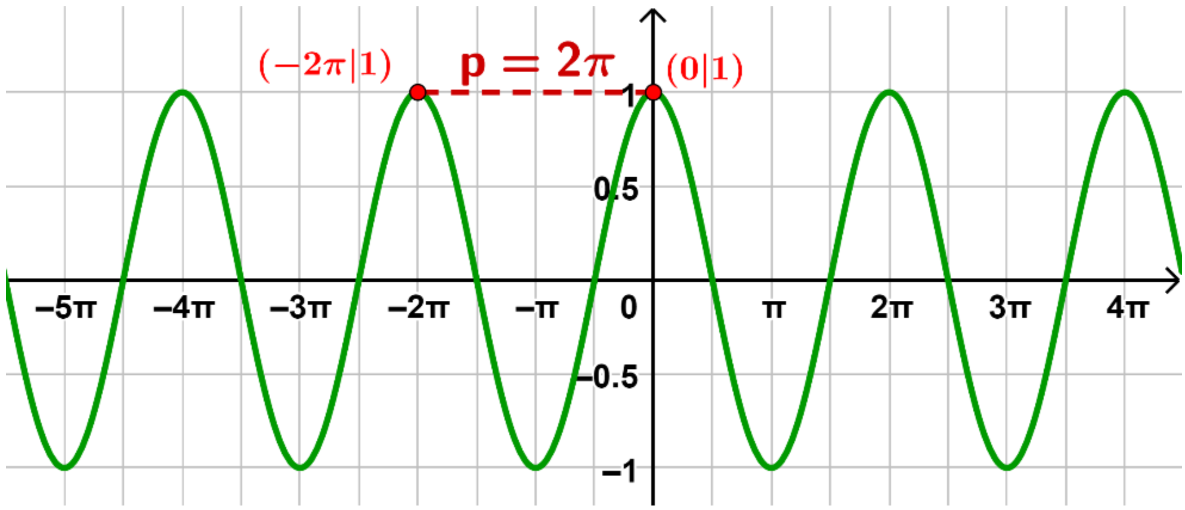
# FA6 Winkelfunktionen

## Maturaskript AHS (23 Seiten)

### Grundkompetenz:

- **FA6.1** grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge der Art f(x) = a · sin(b · x) als allgemeine Sinusfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
- **FA6.2** aus Graphen und Gleichungen von allgemeinen Sinusfunktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können
- **FA6.3** die Wirkung der Parameter a und b kennen und die Parameter im Kontext deuten können
- **FA6.4** Periodizität als charakteristische Eigenschaft kennen und im Kontext deuten können
- **FA6.5** wissen, dass $cos(x) = sin(x + \frac{\pi}{2})$
- **FA6.6** wissen, dass gilt: [sin(x)]'= cos(x), [cos(x)]'= – sin(x)]




Prof. πegischer

**Zusätzlich:**

**Erklärvideos** (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

**QR-Codes** im SKRIPT!

**Maturaaufgaben** aus dem Matura-Aufgabenpool

# Allgemeine Informationen zum Maturaskript

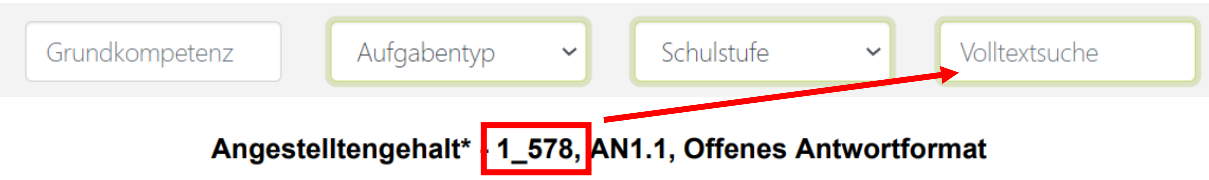
Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

**1)** Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=M
**2)** Gib im Feld „**Volltextsuche**“ die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.




## Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. 1_578) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**“ und „**GeoGebra**“ erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**“ erstellt.

## Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

| **Allgemeine Regeln** | **Weitere Regeln für Lehrpersonen** |
|---|---|
| ▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen.<br>▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen.<br>▪ Sie dürfen mein Materialen **NICHT** gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden.<br>▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden.<br>▪ Bei einem **Missbrauch** erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden. | **WICHTIGSTE REGEL:** LehrerInnen dürfen die Materialien in **Ihrem eigenen Unterricht** verwenden:<br>▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen.<br>▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben.<br>▪ Es ist **nicht erlaubt**, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben.<br>▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen. |

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

# FA6 Winkelfunktionen

Video

**Vorwissen aus der Unterstufe:**

- Umfang eines Kreises: $u = 2r\pi$
- Länge eines Kreisbogens b mit Winkel $\alpha$: $b = \frac{r\pi\alpha}{180}$

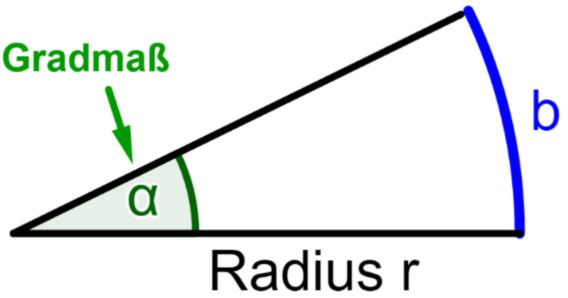
## 1. Ein weiteres Winkelmaß: Das Bogenmaß

Bisher haben wir Winkel im **Gradmaß** gemessen. Ein rechter Winkel entspricht dabei 90°. Ein voller Winkel 360°. Wie der Name „Gradmaß“ bereits sagt, werden die Winkel in der Einheit **Grad °** angegeben.

**Definition (Bogenmaß)**

Das Bogenmaß eines Winkels ist das Verhältnis der Länge des zum Winkel gehörigen Kreisbogens b und dessen Radius r:

$$\varphi = \frac{b}{r}$$
$$(Einheit: \boldsymbol{Radiant} - kurz: rad)$$

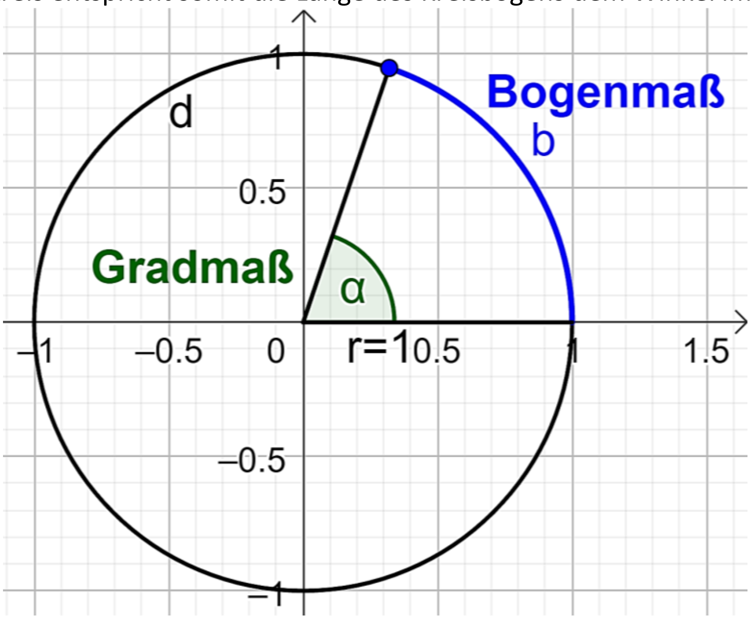



**Zusammenhang: Gradmaß & Bogenmaß am Einheitskreis:**

Beim Einheitskreis ist der Radius $r = 1$. Für die Berechnung des Kreisbogens gilt:

$$\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{1} = b$$

Im Einheitskreis entspricht somit die Länge des Kreisbogens dem Winkel im Bogenmaß!



## Winkel im Bogenmaß = Länge des Kreisbogens am Einheitskreis

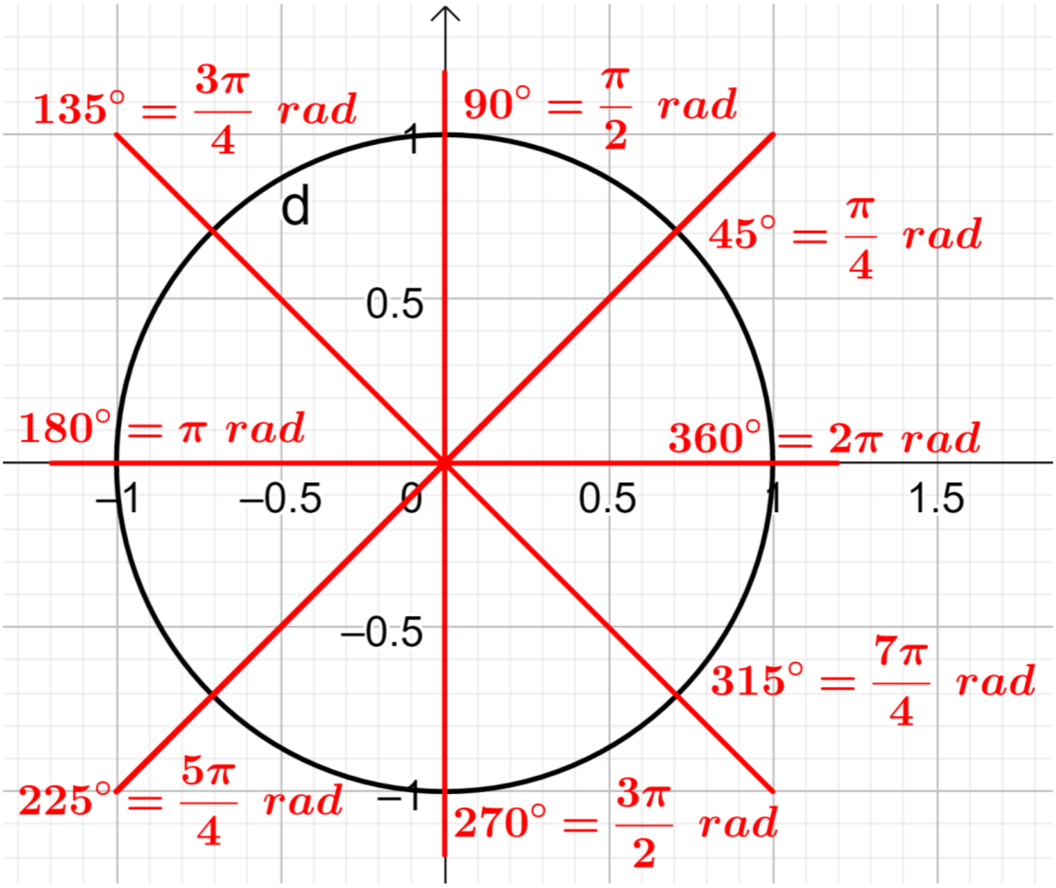
- Umfang des Kreisbogens: $u = 2r\pi = 2 \cdot 1 \cdot \pi = 2\pi$

| $\boldsymbol{\alpha}$ (**in** °) | 0° | 45° | 90° | 135° | 180° | 225° | 270° | 315° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{\varphi}$ (**in rad**) | $0\, rad$ | $\frac{\pi}{4}\, rad$ | $\frac{\pi}{2}\, rad$ | $\frac{3\pi}{4}\, rad$ | $\pi\, rad$ | $\frac{5\pi}{4}\, rad$ | $\frac{3\pi}{2}\, rad$ | $\frac{7\pi}{4}\, rad$ | $2\pi\, rad$ |

➔ Der Winkel 360° entspricht einem vollen Winkel bzw. dem gesamten **Kreisumfang**. Im Bogenmaß kann man den vollen Winkel mit $2\pi$ $(in\ rad)$ angeben [= gesamter Umfang].

➔ Der Winkel 90° entspricht einem Viertel von 360° -> es gilt: $\boldsymbol{\varphi} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\, rad$

➔ Der Winkel 45° enstspricht der Hälfte von 90°. Es gilt: $\boldsymbol{\varphi} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}\, rad$




## Umrechnungen zwischen dem Grad- und Bogenmaß

**Für die Umrechnungen gilt folgender Zusammenhang am Einheitskreis:**

$$Kreisbogen\ b = \varphi\, rad = \frac{\pi \cdot \alpha°}{180}$$

**Umrechnung** Bogenmaß -> Grad: $\alpha° = \frac{180° \cdot \varphi}{\pi}$

**Umrechnung** Grad -> Bogenmaß: $\varphi = \frac{\pi \cdot \alpha°}{180°}$

**Bsp. 1)** Rechne das Gradmaß ins Bogenmaß um.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a. $\alpha = 0{,}8°$ | b. $\alpha = 22°$ | c. $\alpha = 49°$ | d. $\alpha = 99°$ |
| e. $\alpha = 134°$ | f. $\alpha = 200°$ | g. $\alpha = 300°$ | h. $\alpha = 359{,}5°$ |

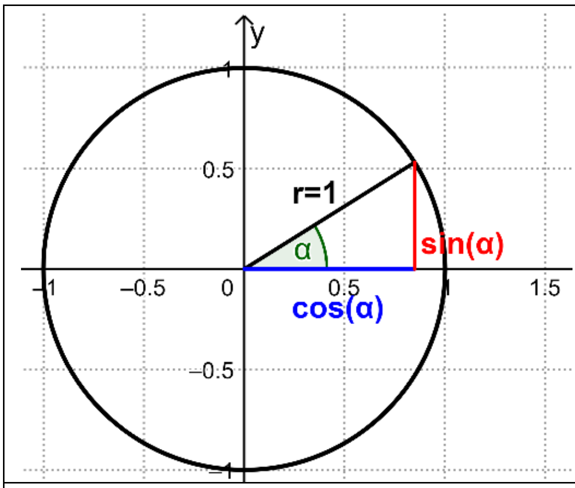
**Bsp. 2)** Rechne das Bogenmaß ins Gradmaß um.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a. $\varphi = 0{,}8\,rad$ | b. $\varphi = 0{,}04\,rad$ | c. $\varphi = 6\,rad$ | d. $\varphi = 4\,rad$ |
| e. $\varphi = 3{,}3\,rad$ | f. $\varphi = 2{,}04\,rad$ | g. $\varphi = 0{,}005\,rad$ | h. $\varphi = 1{,}78\,rad$ |

## 2. Sinus, Cosinus- und Tangensfunktion

### 2.1 WH: Sinus, Cosinus und Tangens am Einheitskreis

Video 2/7

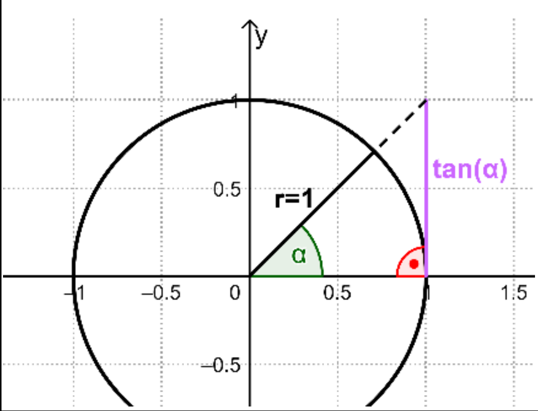



Zu jedem Punkt $P = (x|y)$ auf der Kreislinie des Einheitskreises kann man ein rechtwinkliges Dreieck einzeichnen. Da die Hypotenuse immer dem Radius mit der Länge 1 entspricht, gilt:

$$x = \mathbf{cos}(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{Ankathete}{1} = Ankathete$$

$$y = \mathbf{sin}(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{Gegenkathete}{1} = Gegenkathete$$

Für einen Punkt P gilt: $P = (x|y) = (\cos(\alpha)|\sin(\alpha))$




Im Punkt $(1|0)$ des Einheitskreises wird eine zur zweiten Achse **parallele Tangente** gelegt und der **Kreisradius** über P hinaus **verlängert**. Die Länge der Strecke von $(1|0)$ bis zum Schnittpunkt der verlängerten Hypotenuse mit der Tangente ist der **Tangenswert** des Winkels $\alpha$:

$$\mathbf{tan}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{Gegenkathete}{1} = Gegenkathete$$

**Besondere Sinus-, Cosinus- und Tangenswerte**

| $\alpha$ | 0° | 90° | 180° | 270° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | | | | | |
| $\cos\alpha$ | | | | | |
| $\tan\alpha$ | | | | | |

**Welchen Wertebereich nehmen Sinus, Cosinus und Tangens in den Quadranten an?**

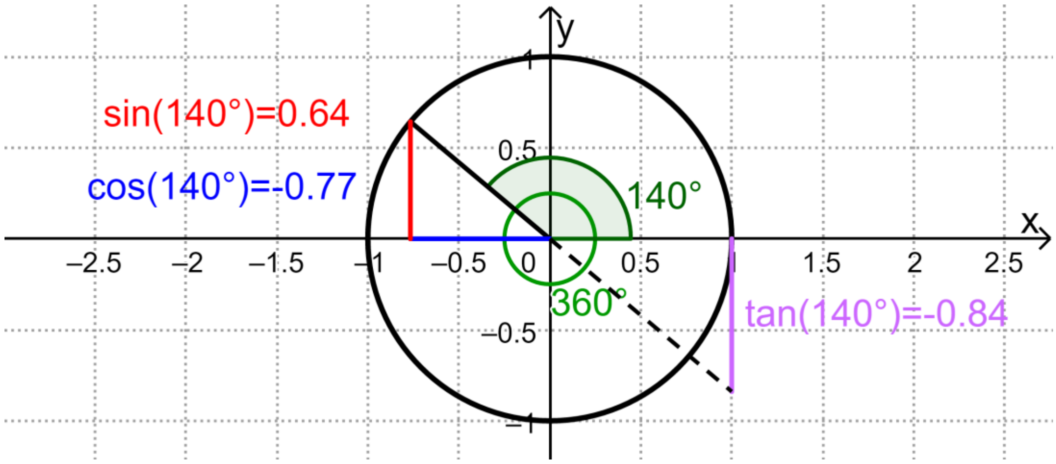
| | **1. Quadrant** $0 < \alpha < 90°$ | **2. Quadrant** $90 < \alpha < 180°$ | **3. Quadrant** $180 < \alpha < 270°$ | **4. Quadrant** $270 < \alpha < 360°$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | | | | |
| $\cos\alpha$ | | | | |
| $\tan\alpha$ | | | | |

## 2.2 Erweiterung der Winkelfunktionen

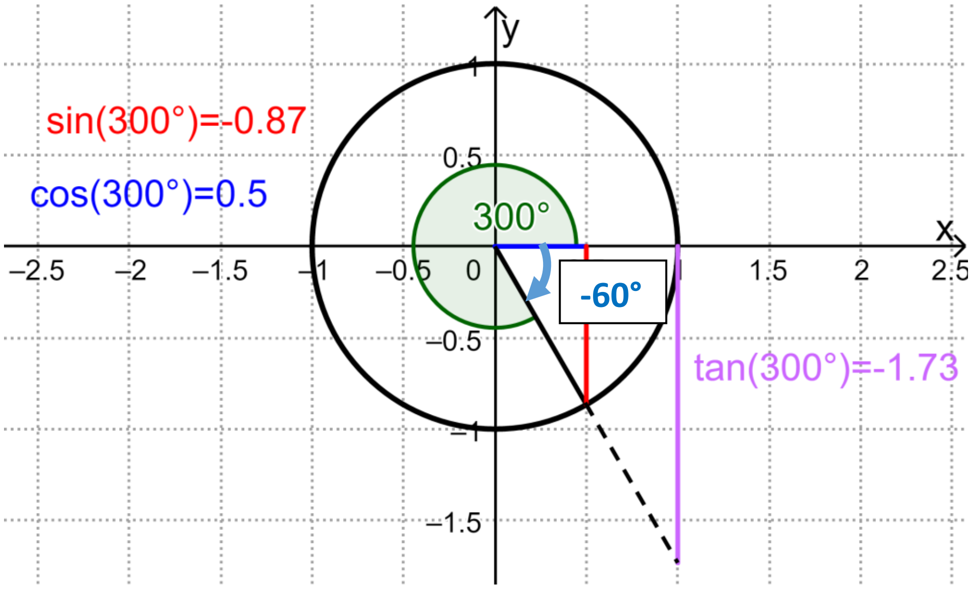
In der fünften Klasse wurden bisher nur Winkelfunktion von 0° bis 360° betrachtet. In weiterer Folge möchten wir die Winkelfunktionen auf ganz $\mathbb{R}$ (für alle beliebig großen Winkel!) definieren. Es stellt sich nun die Frage, was man unter einem Winkel von $\alpha = 500°$ oder $\beta = -60°$ versteht?

Wenn man sich die Bewegung eines Punktes P entlang des Einheitskreises vorstellt, so kann man dies mit Hilfe eines Winkels beschreiben:

- Bei 500° durchläuft der Punkt den Einheitskreis gegen den Uhrzeigersinn einmal komplett und bewegt sich anschließend noch um 140° weiter.
$$500° = 360° + 140°$$




- Bei -60° bewegt sich der Punkt um 60° im Uhrzeigersinn. Betrachtet man die Winkelfunktionen, so kann man -60° mit $\beta' = -60° + 360° = 300°$ darstellen.




- Bei 1100° wird der Einheitskreis dreimal gegen den Uhrzeigersinn komplett durchlaufen:
$$3 \cdot 360° = 1080°$$
In der „vierten" Runde wandert er nun die noch fehlenden 20° weiter.

| Gradmaß | Bogenmaß |
|---|---|
| $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 360°)$<br>$\cos(\alpha) = \cos(\alpha + k \cdot 360°)$<br>$\tan(\alpha) = \tan(\alpha + k \cdot 360°)$ | $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 2\pi)$<br>$\cos(\alpha) = \cos(\alpha + k \cdot 2\pi)$<br>$\tan(\alpha) = \tan(\alpha + k \cdot 2\pi)$ |
| Der Sinus-, Cosinus- bzw. Tangenswert ändert sich nicht, wenn man **volle Winkel** (360° bzw. $2\pi$) zum gegebenen Winkel addiert bzw. subtrahiert. | |

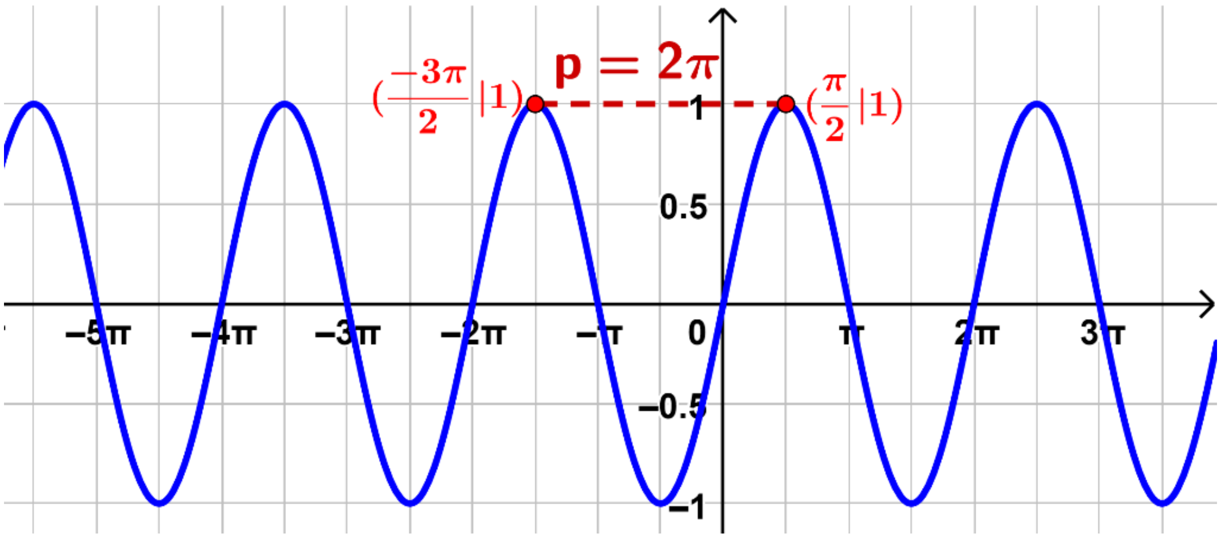
## 2.3 Graph und Eigenschaften der Winkelfunktionen

**Wiederholung:**

- Eine **gerade** Funktion ist symmetrisch bzgl. der y-Achse. Es gilt: $f(x) = f(-x)$
- Eine **ungerade** Funktion ist punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs. Es gilt: $f(x) = -f(-x)$
- Eine Funktion ist **periodisch**, wenn sich der Graph in gleichen Abständen immer wieder genau wiederholt. Es gilt: $f(x) = f(x + p)$ mit der Periode p.

| $\boldsymbol{\alpha}$ | $\mathbf{0}\ \boldsymbol{rad}\ (0°)$ | $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\ \boldsymbol{rad}\ (90°)$ | $\boldsymbol{\pi}\ \boldsymbol{rad}\ (180°)$ | $\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}\ \boldsymbol{rad}\ (270°)$ | $\boldsymbol{2\pi}\ \boldsymbol{rad}\ (360°)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{sin}\ \boldsymbol{\alpha}$ | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| $\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\alpha}$ | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 |

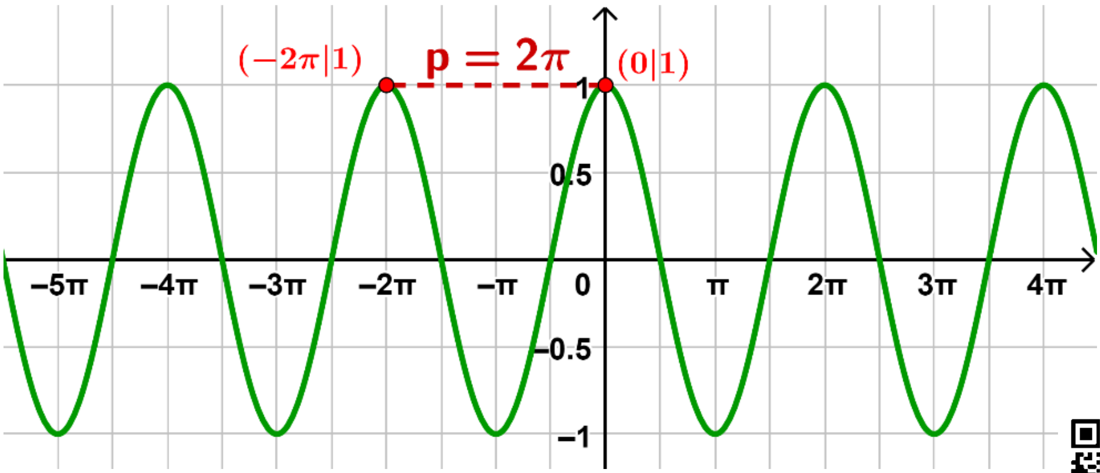
## 2.3.1 Die Sinusfunktion $f(x) = sin(x)$ mit kleinster Periode $p = 2\pi$ - $f: \mathbb{R} \to [-1; 1]$




- **Definitionsmenge**: $D = \mathbb{R}$
- **Wertemenge**: $W = [-1; 1]$
- **Nullstellen**: $\sin(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k \cdot \pi \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Lokale **Maximumstellen**: $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Lokale **Minimumstellen**: $x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Monotonie: **streng monoton steigend** in: $\left[-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\ ;\ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right] \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Monotonie: **streng monoton fallend** in: $\left[\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\ ;\ \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right] \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Symmetrie: **Punktsymmetrisch** zum Ursprung (Ungerade Funktion) – es gilt: $\sin(-x) = -\sin(x)$

Video

### 2.3.2 Die Cosinusfunktion $f(x) = cos(x)$ mit kleinster Periode $p = 2\pi$ - $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$




[Video]

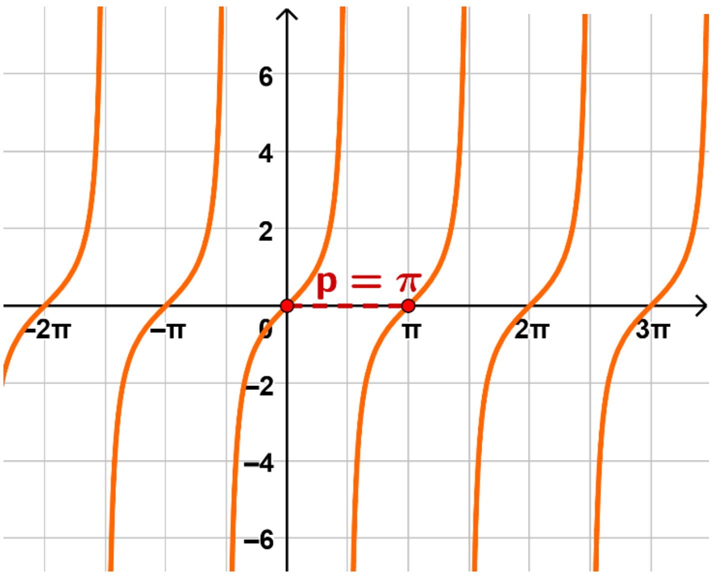
- **Definitionsmenge**: $D = \mathbb{R}$
- **Wertemenge**: $W = [-1; 1]$
- **Nullstellen**: $\cos(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \qquad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Lokale **Maximumstellen**: $x = k \cdot 2\pi \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Lokale **Minimumstellen**: $x = \pi + k \cdot 2\pi \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Monotonie: **streng monoton steigend** in: $[\pi + k \cdot 2\pi\ ;\ 2\pi + k \cdot 2\pi] \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Monotonie: **streng monoton fallend** in: $[k \cdot 2\pi\ ;\ \pi + k \cdot 2\pi] \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Symmetrie: **Symmetrisch** zur y-Achse (Gerade Funktion) – es gilt: $\cos(-x) = \cos(x)$

[Video]

### 2.3.3 Die Tangensfunktion $f(x) = tan\ (x)$ mit kleinster Periode $p = \pi$

Die Tangensfunktion nimmt für $\pm\frac{\pi}{2};\ \pm\frac{3\pi}{2};\ \pm\frac{5\pi}{2}, \dots$ keinen Wert an (nicht definiert -> schaue dir dazu den Einheitskreis an!). Somit ist die Funktion folgendermaßen definiert:

$$f:\ \mathbb{R}\backslash\{\pm\frac{\pi}{2};\ \pm\frac{3\pi}{2};\ \pm\frac{5\pi}{2}; \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$$




- **Definitionsmenge**: $D = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right\} \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- **Wertemenge**: $W = \mathbb{R}$
- **Nullstellen**: $\tan(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = k \cdot \pi \quad mit\ k \in \mathbb{Z}$
- Lokale **Maximumstellen**: *keine*
- Lokale **Minimumstellen**: *keine*
- Monotonie: **streng monoton steigend** in D
- Symmetrie: **Punktsymmetrisch** zum Ursprung (Ungerade Funktion) – es gilt: $\tan(-x) = -\tan\ (x)$

**Bsp. 3)** Zeichne die Winkelfunktion mit Hilfe von Technologie und gib die **Definitionsmenge**, die **Wertemenge**, die **Nullstellen** und **Extremstellen** an. Untersuche die Funktion auch auf **Periodizität**, **Monotonie** und **Symmetrie**. Wie lautet die **kleinste Periode**?

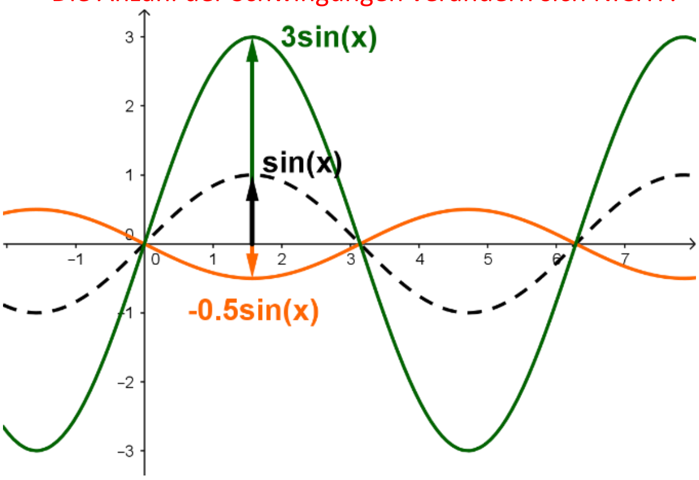
| | |
|---|---|
| a. $f(x) = \sin(3x)$ | b. $f(x) = 3 \cdot \cos(x)$ |
| c. $f(x) = 2 \cdot \sin(4x)$ | d. $f(x) = -2 \cdot \cos(2x)$ |

Video

## 3. Allgemeine Sinusfunktion der Form $f(x) = \boldsymbol{a} \cdot sin\big(\boldsymbol{b} \cdot (x + \boldsymbol{c})\big) + \boldsymbol{d}$

**Parameter a**

- streckt ($a > 1$) bzw. staucht ($0 < a < 1$) den Graph in y-Richtung mit dem Faktor a.
- Ist $a < 0$ -> Graph wird zusätzlich an der x-Achse gespiegelt (bzw. falls $d \neq 0$: an der Gerade $y = d$)
- Die Anzahl der Schwingungen verändern sich NICHT!



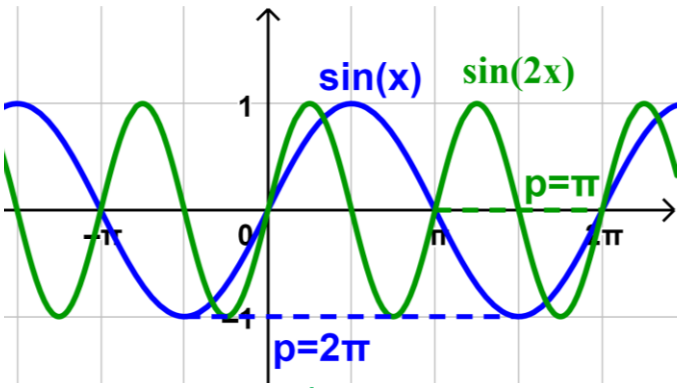

**Parameter b**

- … kann die Anzahl der Perioden/Schwingungen verändern! Der Parameter b gibt die Anzahl der Schwingungen im Intervall $[0; 2\pi]$ an.

  Der Graph hat die kleinste Periode $p = \frac{2\pi}{|b|}$.

  ⇨ Ist $b = 1$: $p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ (übliche Periode!)

  ⇨ Ist $b = 2$: $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$ (Doppelt so viele Schwingungen!)




⇨ Ist $b = 0{,}5$: $p = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi$

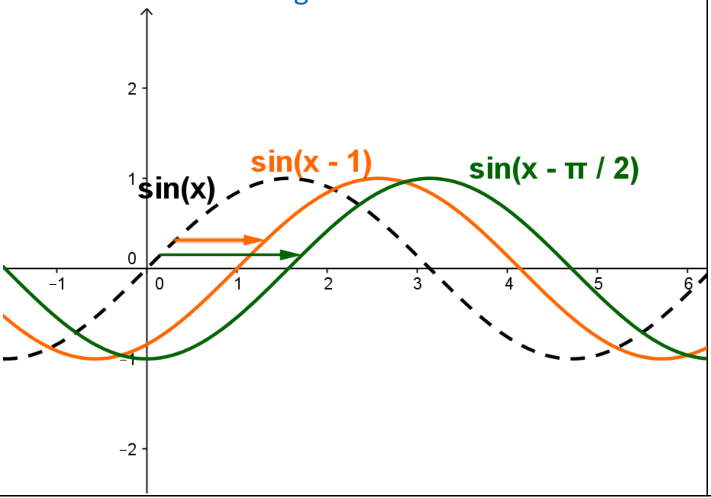
**Parameter c**

**Parameter d**

... verursacht eine Verschiebung des Funktionsgraphen in x-Richtung.

$c > 0$ : Verschiebung um c nach **links**

$c < 0$ : Verschiebung um c nach **rechts**

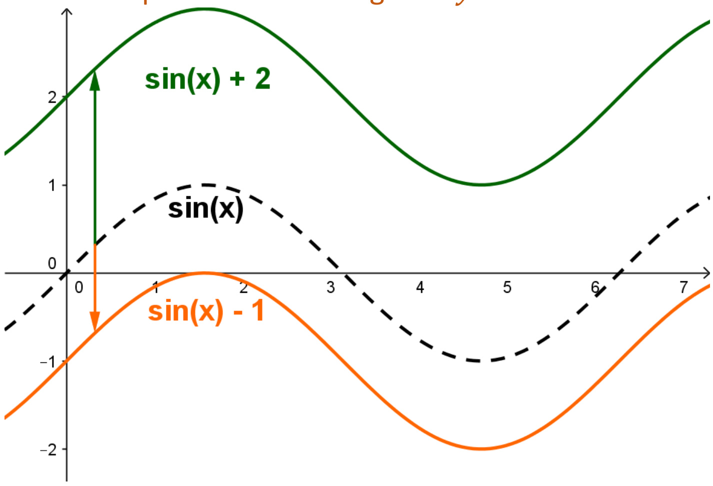



... verschiebt den Graph in y-Richtung.

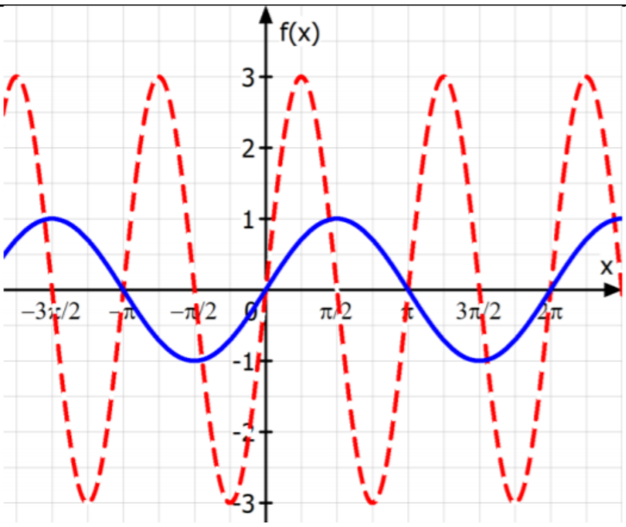
$d > 0$: Verschiebung um d nach **oben**

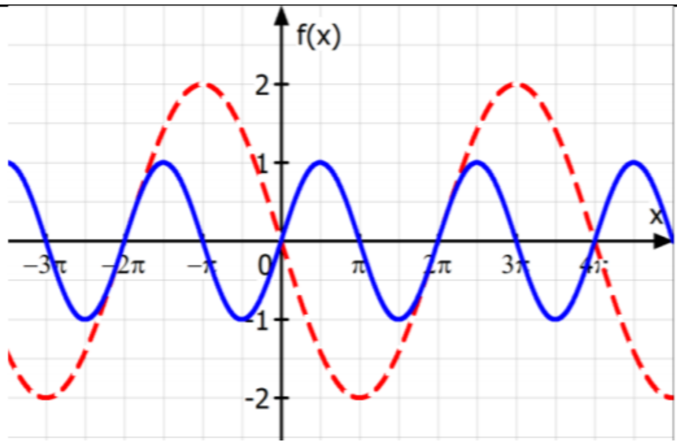
$d < 0$: Verschiebung um d nach **unten**

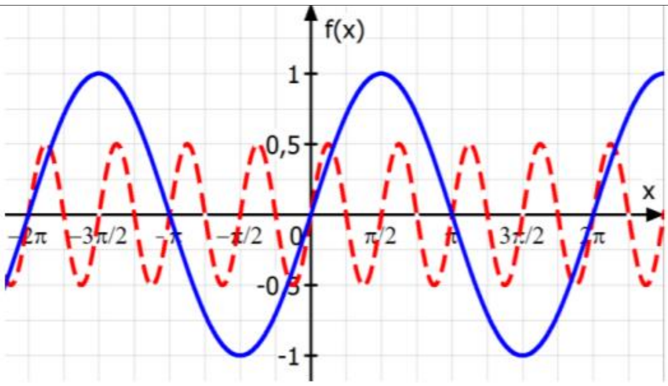
Der Graph hat die Ruhelage bei $y = d$

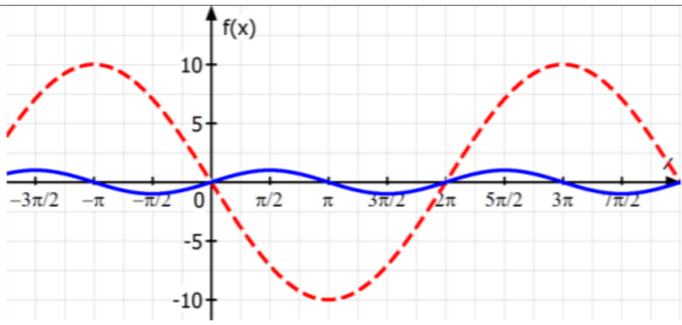


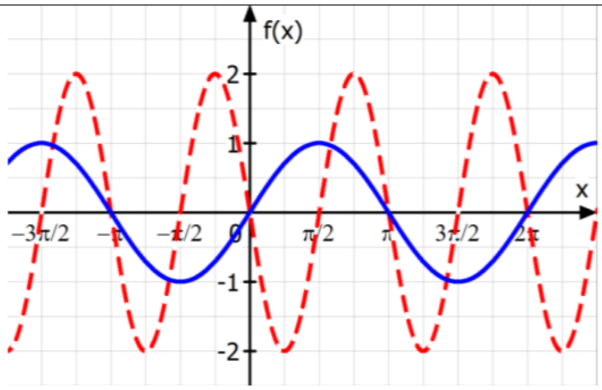

**Bsp. 4)** Gegeben sind der Graph der Sinusfunktion (blau) und der Graph einer allgemeinen Sinusfunktion (strichliert) der Form $f(x) = a \cdot sin\,(b \cdot x)$. Bestimme die Parameter a und b

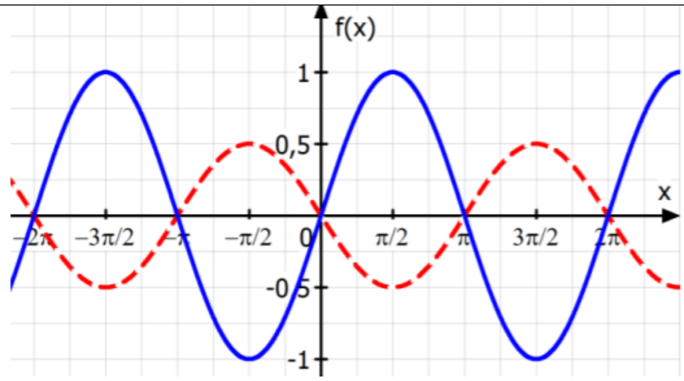


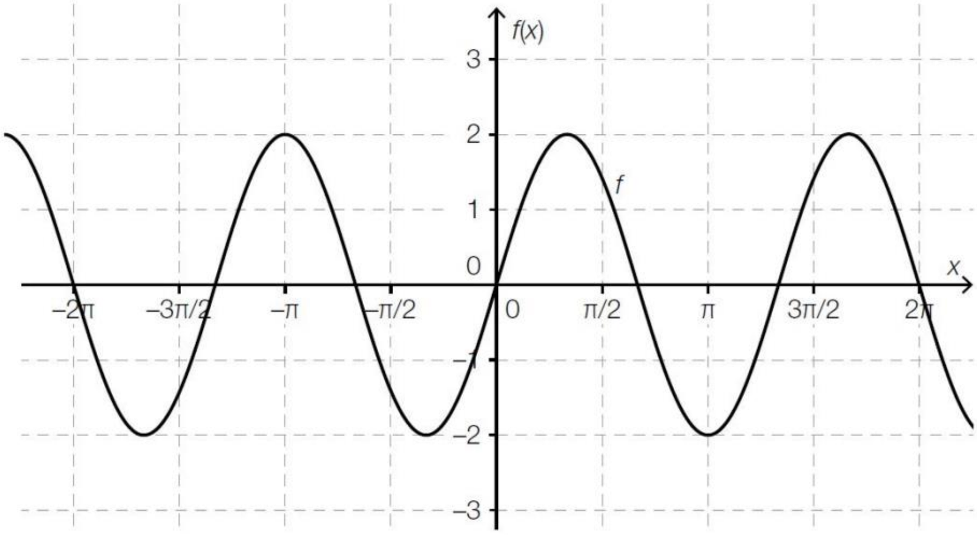






**Parameter einer Sinusfunktion* - 1_601, FA6.1, Halboffenes Antwortformat**

Gegeben ist der Graph einer Funktion $f$ mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$.



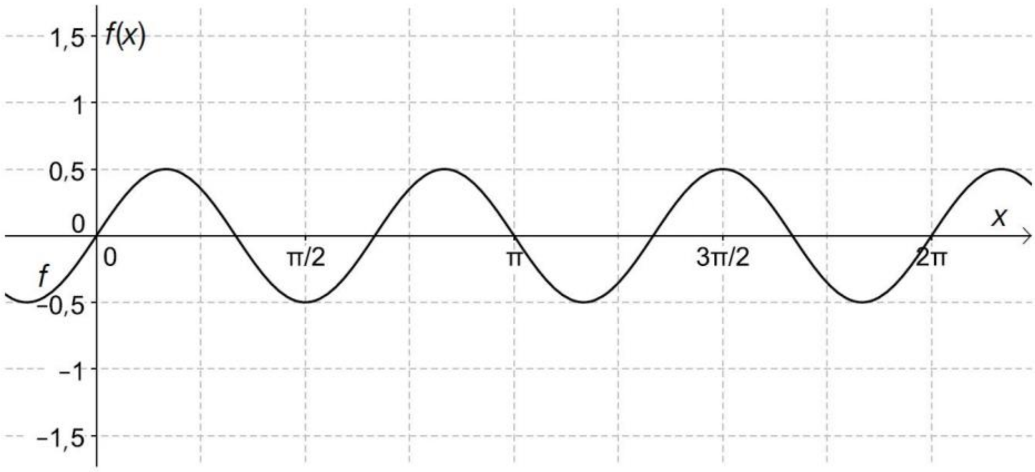

Geben Sie die für den abgebildeten Graphen passenden Parameterwerte $a$ und $b$ an!

$a$ = ______________________________

$b$ = ______________________________

### Sinusfunktion* - 1_410, FA6.1, Halboffenes Antwortformat

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion $f$ mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.




Geben Sie die für den abgebildeten Graphen passenden Parameterwerte von $f$ an!

$a =$ ______________________________

$b =$ ______________________________

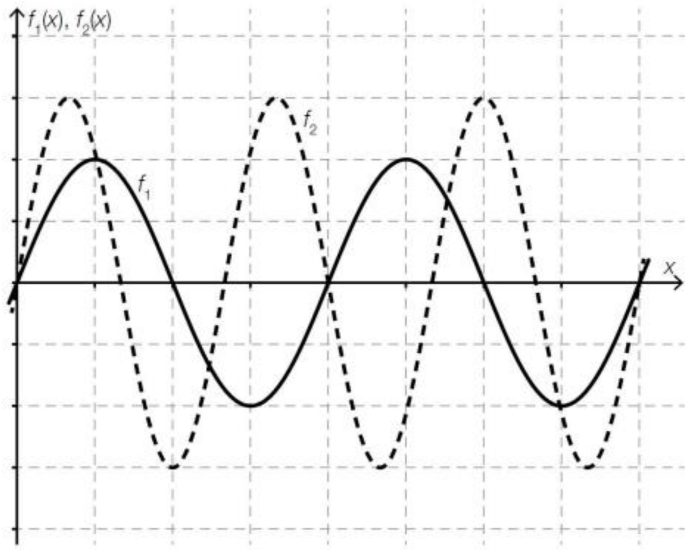
### Periodizität* - 1_577, FA6.4, 1 aus 6

Gegeben ist eine reelle Funktion $f$ mit der Funktionsgleichung $f(x) = 3 \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $b \in \mathbb{R}$. Einer der nachstehend angegebenen Werte gibt die (kleinste) Periodenlänge der Funktion $f$ an. Kreuzen Sie den zutreffenden Wert an!

| | |
|---|---|
| $\frac{b}{2}$ | ☐ |
| $b$ | ☐ |
| $\frac{b}{3}$ | ☐ |
| $\frac{\pi}{b}$ | ☐ |
| $\frac{2\pi}{b}$ | ☐ |
| $\frac{\pi}{3}$ | ☐ |

### Graphen zweier Winkelfunktionen* - 1_697, FA6.3, Lückentext

Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = a_1 \cdot \sin(b_1 \cdot x)$ sowie $f_2(x) = a_2 \cdot \sin(b_2 \cdot x)$ mit $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$.




Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

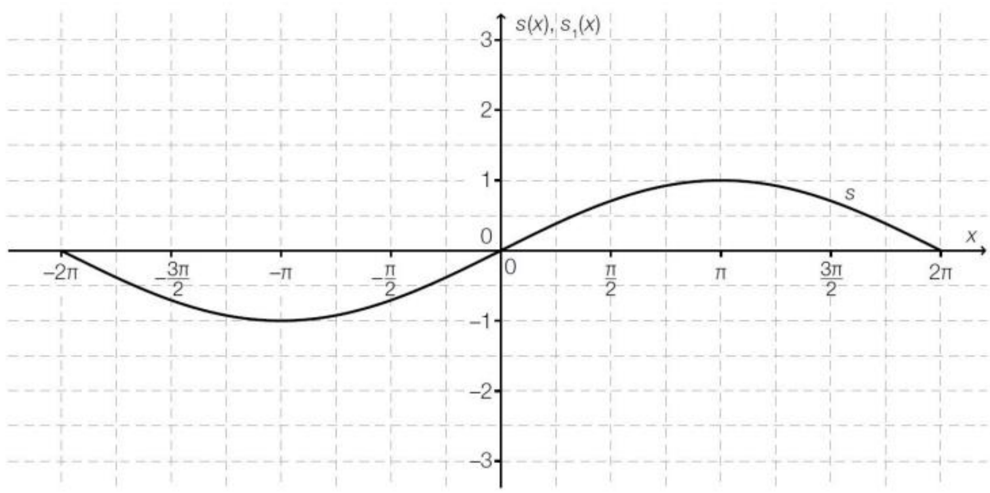
Für die Parameterwerte gilt ______①______ und ______②______.

| ① | |
|---|---|
| $a_2 < a_1$ | ☐ |
| $a_1 \leq a_2 \leq 2 \cdot a_1$ | ☐ |
| $a_2 > 2 \cdot a_1$ | ☐ |

| ② | |
|---|---|
| $b_2 < b_1$ | ☐ |
| $b_1 \leq b_2 \leq 2 \cdot b_1$ | ☐ |
| $b_2 > 2 \cdot b_1$ | ☐ |

### Parameter einer Sinusfunktion* - 1_458, FA6.3, Konstruktionsformat

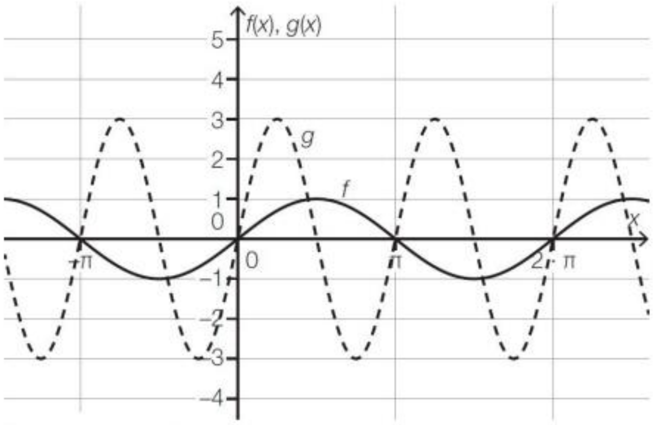
Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $s$ mit der Gleichung $s(x) = c \cdot \sin(d \cdot x)$ mit $c, d \in \mathbb{R}^+$ im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$.




Erstellen Sie im obigen Koordinatensystem eine Skizze eines möglichen Funktionsgraphen der Funktion $s_1$ mit $s_1(x) = 2c \cdot \sin(2d \cdot x)$ im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$!

## Parameter einer Sinusfunktion* - 1_386, FA6.3, 2 aus 5

Die unten stehende Abbildung zeigt die Graphen von zwei Sinusfunktionen $f$ und $g$ der Form $a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+\backslash\{0\}$.

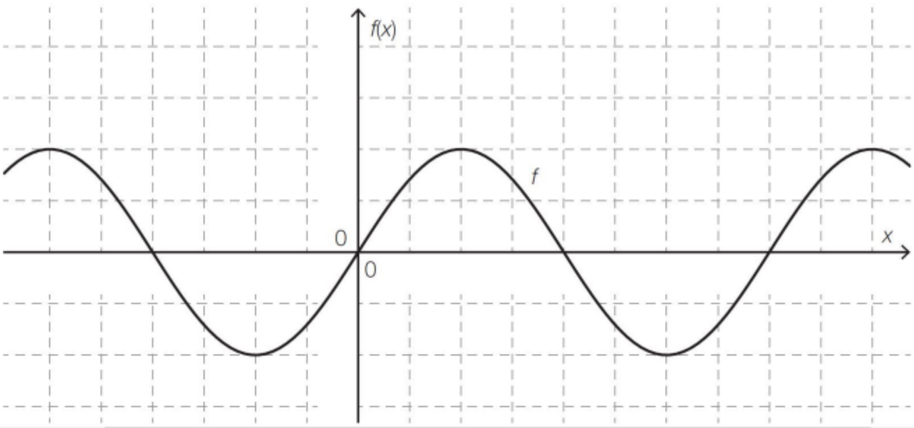



Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

| | |
|---|---|
| Der Parameter $a$ ist bei $f$ dreimal so groß wie bei $g$. | ☐ |
| Würde man den Parameter $b$ bei $f$ verdreifachen, so wäre der neue Graph mit jenem von $g$ deckungsgleich. | ☐ |
| Für den Parameter $b$ von $f$ gilt: $b = 1$. | ☐ |
| Der Parameter $b$ ist bei $g$ doppelt so groß wie bei $f$. | ☐ |
| Eine Veränderung des Parameters $a$ bewirkt eine Verschiebung des Graphen der Funktion in senkrechter Richtung. | ☐ |

## Sinusfunktion* - 1_745, FA6.3, Konstruktionsformat

Gegeben ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{b}\right)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$.
Ergänzen Sie in der nachstehenden Abbildung $a$ und $b$ auf der jeweils entsprechenden Achse so, dass der abgebildete Graph dem Graphen der Funktion $f$ entspricht.



**Sinusfunktion* - 1_625, FA6.3, Halboffenes Antwortformat**

Für $a, b \in \mathbb{R}^+$ sei die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Die beiden nachstehenden Eigenschaften der Funktion $f$ sind bekannt:

- Die (kleinste) Periode der Funktion $f$ ist $\pi$.
- Die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Funktionswert von $f$ beträgt 6.

Geben Sie $a$ und $b$ an!

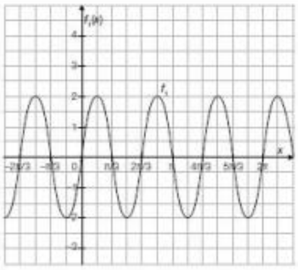
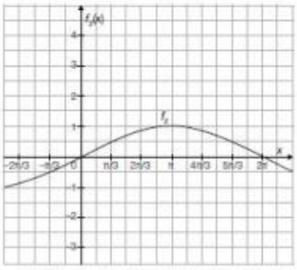
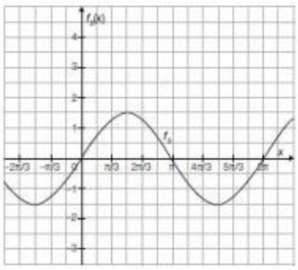
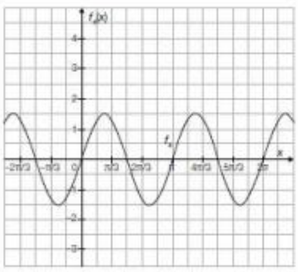
$a =$ ____________

$b =$ ____________

**Sinusfunktion* - 1_434, FA6.3, Zuordnungsformat**

Gegeben sind die Graphen von vier Funktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

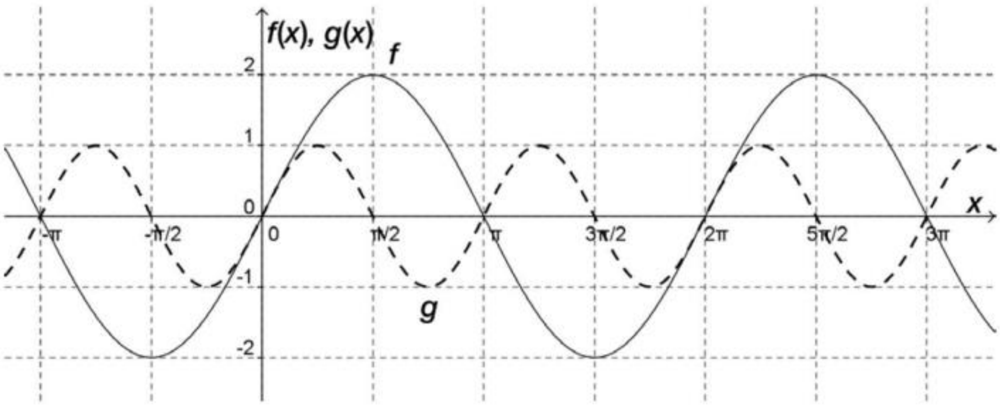
Ordnen Sie jedem Graphen den dazugehörigen Funktionsterm (aus A bis F) zu!

| | |
|---|---|
|  | |
|  | |
|  | |
|  | |

| | |
|---|---|
| A | $\sin(x)$ |
| B | $1{,}5 \cdot \sin(x)$ |
| C | $\sin(0{,}5x)$ |
| D | $1{,}5 \cdot \sin(2x)$ |
| E | $2 \cdot \sin(0{,}5x)$ |
| F | $2 \cdot \sin(3x)$ |

**Sinusfunktion* - 1_338, FA6.3, Lückentext**

Im unten stehenden Diagramm sind die Graphen zweier Funktionen $f$ und $g$ dargestellt.




Die Funktion $f$ hat die Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit den reellen Parametern $a$ und $b$. Wenn diese Parameter in entsprechender Weise verändert werden, erhält man die Funktion $g$.

Wie müssen die Parameter $a$ und $b$ verändert werden, um aus $f$ die Funktion $g$ zu erhalten?

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Um den Graphen von $g$ zu erhalten, muss $a$ ______①______ und $b$ ______②______.

| ① | |
|---|---|
| verdoppelt werden | ☐ |
| halbiert werden | ☐ |
| gleich bleiben | ☐ |

| ② | |
|---|---|
| verdoppelt werden | ☐ |
| halbiert werden | ☐ |
| gleich bleiben | ☐ |

**Periodische Funktion* - 1_506, FA6.4, Halboffenes Antwortformat**

Gegeben ist die periodische Funktion $f$ mit der Funktionsgleichung $f(x) = \sin(x)$.
Geben Sie die kleinste Zahl $a > 0$ (Maßzahl für den Winkel in Radiant) so an, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(x + a) = f(x)$ gilt!

$a =$ __________ rad

**Periodenlänge* - 1_721, FA6.4, Halboffenes Antwortformat**

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{3} \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi}{4} \cdot x\right)$.
Bestimmen Sie die Länge der (kleinsten) Periode $p$ der Funktion $f$.

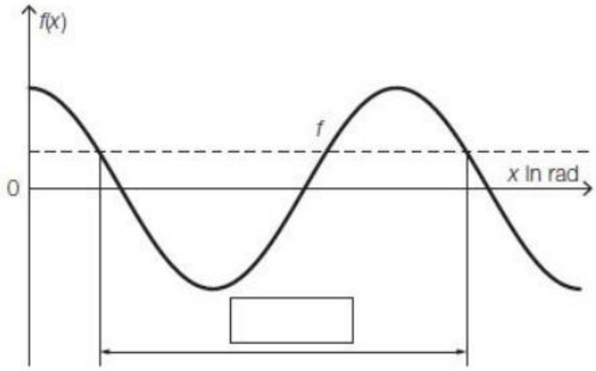
$p =$ ____________________________________________

**Baumhaus (c) - 2_095, FA6.4 AG4.2, Halboffenes Antwortformat Konstruktionsformat**

Eine Familie plant, ein Baumhaus aus Holz zu errichten. Der Baum dafür steht in einem horizontalen Teil des Gartens.

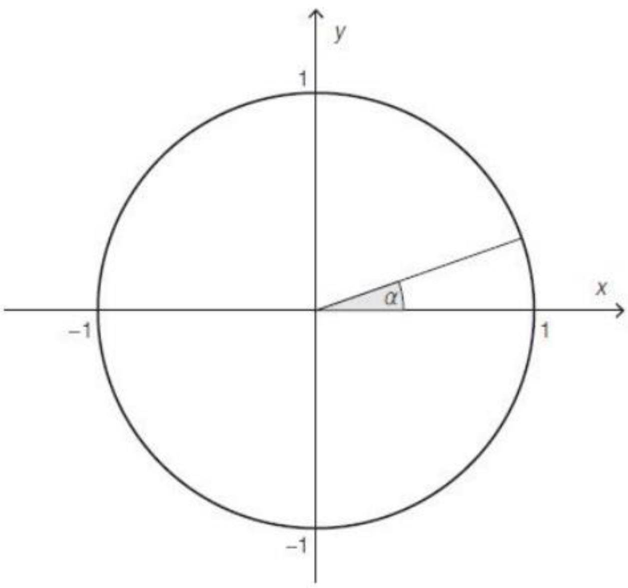
c) Das Baumhaus wird mit gewellten Kunststoffplatten überdacht.

Dem Querschnitt liegt der Graph der Funktion $f$ mit $f(x) = \cos(x)$ zugrunde. Dieser ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.




1) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

In der nachstehenden Abbildung ist ein Winkel $\alpha$ im Einheitskreis dargestellt.




2) Zeichnen Sie im obigen Einheitskreis denjenigen Winkel $\beta$ ein, für den gilt:
$\sin(\beta) = \sin(\alpha)$ mit $\beta \neq \alpha$ und $0° \leq \beta \leq 360°$.

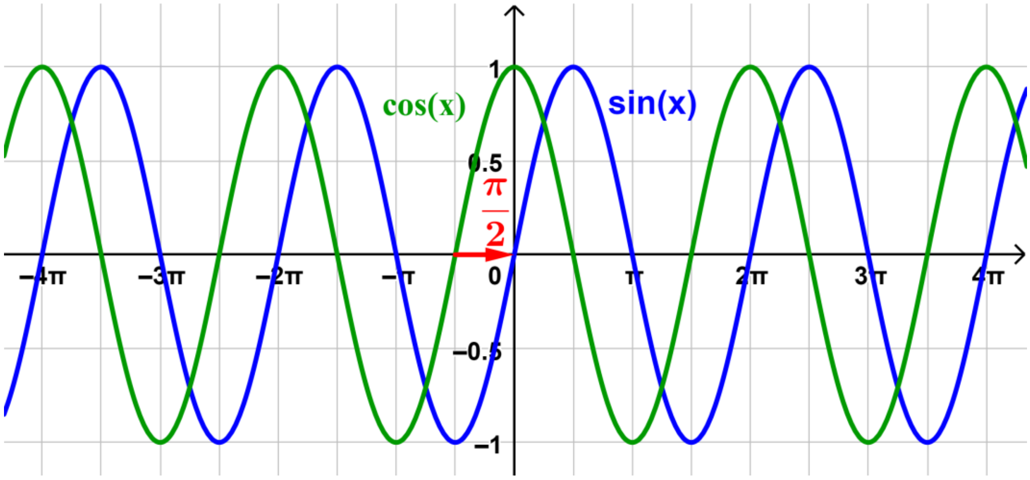
## Zusammenhang: Sinus- und Cosinusfunktion

- Der Graph der Sinusfunktion entspricht dem Graphen der Cosinusfunktion, wenn man diesen Graph um $\frac{\pi}{2}$ parallel zur x-Achse nach rechts verschiebt. Es gilt:

$$\boldsymbol{sin(x) = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$$

- Der Graph der Cosinusfunktion entspricht dem Graphen der Sinusfunktion, wenn man diesen Graph um $\frac{\pi}{2}$ parallel zur x-Achse nach links verschiebt. Es gilt:

$$\boldsymbol{cos(x) = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$$




**Winkelfunktion* - 1_817, FA6.5, Halboffenes Antwortformat**

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3 \cdot \cos(x)$. Diese Funktion soll in der Form $x \mapsto a \cdot \sin(x + b)$ dargestellt werden ($a, b \in \mathbb{R}$).
Geben Sie für $a$ und $b$ jeweils einen passenden Wert an.

$a$ = ______________________________

$b$ = ______________________________

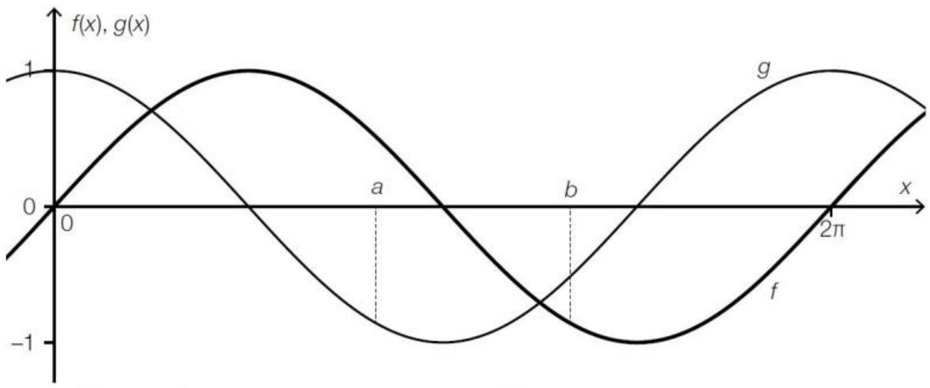
**Winkelfunktionen* - 1_530, FA6.5, Offenes Antwortformat**

Gegeben sind die Funktionen $f$ und $g$ mit $f(x) = -\sin(x)$ bzw. $g(x) = \cos(x)$.
Geben Sie an, um welchen Wert $b \in [0; 2\pi]$ der Graph von $f$ verschoben werden muss, um den Graphen von $g$ zu erhalten, sodass $-\sin(x + b) = \cos(x)$ gilt!

**Winkelfunktionen* - 1_673, FA6.5, Offenes Antwortformat**

In der unten stehenden Abbildung sind die Graphen der Funktionen $f$ und $g$ mit den Funktionsgleichungen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ dargestellt.

Für die in der Abbildung eingezeichneten Stellen $a$ und $b$ gilt: $\cos(a) = \sin(b)$.



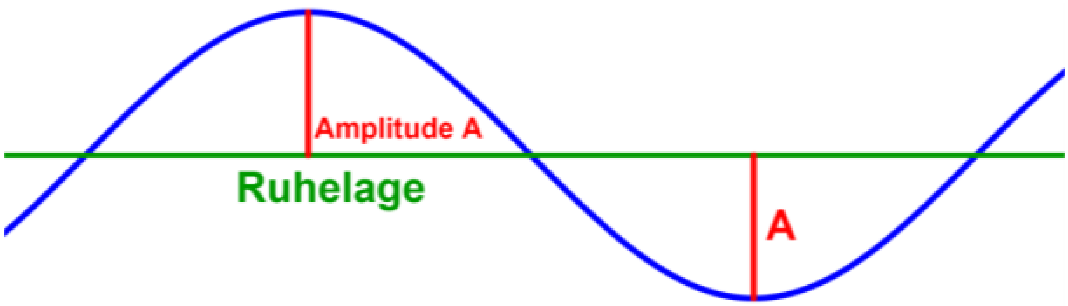

Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$ so, dass $b - a = k \cdot \pi$ gilt!

Video

## 4. Harmonische Schwingungen $s(t) = A \cdot sin(\omega \cdot (t + \varphi_0))$

Unter einem Federpendel versteht man einen an einer Feder befestigten Körper, der um eine Ruhelage schwingt. Trägt man die Abstände des Körpers $s(t)$ von der Ruhelage entlang einer Zeitachse auf, so entstehen Sinusschwingungen. Dies kann mit Hilfe der allgemeinen Sinusfunktion beschrieben werden. Die Parameter a, b und c bekommen im physikalischen Kontext spezielle Bezeichnungen:

$$\text{Aus } f(x) = a \cdot sin(b \cdot (x + c)) \ wird \ s(t) = A \cdot sin(\omega \cdot (t + \varphi_0))$$




| Begriff | Pendelbewegung | Einheit |
|---|---|---|
| **Ruhelage** | Die Ruhelage ist derjenige Funktionswert, um den die Funktion (bildlich gesprochen) „schwingt". Sie liegt in der Mitte zwischen dem höchsten und niedrigsten Funktionswert. | |
| **t… Zeit** | beschreibt die vergangene Zeit seit Beginn der Beobachtung | 1s |
| **s(t)… Elongation in Meter (m)** | beschreibt den Abstand des schwingenden Körpers (in Meter) zur Ruhelage zum Zeitpunkt t | 1m |
| **A … Amplitude in (m)** | größte Entfernung des schwingenden Körpers von der Ruhelage (=größte Auslenkung) | 1m |

| | | |
|---|---|---|
| $\omega$ **… Kreisfrequenz** | Anzahl der Schwingungen bzw. Perioden im Intervall $[0; 2\pi]$ | |
| $\varphi_0$ **… Phasenverschiebungszeit** | Verschiebung des Graphen um $\varphi_0$ Sekunden nach links. | |
| **Schwingungsdauer T (in sek)** | Zeitdauer einer (vollen) Schwingung | 1s |
| **Frequenz f** | Zahl der Schwingungen pro Sekunde | 1 Hz (Hertz) = $1s^{-1}$ |

**<u>Zusammenhang: Schwingungsdauer und Frequenz</u>**

Für der schwingende Körper f Schwingungen in einer Sekunde aus, dann dauert eine Schwingung $\frac{1}{f}$ Sekunden. Daraus folgt:

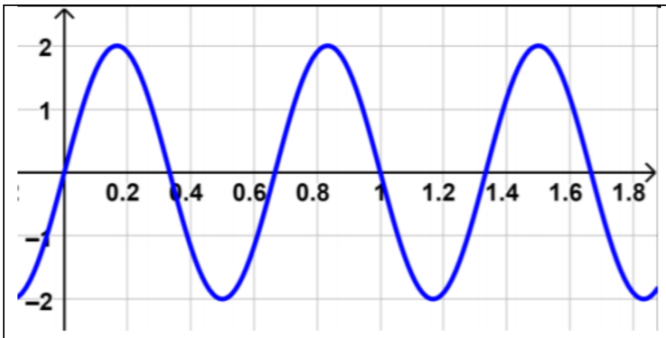
$$T = \frac{1}{f} \qquad und \qquad f = \frac{1}{T}$$

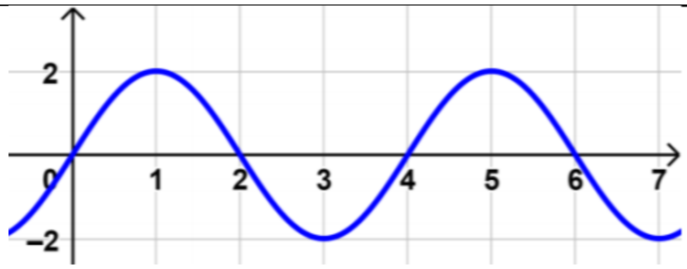
**<u>Zusammenhang: Frequenz und Kreisfrequenz</u>**

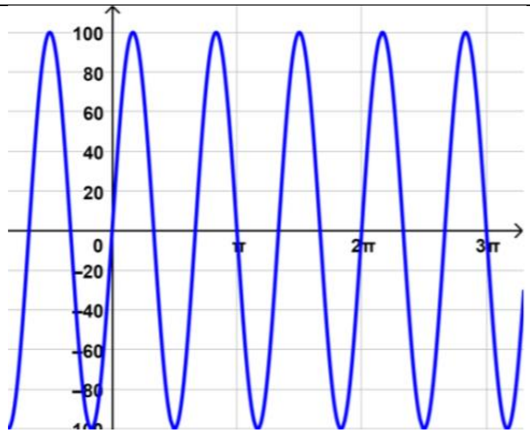
Pro Sekunde legt der Körper außerdem $f = \frac{\omega}{2\pi}$ Schwingungen zurück, da $\omega$ die Anzahl der Schwingungen in $2\pi$ Sekunden angibt.

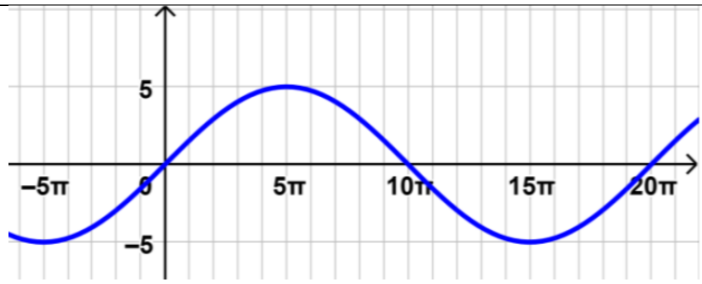
$$f = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow \omega = 2\pi f$$

**Bsp. 5)** Der Graph einer harmonischen Schwingung der Form $s(t) = A \cdot sin(\omega \cdot (t + \varphi_0))$ ist dargestellt. Bestimme die **Amplitude**, die **Schwingungsdauer**, die **Frequenz** und die **Kreisfrequenz** der Schwingung (t in s, s(t) in m). Gib die **Funktionsgleichung** an.



**Bsp. 6)** Gegeben ist die Funktionsgleichung einer harmonischen Schwingung ($s(t)$ $in$ $m$, $t$ $in$ $s$). Gib die **Amplitude** A, die **Kreisfrequenz** $\omega$, die **Frequenz** f und die **Schwingungsdauer** T an.

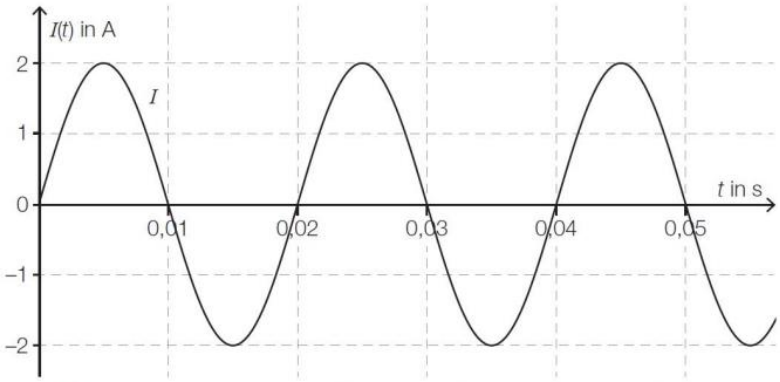
| | |
|---|---|
| **a.** $s(t) = 3 \cdot sin\,(13t)$ | **b.** $s(t) = 8 \cdot sin\,(5t)$ |
| **c.** $s(t) = 4 \cdot sin\,(2 \cdot (t+2))$ | **d.** $s(t) = 1{,}5 \cdot sin\,(3 \cdot (t-4))$ |

**Bsp. 7)** Beschreibe, wie sich die Amplitude, die Schwingungsdauer bzw. die Frequenz einer Schwingung ändert, wenn man von der Elongation $s_1(t)$ zur Elongation $s_2(t)$ übergeht. Skizziere die beiden Graphen im Intervall [0; $2\pi$] mit der freien Hand in einem gemeinsamen Koordinatensystem. Kontrolliere mit GeoGebra.

| |
|---|
| **a.** $\mathrm{s_1(t) = sin(t)}$ $\qquad$ $\mathrm{s_2\,(t) = 3 \cdot sin(4t)}$ |
| **b.** $\mathrm{s_1(t) = sin(t)}$ $\qquad$ $\mathrm{s_2\,(t) = 0{,}5 \cdot sin(0{,}25t)}$ |

**Wechselstrom* - 1_793, FA6.4, Halboffenes Antwortformat**

Bei sinusförmigem Wechselstrom ändert sich der Wert der Stromstärke periodisch.
In der nachstehenden Abbildung ist die Stromstärke $I(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit $t$ für einen sinusförmigen Wechselstrom dargestellt ($t$ in s, $I(t)$ in A).



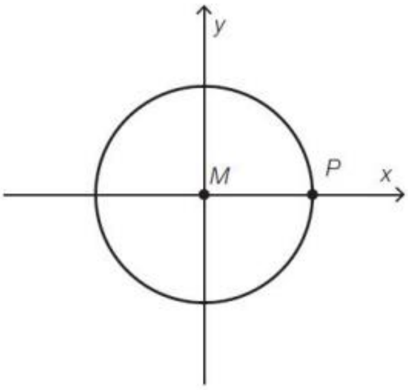

Geben Sie den Maximalwert der Stromstärke und die (kleinste) Periodenlänge dieses sinusförmigen Wechselstroms an.

Maximalwert: _______________ A

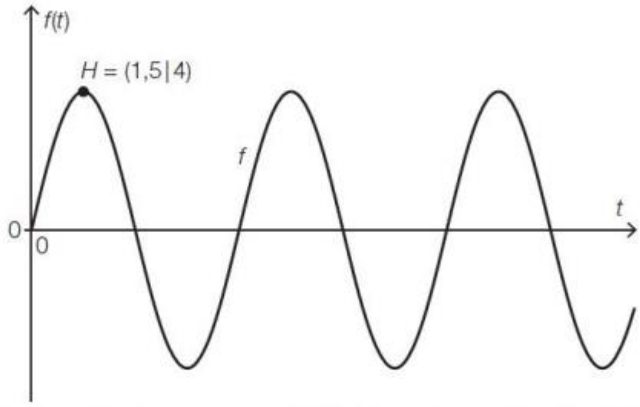
(kleinste) Periodenlänge: _______________ s

**Bewegung auf einem Kreis* - 1_769, FA6.2, Halboffenes Antwortformat**

Ein Punkt $P$ bewegt sich auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $M = (0|0)$ mit konstanter Geschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn.
Zu Beginn der Bewegung (zum Zeitpunkt $t = 0$) liegt der Punkt $P$ auf der positiven $x$-Achse wie in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.




Die Funktion $f$ ordnet der Zeit $t$ die zweite Koordinate $f(t) = a \cdot \sin(b \cdot t)$ des Punktes $P$ zur Zeit $t$ zu ($t$ in s, $f(t)$ in dm, $a, b \in \mathbb{R}^+$). Der in der nachstehenden Abbildung dargestellte Graph von $f$ verläuft durch den Punkt $H$, wobei gilt: $f'(1,5) = 0$.




Ermitteln Sie den Radius des Kreises und die Umlaufzeit des Punktes $P$ (für eine Umrundung).

Radius des Kreises: ___________ dm

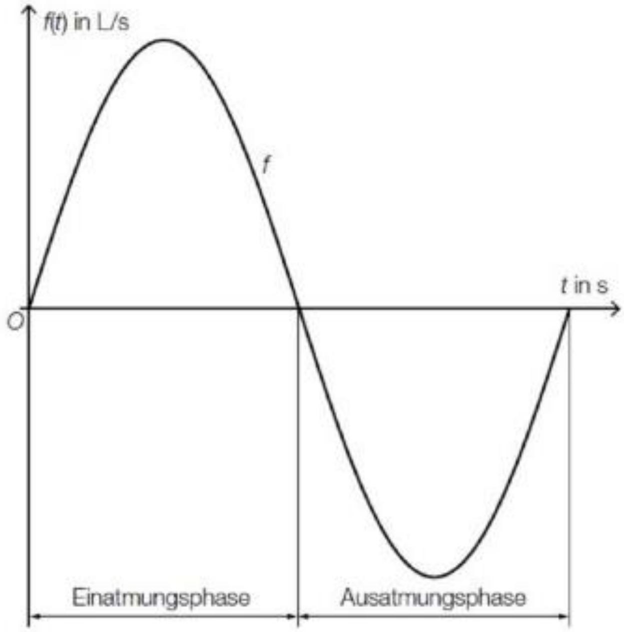
Umlaufzeit: ___________ s

**Atemstromstärke* (a) - 2_112, FA1.7 FA6.2, Halboffenes Antwortformat**

Unter *Atemstromstärke* versteht man die pro Zeiteinheit ein- bzw. ausgeatmete Luftmenge. Sie wird modellhaft durch die Funktion $f$ in Abhängigkeit von der Zeit $t$ beschrieben ($t$ in s, $f(t)$ in L/s).

Für die Atemstromstärke von Mathias gilt modellhaft:
$f(t) = 0{,}5 \cdot \sin(1{,}25 \cdot t)$

Ein Atemzyklus besteht aus einer vollständigen Einatmungsphase und einer vollständigen Ausatmungsphase. Die Beobachtung beginnt bei $t = 0$.
In der nachstehenden Abbildung ist ein Atemzyklus dargestellt.




a) In der Ausatmungsphase des betrachteten Atemzyklus von Mathias hat die Funktion $f$ an der Stelle $t_1$ eine Extremstelle.

1) Ermitteln Sie $t_1$ (in s).

$t_1$ = ______________________ s

Im betrachteten Atemzyklus gibt $t_2$ mit $t_2 > 0$ denjenigen Zeitpunkt an, zu dem das Luftvolumen in der Lunge von Mathias erstmals nach Beginn des Atemzyklus minimal ist.

2) Ermitteln Sie $t_2$ (in s).

$t_2$ = ______________________ s

## Töne* - 1_1190, FA6.3, Lückentext

Die Funktionen $f$, $g$ und $h$ beschreiben jeweils in Abhängigkeit von der Zeit $t$ (in Sekunden) Schwingungen, die Töne erzeugen.

Dabei gilt:

$f(t) = \sin(600 \cdot t)$

$g(t) = \frac{5}{4} \cdot \sin(800 \cdot t)$

$h(t) = \frac{6}{5} \cdot \sin(500 \cdot t)$

Die Lautstärke eines Tons ist umso höher, je größer die Amplitude (maximale Auslenkung) der zugehörigen Schwingung ist.
Ein Ton ist umso höher, je höher die Frequenz (Anzahl der Schwingungen pro Sekunde) der zugehörigen Schwingung ist.
Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Die Schwingung, die den Ton mit der höchsten Lautstärke erzeugt, wird durch die Funktion _____①_____ beschrieben;
die Schwingung, die den tiefsten Ton erzeugt, wird durch die Funktion _____②_____ beschrieben.

| ① | |
|---|---|
| $f$ | ☐ |
| $g$ | ☐ |
| $h$ | ☐ |

| ② | |
|---|---|
| $f$ | ☐ |
| $g$ | ☐ |
| $h$ | ☐ |