LÖSUNGEN: BEWEGUNGSAUFGABEN

Integralrechnung:

Video 15

I. Unbestimmte Integrale:

Die unbestimmten Integrale liefern jeweils die Stammfunktionen der Funktionen:

$$v(t) = \int a(t)\,dt \qquad\qquad s(t) = \int v(t)\,dt$$

Dabei ist zu beachten, dass es eine Integrationskonstante gibt. Bei der Geschwindigkeit wird diese mit $\boldsymbol{v_0}$ bezeichnet (=Anfangsgeschwindigkeit). Beim Weg mit $\boldsymbol{s_0}$ (= Anfangsweg, Anfangshöhe).

Beispiel ($\boldsymbol{v_0 = 3\frac{m}{s}, s_0 = 0m}$):

- $a(t) = 5\frac{m}{s^2}$
- $v(t) = \int 5\,dt = 5t + v_0 = 5t + 3$
- $s(t) = \int (5t+3)dt = 5\frac{t^2}{2} + 3t + s_0 = \frac{5}{2}t^2 + 3t$

Bsp. 2 **)** Gegeben ist eine Beschleunigungsfunktion, die Anfangsgeschwindigkeit v_0 & der zurückgelegte Weg s_0 bei $t = 0$. ($a(t)$ $in \frac{m}{s^2}$, t in sek)

* $\bar{a}(2;5) = \frac{v(5)-v(2)}{5-2}$

a. Stelle die Funktionsgleichungen $v(t)$ und $s(t)$ auf.

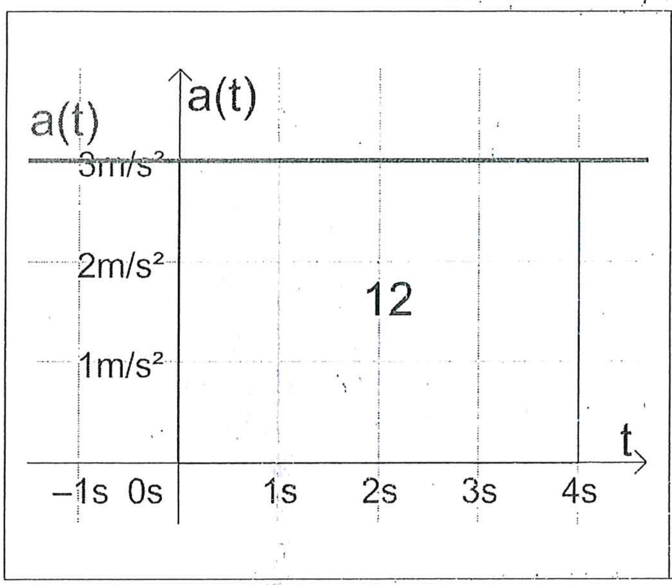
b. Bestimme die mittlere Beschleunigung und mittlere Geschwindigkeit im Intervall $[2;5]$.

* $\bar{v}(2;5) = \frac{s(5)-s(2)}{5-2}$

a. $a(t) = 4 \quad v_0 = 5\frac{m}{s}, s_0 = 0\,m$ $v(t) = \int a(t)\,dt = \int 4\,dt$ $= 4t + v_0 = \underline{\underline{4t+5}}$ * $\bar{a}(2;5) = 4\frac{m}{s^2}$ $s(t) = \int (4t+5)\,dt$ $= 4\cdot\frac{t^2}{2} + 5t + s_0 = \underline{2t^2+5t}$ * $\bar{v}(2;5) = 19\,m/s$	b. $a(t) = 2t + 1 \quad v_0 = 0\frac{m}{s}, s_0 = 0\,m$ $v(t) = \int (2t+1)\,dt$ $= \underline{\underline{t^2+t}} + \cancel{v_0} \nearrow 0$ * $\bar{a}(2;5) = 8\,m/s^2$ $s(t) = \int (t^2+t)\,dt$ $= \underline{\underline{\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}}} + \cancel{s_0} \nearrow 0$ * $\bar{v}(2;5) = 16{,}5\,m/s$
c. $a(t) = 0{,}05t^2 - t + 4 \quad v_0 = 3\frac{m}{s}, s_0 = 0\,m$ $v(t) = \int (0{,}05t^2 - t + 4)\,dt$ $= \underline{\underline{0{,}05\cdot\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 4t + 3}}$ $s(t) = \int v(t)\,dt$ $= \underline{\underline{0{,}05\cdot\frac{t^4}{12} - \frac{t^3}{6} + 4\frac{t^2}{2} + 3t}}$ * $\bar{a}(2;5) = 1{,}15\,m/s^2$ $\bar{v}(2;5) = 13{,}04\,m/s$	d. $a(t) = 10t + 10 \quad v_0 = 10\frac{m}{s}, s_0 = 1\,000\,m$ $v(t) = 10\cdot\frac{t^2}{2} + 10t + 10$ $= \underline{\underline{5t^2 + 10t + 10}}$ $\underline{\underline{s(t) = 5\cdot\frac{t^3}{3} + 5t^2 + 10t + 1000}}$ $\bar{a}(2;5) = 45\,m/s^2$ * $\bar{v}(2;5) = 110\,m/s$

II. Bestimmte Integrale:

Die Fläche (=bestimmtes Integral) unter dem Beschleunigungsgraphen entspricht der Geschwindigkeitsänderung im gegebenen Intervall.



$$a(t) = 3$$

Bestimme $\int_0^4 a(t)\,dt$ auf zwei Arten. Interpretiere im Kontext.

a. Bestimmtes Integral

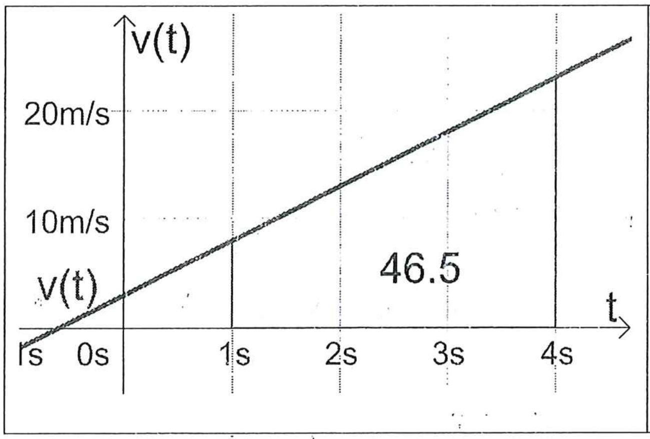
$$\int_0^4 3\,dt = 3t + c\,|_0^4 = 12 + c - (0 + c) = 12\frac{m}{s}$$

b. Flächeninhaltsberechnung (Rechteck)

$$\int_0^4 4\,dt = 4s \cdot 3\frac{m}{s^2} = 12\frac{m}{s}$$

Die Geschwindigkeitsänderung in den ersten vier Sekunden beträgt $12\frac{m}{s}$. Um $12\frac{m}{s}$ wird der Körper schneller.

Die Fläche (=bestimmtes Integral) unter dem Geschwindigkeitsgraphen entspricht dem zurückgelegten Weg im gegebenen Intervall.



$$v(t) = 5t + 3$$

Bestimme $\int_1^4 v(t)\,dt$. Interpretiere im Kontext.

$$\int_1^4 v(t)\,dt = \int_1^4 (5t+3)dt = \left(5\frac{t^2}{2} + 3t\right)|_1^4 =$$

$$= 52 - 5{,}5 = 46{,}5\,m$$

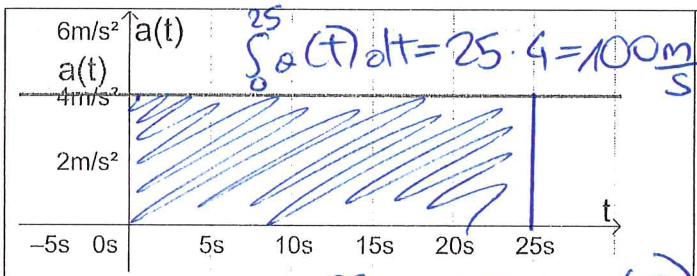
Die Wegänderung im Intervall [1;4] beträgt 46,5m. In diesem Intervall wurden 46,5m zurückgelegt.

Bsp. 3) nterpretiere folgende Ausdrücke ($s(t)$ *in Meter*, t *in Sekunden*)

- $a(5)$ ... Momentane Beschl. nach 5 sek
- $v'(3) = 7\frac{m}{s^2}$ Mom. –"– nach 3 sek beträgt $7\frac{m}{s^2}$
- $\frac{s(7)-s(4)}{7-4}$ ... Mittlere Geschw. im Intervall [4;7]
- $\frac{s'(8)-s'(5)}{3} = 2\frac{m}{s^2}$ Mittlere Beschl. zw. 5. & 8. Sekunde beträgt $2\frac{m}{s^2}$
- $\int a(t)\,dt$ ... $= v(t) + v_0$ Geschwindigkeit
- $\int_2^4 v(t)\,dt$ ... $= s(t)\big|_2^4 = s(4) - s(2)$ zurückgelegter Weg zw. 2. & 4. Sekunde
- $\frac{\int_1^4 a(t)\,dt}{4-1}$ ... $= \frac{v(4)-v(1)}{4-1}$ Mittlere Beschl. zw. 1. & 4. Sekunde

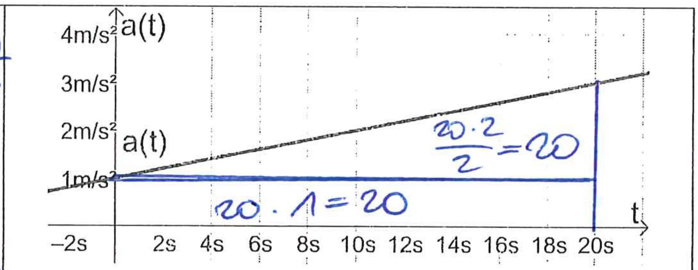
- $s(8) = 100m$ · Nach 8 Sekunden wurden 100m zurückgelegt
- $s'(8)$ ... Momentane Geschw. nach 8 sek.
- $\frac{\int_1^7 v(t)\,dt}{6}$ ... $\frac{s(7)-s(1)}{6}$ Mittlere Geschw. zw. 1. & 7. Sekunde; $6 \rightarrow 7-1$
- $\int v(t)\,dt = s(t)+s_0$
- $\frac{v(2)-v(1)}{1}$ ... Mittlere Beschl. zw. 1. & 2. Sekunde; $2-1$
- $v(7)$ ... Momentane Geschw. nach 7 Sekunden.
- $\int_3^4 a(t)\,dt = 12\frac{m}{s} \Leftrightarrow v(4)-v(3)=12\frac{m}{s}$ Zwischen der 3. & 4. Sekunde nimmt die Geschwindigkeit um 12 m/s zu.
- $s(8) - s(5)$ ... zurückgelegter Weg zw. 5. & 8. Sekunde
- $v(8) - v(5)$ ... Geschwindigkeitsänderung — " —
- $a(8) - a(5)$ ... Änderung der Beschleunigung — " —

Bsp. 4.) Gegeben ist der Graph einer Beschleunigungsfunktion. Bestimme das gesuchte bestimmte Integral. Interpretiere den Ausdruck.



$\int_0^{25} a(t)\,dt = v(t)\Big|_0^{25} = v(25) - v(0)$

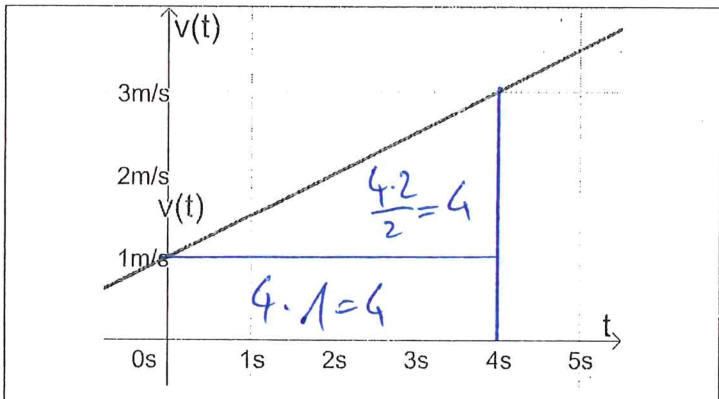
In den ersten 25 sek nimmt die Geschw. um 100 m/s zu.



$\int_0^{20} a(t)\,dt = 40$ m/s

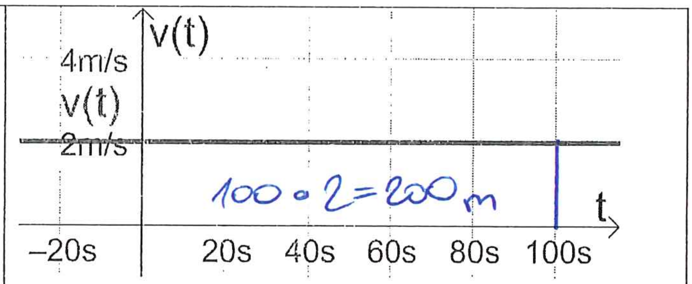
In den ersten 20 sek nimmt die Geschw. um 40 m/s zu.

Bsp. 5) Gegeben ist der Graph einer Geschwindigkeitsfunktion. Bestimme das gesuchte bestimmte Integral. Interpretiere den Ausdruck.



$\int_0^4 v(t)\,dt = 8m$

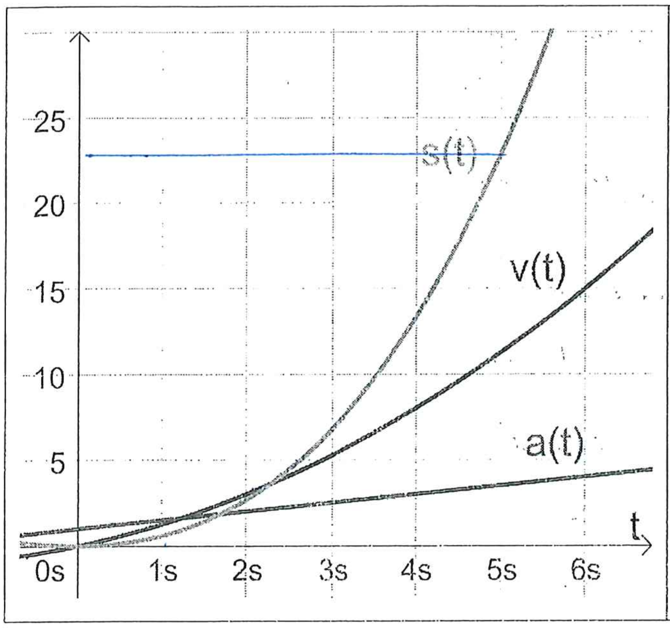
In den ersten 4 sek wurden 8m zurückgelegt.



$\int_0^{100} v(t)\,dt = 200m$

In den ersten 100 sek wurden 200m zurückgelegt.

Bsp. 6) Gegeben sind die Graphen $s(t), v(t), a(t)$. (Zeit in Sekunden, Weg in Meter)



Bestimme näherungsweise und interpretiere im Kontext.

a. $\int_0^5 v(t)\,dt = s(5) - s(0) \approx 22{,}5 - 0 = 22{,}5\,m$

In den ersten 5 sek werden 22,5m zurückgelegt.

b. $\int_2^6 a(t)\,dt = v(6) - v(2) = 15 - 3 = 12\,m/s$

Zwischen 2. & 6. Sekunde nimmt die Geschw. um 12m/s zu

c. $\frac{\int_2^3 a(t)\,dt}{3-2} = \frac{v(3)-v(2)}{3-2} = \frac{5{,}5-3}{1} = 2{,}5\,\frac{m}{s^2}$

Mittlere Beschl. im Int. $[2;3]$

d. $\frac{\int_1^4 v(t)\,dt}{4-1} = \frac{s(4)-s(1)}{4-1} = \frac{13-1}{3} = \frac{12}{3} = 4\,\frac{m}{s}$

Mittl. Geschw.

Bsp. 7) Die Geschwindigkeit eines bremsenden Autos wird mit Hilfe einer Funktion $v(t)$ im Zeitintervall $[0; t_2]$ modelliert (v(t) in m/s, t in sek). Zum Zeitpunkt t_2 kommt das Auto zum Stehen. Berechne den Bremsweg des Autos.

$v(t) = \cancel{0{,}1}t^2 - \cancel{0{,}65t + 1}$ $\quad [0; 2{,}5]$ $3t^2 - 19{,}5t + 30$ HINTEN!	$v(t) = 0{,}2t^2 - 2t + 4{,}2 \quad [0; 3]$

Bsp. 8) Gegeben ist eine Beschleunigungsfunktion, die Anfangsgeschwindigkeit v_0 & der zurückgelegte Weg s_0 bei $t = 0$ eines Körpers. $(a(t)\ in \frac{m}{s^2}, t\ in\ sek)$

Video 18

a. Bestimme den zurückgelegten Weg des Körpers im Intervall [3,8].
b. Gib die momentane Geschwindigkeit nach 10 Sekunden an.
c. Wie lang dauert es, bis der Körper 1000 Meter zurückgelegt hat?
d. Bestimme die Geschwindigkeitsänderung zwischen der 2. & 5. Sekunde.
e. Wann bewegt sich der Körper mit einer Geschwindigkeit von 100 m/s?

a. $a(t) = 4t + 4 \quad v_0 = 5\frac{m}{s}, s_0 = 0\,m$	**b.** $a(t) = t^2 + 2t \quad v_0 = 0\frac{m}{s}, s_0 = 0\,m$

Bsp. 9) Die Beschleunigungsfunktion $a(t)$ ($a(t)$ in m/s², t in sek) beschreibt das Starten eines Autos aus dem Stand ($v_0 = 0\frac{m}{s}, s_0 = 0m$). Die Funktionen werden bis zum Zeitpunkt des Erreichens der Höchstgeschwindigkeit betrachtet.

a. Bestimme den Zeitpunkt, wann das Auto die Höchstgeschwindigkeit erreicht. Gib die Höchstgeschwindigkeit an.
b. Berechne den zurückgelegten Weg bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit.

a. $a(t) = 0{,}4t^2 - 9{,}2t + 52$	**b.** $a(t) = 0{,}005t^2 - 0{,}405t + 8{,}2$

1) $s(t) = -2t^4 + 8t^3$ (1)

a) $\frac{s(1)-s(0)}{1-0} = \underline{\underline{6\,m/s}}$

b) $v(1) = s'(1) = \underline{\underline{16\,m/s}}$

c) $s(3) = \underline{\underline{54\,m}}$

d) $v(t) = s'(t) = -8t^3 + 24t^2$

• $v'(t) = 0 \Leftrightarrow -24t^2 + 48t = 0$

$t_1 = 0$: $v''(0) = 48 > 0$ MIN

$t_2 = 2$: $\underline{\underline{v''(2) = -48 < 0 \text{ MAX}}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{v(2) = 32\,m/s}}$ ← max. Geschw. nach $t = 2$ sek.

e) $\frac{\cancel{s}v(2)-v(0)}{2-0} = \underline{\underline{16\,m/s^2}}$

f) $s(t) = 40$

$\downarrow$ GG

$\underline{\underline{t_1 = 2{,}25\text{ sek}}}$ ($t_2 = 3{,}55$ sek)

g) $v(t) = 10$

$\downarrow$ GG

($t_1 = -0{,}59$ sek) $\underline{\underline{t_2 = 0{,}74\text{ sek}}}$ $\underline{\underline{t_3 = 2{,}85\text{ sek}}}$

7a)

$v(t) = 3t^2 - 19{,}5t + 30$

$s(t) = \int v(t)\,dt = t^3 - 9{,}75t^2 + 30t$

- $v(t) = 0$

$T_1 = 2{,}5$ sek ($t_2 = 4$ sek)

nach 2,5 sek: STEHEN

$\Rightarrow s(2{,}5) = \underline{\underline{29{,}69\,m}}$

7b) $\int_0^3 v(t)\,dt = \underline{\underline{5{,}4\,m}}$

8a) $a(t) = 4t + 4$ $\quad v_0 = 5\,\frac{m}{s}$ $\quad s_0 = 0\,m$

$v(t) = \int a(t)\,dt = 2t^2 + 4t + 5$

$s(t) = \int v(t)\,dt = \frac{2}{3}t^3 + t^2 + 5t$

(i) $s(8) - s(3) = \underline{\underline{458{,}3\,m}}$

(ii) $v(10) = \underline{\underline{245\,m/s}}$

(iii) $s(t) = 1000$

$\hookrightarrow \underline{\underline{t = 10{,}3\,sek}}$

(iv) $v(5) - v(2) = \underline{\underline{54\,m/s}}$

(v) $v(t) = 100$

$\downarrow$

$\underline{\underline{t = 5{,}96\,sek}}$

b) $a(t) = t^2 + 2t$

$v(t) = \frac{t^3}{3} + t^2$

$s(t) = \frac{t^4}{12} + \frac{t^3}{3}$

(i) $\underline{\underline{496{,}25\,m}}$

(ii) $\underline{\underline{433{,}33\,m/s}}$

(iii) $\underline{\underline{t = 9{,}59\,sek}}$

(iv) $\underline{\underline{60\,m/s}}$

(v) $\underline{\underline{t = 5{,}83\,sek}}$

9)

a) $a(t) = 0,4t^2 - 9,2t + 52$

$v(t) = +0,13t^3 - 4,6t^2 + 52t$

$s(t) = 0,03t^4 - 1,53t^3 + 26t^2$

(i) $v'(t) = a(t) = 0$

$\hookrightarrow t_1 = 10 \Rightarrow v'(10) = -1,2 < 0$ MAX

$\hookrightarrow t_2 = 13 \Rightarrow v'(13) = 1,2 > 0$ MIN

Nach 10 sek: Höchstgeschw.

$\underline{\underline{v(10) = 193,33\,m/s}}$

(ii) $\int_0^{10} v(t)\,dt = \underline{\underline{1400\,m}}$

b) $a(t) = 0,005t^2 - 0,405t + 8,2$

$v(t) = 0,0017t^3 - 0,2025t^2 + 8,2t$

$s(t) = 0,00042t^4 - 0,0675t^3 + 4,1t^2$

(i) $a(t) = v'(t) = 0$

$t_1 = 40 \Rightarrow v''(40) = -0,005 < 0$ MAX

$\hookrightarrow t_2 = 41 \Rightarrow v''(41) = 0,005 > 0$ MIN

$\Rightarrow v(40) = \underline{\underline{110,67\,m/s}}$

(ii) $\underline{\underline{s(40) = 3306,67\,m}}$