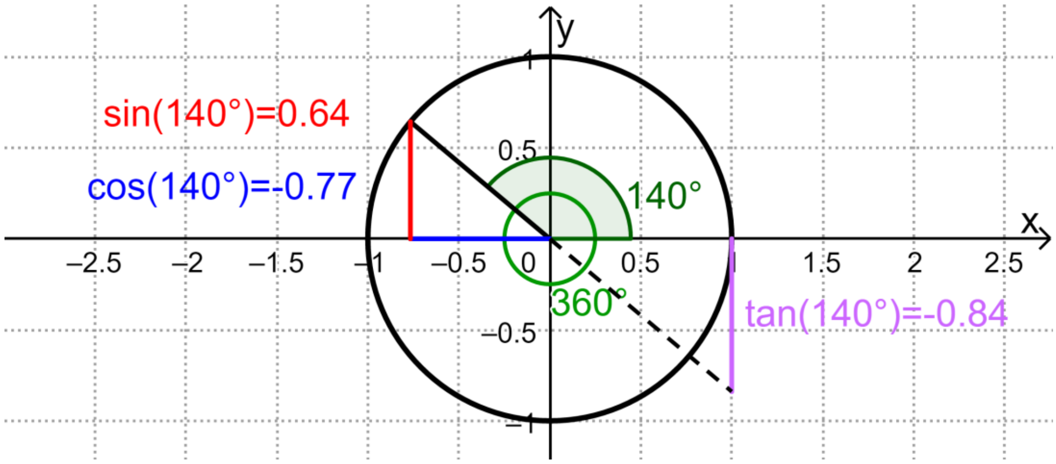
2.2 Erweiterung der Winkelfunktionen

In der fünften Klasse wurden bisher nur Winkelfunktion von 0° bis 360° betrachtet. In weiterer Folge möchten wir die Winkelfunktionen auf ganz $\mathbb{R}$ (für alle beliebig großen Winkel!) definieren. Es stellt sich nun die Frage, was man unter einem Winkel von $\alpha = 500°$ oder $\beta = -60°$ versteht?

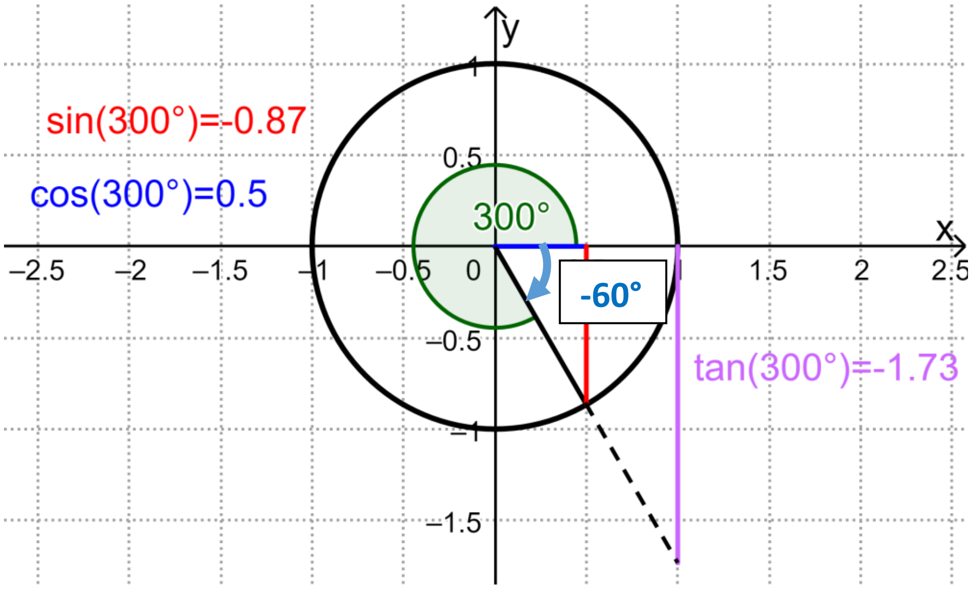
Wenn man sich die Bewegung eines Punktes P entlang des Einheitskreises vorstellt, so kann man dies mit Hilfe eines Winkels beschreiben:

- Bei 500° durchläuft der Punkt den Einheitskreis gegen den Uhrzeigersinn einmal komplett und bewegt sich anschließend noch um 140° weiter.

$$500° = 360° + 140°$$



- Bei -60° bewegt sich der Punkt um 60° im Uhrzeigersinn. Betrachtet man die Winkelfunktionen, so kann man -60° mit $\beta' = -60° + 360° = 300°$ darstellen.



- Bei 1100° wird der Einheitskreis dreimal gegen den Uhrzeigersinn komplett durchlaufen:

$$3 \cdot 360° = 1080°$$

In der „vierten“ Runde wandert er nun die noch fehlenden 20° weiter.

Gradmaß	Bogenmaß
$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 360°)$ $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + k \cdot 360°)$ $\tan(\alpha) = \tan(\alpha + k \cdot 360°)$	$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 2\pi)$ $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + k \cdot 2\pi)$ $\tan(\alpha) = \tan(\alpha + k \cdot 2\pi)$
Der Sinus-, Cosinus- bzw. Tangenswert ändert sich nicht, wenn man **volle Winkel** (360° bzw. 2π) zum gegebenen Winkel addiert bzw. subtrahiert.	

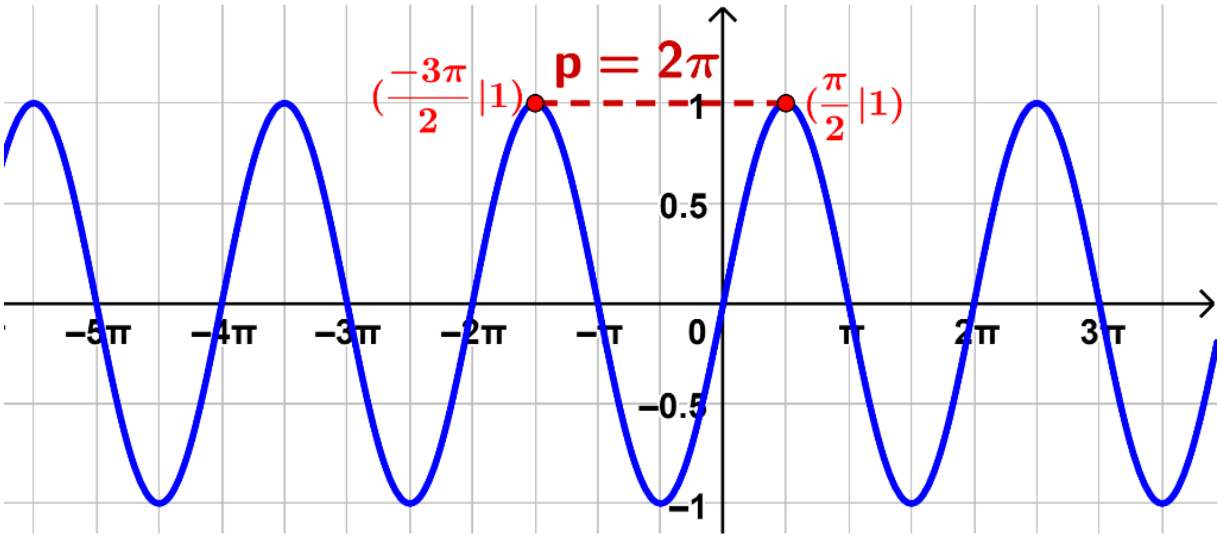
2.3 Graph und Eigenschaften der Winkelfunktionen

Wiederholung:

- Eine **gerade** Funktion ist symmetrisch bzgl. der y-Achse. Es gilt: $f(x) = f(-x)$
- Eine **ungerade** Funktion ist punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs. Es gilt: $f(x) = -f(-x)$
- Eine Funktion ist **periodisch**, wenn sich der Graph in gleichen Abständen immer wieder genau wiederholt. Es gilt: $f(x) = f(x + p)$ mit der Periode p.

$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{0\, rad}\ (0°)$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}\, rad}\ (90°)$	$\boldsymbol{\pi\, rad}\ (180°)$	$\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}\, rad}\ (270°)$	$\boldsymbol{2\pi\, rad}\ (360°)$
$\boldsymbol{\sin \alpha}$	0	1	0	-1	0
$\boldsymbol{\cos \alpha}$	1	0	-1	0	1

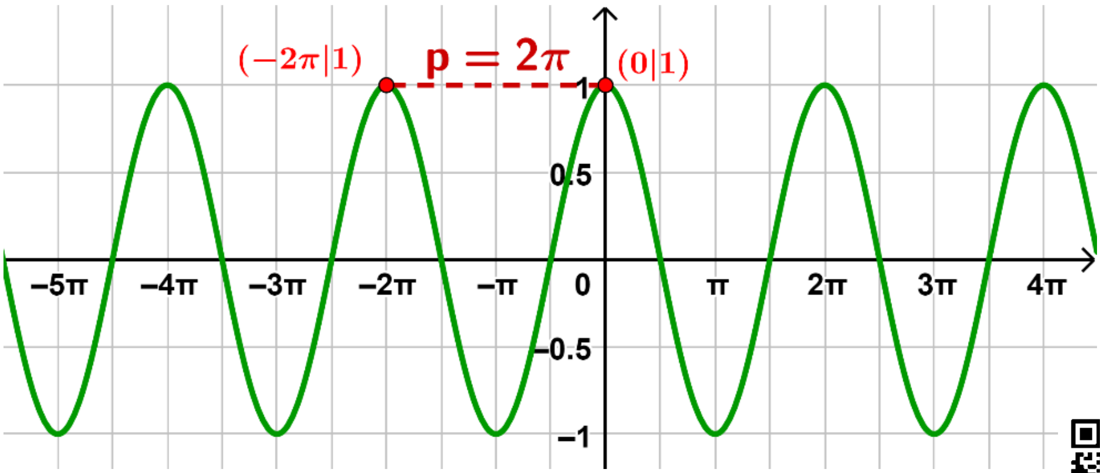
2.3.1 Die Sinusfunktion $f(x) = sin(x)$ mit kleinster Periode $p = 2\pi$ - $f: \mathbb{R} \to [-1; 1]$



Video

- **Definitionsmenge**: $D = \mathbb{R}$
- **Wertemenge**: $W = [-1; 1]$
- **Nullstellen**: $\sin(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k \cdot \pi \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Lokale **Maximumstellen**: $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Lokale **Minimumstellen**: $x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Monotonie: **streng monoton steigend** in: $\left[-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\, ;\, \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right] \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Monotonie: **streng monoton fallend** in: $\left[\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\, ;\, \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right] \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Symmetrie: **Punktsymmetrisch** zum Ursprung (Ungerade Funktion) – es gilt: $\sin(-x) = -\sin(x)$

2.3.2 Die Cosinusfunktion $f(x) = cos(x)$ mit kleinster Periode $p = 2\pi$ - $f: \mathbb{R} \to [-1; 1]$



Video

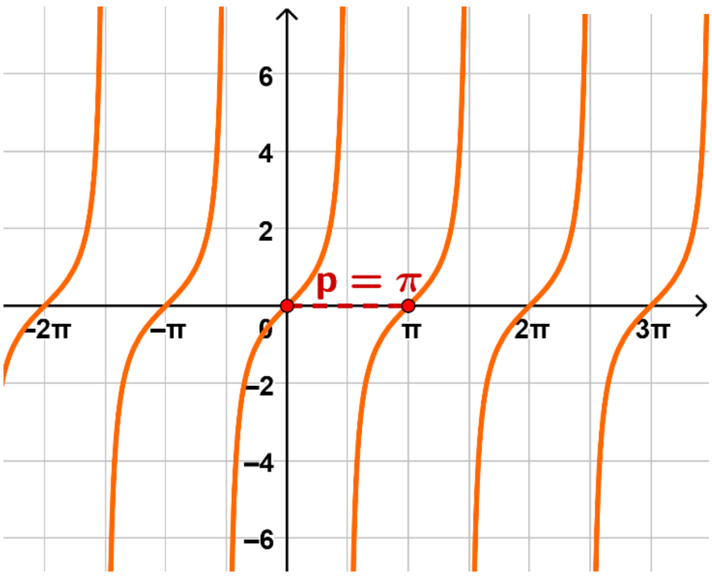
- **Definitionsmenge**: $D = \mathbb{R}$
- **Wertemenge**: $W = [-1; 1]$
- **Nullstellen**: $\cos(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \qquad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Lokale **Maximumstellen**: $x = k \cdot 2\pi \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Lokale **Minimumstellen**: $x = \pi + k \cdot 2\pi \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Monotonie: **streng monoton steigend** in: $[\pi + k \cdot 2\pi\ ;\ 2\pi + k \cdot 2\pi] \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Monotonie: **streng monoton fallend** in: $[k \cdot 2\pi\ ;\ \pi + k \cdot 2\pi] \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Symmetrie: **Symmetrisch** zur y-Achse (Gerade Funktion) – es gilt: $\cos(-x) = \cos(x)$

Video

2.3.3 Die Tangensfunktion $f(x) = tan\ (x)$ mit kleinster Periode $p = \pi$

Die Tangensfunktion nimmt für $\pm\frac{\pi}{2}$; $\pm\frac{3\pi}{2}$; $\pm\frac{5\pi}{2}$, … keinen Wert an (nicht definiert -> schaue dir dazu den Einheitskreis an!). Somit ist die Funktion folgendermaßen definiert:

$$f:\ \mathbb{R}\backslash\{\pm\frac{\pi}{2};\ \pm\frac{3\pi}{2};\ \pm\frac{5\pi}{2}; \dots\} \to \mathbb{R}$$

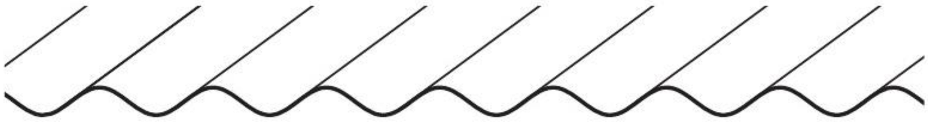


- **Definitionsmenge**: $D = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right\} \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- **Wertemenge**: $W = \mathbb{R}$
- **Nullstellen**: $\tan(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k \cdot \pi \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Lokale **Maximumstellen**: $keine$
- Lokale **Minimumstellen**: $keine$
- Monotonie: **streng monoton steigend** in D
- Symmetrie: **Punktsymmetrisch** zum Ursprung (Ungerade Funktion) – es gilt: $\tan(-x) = -\tan\ (x)$

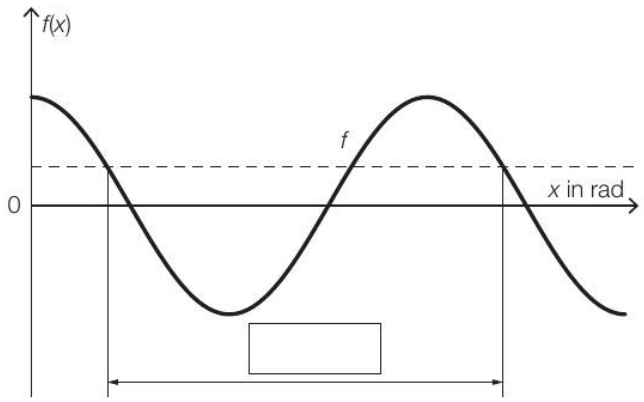
Baumhaus * (A_116)

Eine Familie plant, ein Baumhaus aus Holz zu errichten. Der Baum dafür steht in einem horizontalen Teil des Gartens.

c) Das Baumhaus wird mit gewellten Kunststoffplatten überdacht.

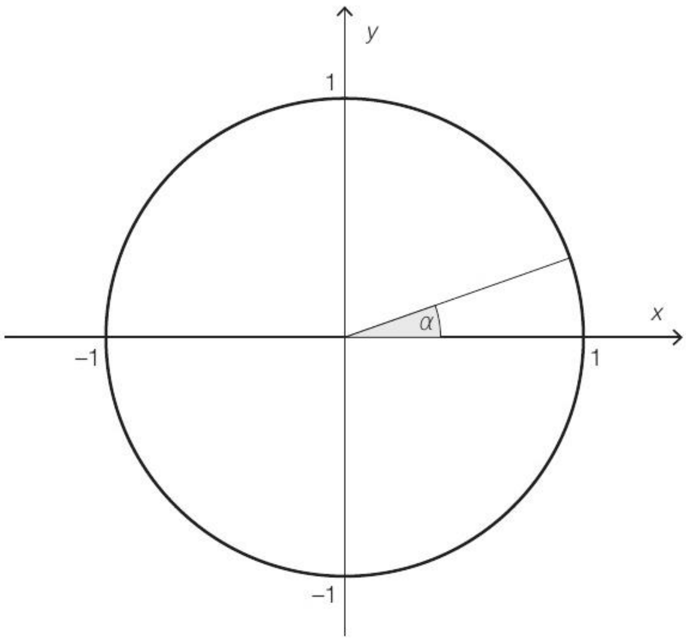


Dem Querschnitt liegt der Graph der Funktion f mit $f(x) = \cos(x)$ zugrunde. Dieser ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

In der nachstehenden Abbildung ist ein Winkel α im Einheitskreis dargestellt.



2) Zeichnen Sie im obigen Einheitskreis denjenigen Winkel β ein, für den gilt: $\sin(\beta) = \sin(\alpha)$ mit $\beta \neq \alpha$ und $0° \leq \beta \leq 360°$.

Pac-Man (B_292)

Pac-Man ist ein Videospiel, das 1980 veröffentlicht wurde. Die Spielfigur Pac-Man muss Punkte in einem Labyrinth fressen, während sie von Gespenstern verfolgt wird.

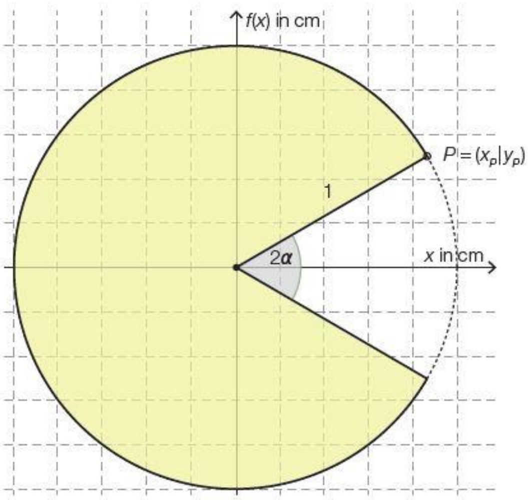


Abbildung 1: Pac-Man

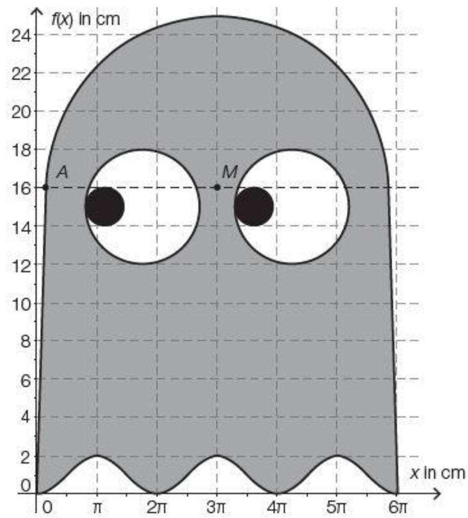


Abbildung 2: Gespenst

a) In Abbildung 1 ist Pac-Man dargestellt. Der Kreisabschnitt in der oberen Hälfte des Koordinatensystems kann mit dem Funktionsgraphen der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ im Intervall $-1 \leq x \leq x_P$ dargestellt werden.

- Veranschaulichen Sie in der Abbildung 1 den $\cos(\alpha)$.
- Kennzeichnen Sie in der Abbildung 1 diejenige Fläche, die mit dem nachstehenden bestimmten Integral berechnet wird.

  $F = \int_0^{x_P} \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{y_P}{x_P} \cdot x\right) \mathrm{d}x$
- Berechnen Sie den Flächeninhalt von Pac-Man mit Radius 1 cm und $\alpha = \frac{\pi}{5}$ rad.