Grundkompetenz FA5 Exponentialfunktionen

Beispiele aus Maturaterminen 2023-24 (AHS, BHS, Kompensationsprüfungen AHS)

TYP-1:

Aufrufe eines Videos

Ein Video wurde auf eine Internetplattform hochgeladen. Zu Beginn der Beobachtung waren 500 Aufrufe zu verzeichnen. Im Zeitintervall $[0; t_1]$ wird die Anzahl der bisher erfolgten Aufrufe durch eine Exponentialfunktion beschrieben.

In der nachstehenden Tabelle sind Wertepaare dieser Exponentialfunktion angegeben.

Zeit nach Beginn der Beobachtung in h	Anzahl der Aufrufe
0	500
1	700
2	980
3	1372
t_1	10330

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie t_1.

Exponentialfunktionen

Gegeben ist eine Exponentialfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ und $b \neq 1$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf jede Exponentialfunktion der oben angeführten Form zutreffen. *[2 aus 5]*

f hat keine Nullstellen.	☐
f ist streng monoton steigend.	☐
f hat mindestens eine lokale Extremstelle.	☐
Der Graph von f ist positiv gekrümmt (linksgekrümmt).	☐
Der Graph von f nähert sich für $x \to \infty$ der positiven x-Achse.	☐

Verdoppelungszeit

Die jeweilige Anzahl der Bakterien von sechs Bakterienkulturen wächst exponentiell. Dabei ist die jeweilige Verdoppelungszeit unterschiedlich.

Die Anzahl der Bakterien der jeweiligen Bakterienkultur wird in Abhängigkeit von der Zeit t durch $N_i\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+, t \mapsto N_i(t)$ mit $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ modelliert (t in Stunden).

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Aussagen über die Verdoppelungszeiten jeweils die zugehörige Funktionsgleichung aus A bis F zu.

Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich 1-mal pro Stunde.	
Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich 2-mal pro Stunde.	
Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich 3-mal pro Stunde.	
Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich 4-mal pro Stunde.	

A	$N_1(t) = N_1(0) \cdot 1{,}5^t$
B	$N_2(t) = N_2(0) \cdot 4^t$
C	$N_3(t) = N_3(0) \cdot 2^t$
D	$N_4(t) = N_4(0) \cdot 16^t$
E	$N_5(t) = N_5(0) \cdot 3^t$
F	$N_6(t) = N_6(0) \cdot 8^t$

Jahreszinssatz

Das Kapital K_0 wächst exponentiell mit dem gleichbleibenden Jahreszinssatz i.
Nach n Jahren erreicht das Kapital den Wert K_n, der mit der nachstehenden Formel berechnet werden kann.

$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$ mit $n \in \mathbb{N}$

Nach 6 Jahren hat das Kapital K_0 um insgesamt 8,62 % zugenommen.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Jahreszinssatz i.

Baumhöhe

Die Höhe eines bestimmten Baumes kann in den ersten 15 Jahren nach dem Einpflanzen durch eine Exponentialfunktion modelliert werden.

Dieser Baum hat 10 Jahre nach dem Einpflanzen eine Höhe von 2,2 m und 15 Jahre nach dem Einpflanzen eine Höhe von 2,7 m.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Höhe dieses Baumes zum Zeitpunkt des Einpflanzens.

Grippeerkrankungen

Am Abend des 10. Februar 2019 waren in einem bestimmten Land 2000 Personen an Grippe erkrankt, am Abend des 21. Februar 2019 waren es 4000 Personen. Modellhaft wird angenommen, dass in diesem Land im Februar 2019 die Anzahl der an Grippe erkrankten Personen von Tag zu Tag um den gleichen Prozentsatz gestiegen ist.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie diesen Prozentsatz.

Halbwertszeit

Die Halbwertszeit einer bestimmten radioaktiven Substanz beträgt T Jahre.
Die nach t Jahren vorhandene Menge der radioaktiven Substanz wird mit $m(t)$ bezeichnet.
Es gilt: $m(0) > 0$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an. *[2 aus 5]*

$m(T) = \frac{1}{2} \cdot m(0)$	☐
$m(2 \cdot T) = 0$	☐
$m(3 \cdot T) = \frac{7}{8} \cdot m(0)$	☐
$m(4 \cdot T) = \frac{1}{4} \cdot m(T)$	☐
$m(5 \cdot T) = \frac{1}{2} \cdot m(4 \cdot T)$	☐

BHS – Beispiele:

https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM

Käse

a) Bei der Herstellung von Käse werden verschiedene Enzyme verwendet.

Die Masse eines bestimmten Enzyms nimmt mit der Zeit exponentiell ab.

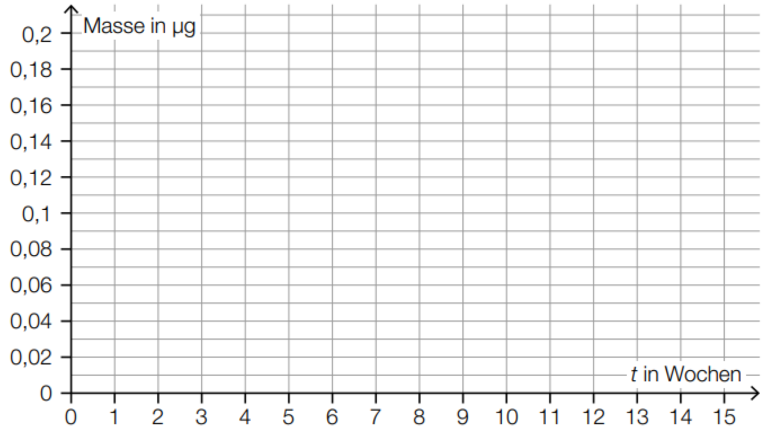
Zu Beginn der Beobachtung ($t = 0$) betrug die Masse 0,19 µg, nach 15 Wochen betrug die Masse 0,06 µg.

Die Masse des Enzyms in µg soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Wochen näherungsweise durch die Exponentialfunktion f beschrieben werden.

1) Stellen Sie eine Gleichung der Exponentialfunktion f auf. *[0/1 P.]*

2) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Exponentialfunktion f im Intervall [0; 15] ein. *[0/1 P.]*

2) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Exponentialfunktion f im Intervall [0; 15] ein. *[0/1 P.]*



Zum Volumen eines anderen Enzyms wurden die nachstehenden Daten ermittelt.

Zeit in Wochen	0	2	15
Volumen in ml	0,040	0,033	0,034

3) Begründen Sie anhand der Daten aus der obigen Tabelle, warum das Volumen in Abhängigkeit von der Zeit <u>nicht</u> durch ein lineares Modell beschrieben werden kann. *[0/1 P.]*

Raucherentwöhnung

b) Durch das Rauchen von Zigaretten gelangt Nikotin in den Körper und wird dort abgebaut.

Die zeitliche Entwicklung der Nikotinmenge im Körper kann durch die Funktion N beschrieben werden.

$N(t) = N_0 \cdot a^t$

t ... Zeit seit dem Konsum der letzten Zigarette in h
$N(t)$ ... Nikotinmenge im Körper zur Zeit t in mg
N_0, a ... positive Parameter

Für eine bestimmte Person gilt:
Unmittelbar nach dem Konsum der letzten Zigarette ($t = 0$) befinden sich 20 mg Nikotin im Körper.
2 h später befinden sich noch 9,5 mg Nikotin im Körper.

1) Ermitteln Sie den Parameter a. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Halbwertszeit für den Abbau von Nikotin bei dieser Person. *[0/1 P.]*

Flächenverbauung

b) Die Fläche, die für landwirtschaftliche Nutzung verwendet wird, wird als Agrarfläche bezeichnet. Die zeitliche Entwicklung der Agrarfläche Österreichs kann modellhaft durch die Funktion N beschrieben werden.

$N(t) = N_0 \cdot 0{,}995^t$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für den Beginn des Jahres 2017
$N(t)$ ... Agrarfläche Österreichs zur Zeit t in Hektar
N_0 ... Agrarfläche Österreichs zu Beginn des Jahres 2017 in Hektar

1) Berechnen Sie, nach welcher Zeit gemäß diesem Modell die Agrarfläche Österreichs um 5 % kleiner als zu Beginn des Jahres 2017 sein wird. *[0/1 P.]*

2) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit dem die relative Änderung der Agrarfläche Österreichs für jedes Zeitintervall $[0; T]$ berechnet werden kann. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$-0{,}005 \cdot T$	☐
$1 - 0{,}005^T$	☐
$0{,}995^T$	☐
$0{,}005^T$	☐
$0{,}995^T - 1$	☐

Kompensation AHS

https://www.mathago.at/kompensationspruefung-loesungen/

Jänner 2024, Prüfung 2: Messengerdienste

Messengerdienste

a) Die Anzahl der Personen, die einen neuen Messengerdienst nutzen, kann für einen bestimmten Zeitraum näherungsweise durch die Funktion N beschrieben werden.

$N(t) = 500 \cdot e^{0{,}0007 \cdot t}$

t ... Zeit nach dem Start des Messengerdiensts in Tagen
$N(t)$ ... Anzahl der Personen, die den Messengerdienst zum Zeitpunkt t nutzen, in Millionen

1) Berechnen Sie, wie viele Tage nach dem Start sich die Anzahl der Personen, die den Messengerdienst nutzen, um 2 % erhöht hat.

Jemand stellt die nachstehende Gleichung auf und löst sie.

$1\,000 = 500 \cdot e^{0{,}0007 \cdot t} \quad \Rightarrow \quad t \approx 990$

2) Interpretieren Sie die Lösung dieser Gleichung im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Für einen anderen Messengerdienst gilt:

Der Messengerdienst startet zum Zeitpunkt $t = 0$ mit 1 000 Personen. Jeden Tag wächst die Anzahl der Personen, die diesen Messengerdienst nutzen, um 5 % bezogen auf die jeweilige Anzahl des Vortags.

Die Anzahl der Personen, die diesen Messengerdienst nutzen, soll in Abhängigkeit von der Zeit t durch die Exponentialfunktion A beschrieben werden.

t ... Zeit nach dem Start des Messengerdiensts in Tagen
$A(t)$ ... Anzahl der Personen, die den Messengerdienst zum Zeitpunkt t nutzen

1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion A auf.

Mai 2023, Prüfung 1: Internetplattform

Internetplattform

a) Die Funktion N beschreibt modellhaft die Anzahl der Personen, die eine Internetplattform nutzen, in Abhängigkeit von der Zeit t.

$N(t) = 3000 \cdot 1{,}22^t$

t ... Zeit in Jahren seit Beobachtungsbeginn
$N(t)$ ... Anzahl der Personen, die diese Internetplattform zum Zeitpunkt t nutzen

1) Berechnen Sie die Verdoppelungszeit für die Anzahl der Personen, die diese Internetplattform nutzen.

2) Stellen Sie die Funktionsgleichung von N in der Form $N(t) = a \cdot e^{\lambda \cdot t}$ auf.

Mit dem nachstehenden Ausdruck soll die mittlere Änderungsrate der Anzahl der Personen, die diese Internetplattform innerhalb der ersten 6 Jahre nutzen, berechnet werden.

$$\frac{3000 \cdot 1{,}22^{\boxed{}} - \boxed{}}{\boxed{} - 0}$$

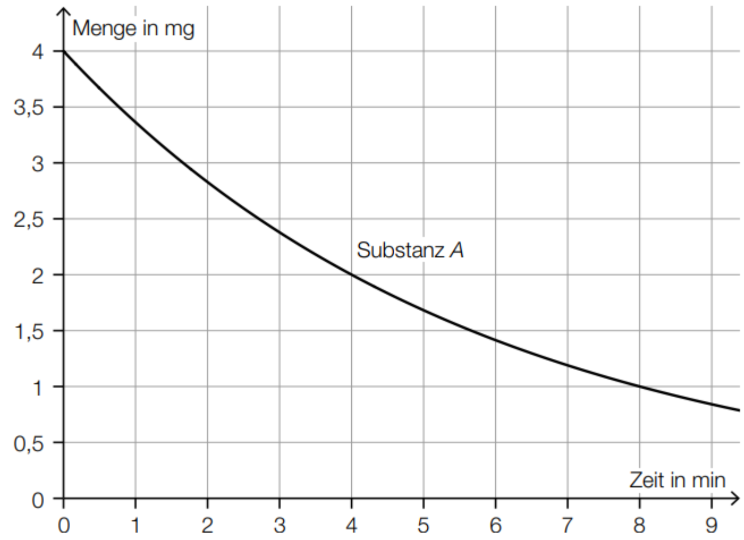
3) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

Mai 2023, Prüfung 3: Radioaktiver Zerfall

Radioaktiver Zerfall

Der Zerfall von radioaktiven Substanzen kann durch Exponentialfunktionen beschrieben werden.

a) Der in der nachstehenden Abbildung dargestellte Graph beschreibt den exponentiellen Zerfall der Substanz A.



Die Substanz B hat dieselbe Anfangsmenge wie die Substanz A.
Die Halbwertszeit der Substanz B ist halb so groß wie die Halbwertszeit der Substanz A.

1) Zeichnen Sie in die obige Abbildung den Graphen für den exponentiellen Zerfall der Substanz B ein.

b) Der Zerfall der Substanz C lässt sich durch die Funktion f beschreiben.

$f(t) = a \cdot b^t$

t ... Zeit in min
$f(t)$ ... vorhandene Menge der Substanz C zum Zeitpunkt t in mg

Die Substanz C hat eine Halbwertszeit von 30 min.
Zum Zeitpunkt t_1 ist nur mehr 1 % der Anfangsmenge von C vorhanden.

1) Berechnen Sie den Zeitpunkt t_1.

Für den Zerfall der radioaktiven Substanz C im Zeitintervall [0; 5] gilt:

$$\frac{f(5) - f(0)}{f(0)} \approx -0{,}11$$

2) Interpretieren Sie das Ergebnis dieser Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

Mai 2023, Prüfung 4: Partyballons

Partyballons

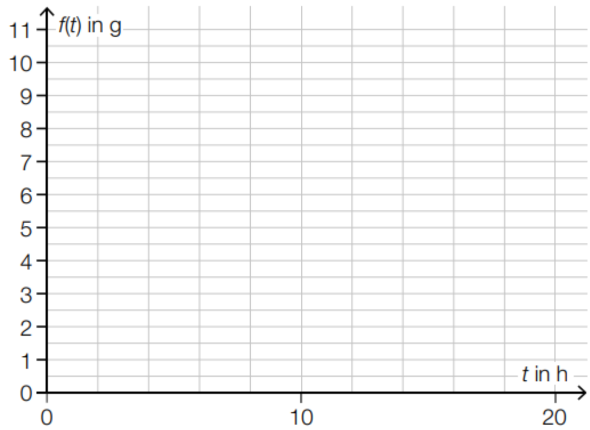
Hängt man an einen mit Helium befüllten Luftballon eine bestimmte Masse, so steigt dieser nicht mehr in die Höhe. Diese Masse wird als *Tragfähigkeit* bezeichnet.

Mit der Zeit entweicht das Helium aus dem Luftballon. Dadurch sinkt die Tragfähigkeit des Luftballons.

a) Bei einer bestimmten Luftballonart lässt sich die Tragfähigkeit in Gramm in Abhängigkeit von der Zeit t in Stunden näherungsweise durch die Exponentialfunktion f beschreiben.

Nach 10 Stunden beträgt die Tragfähigkeit 5 g. Das ist die Hälfte der Tragfähigkeit, die der Luftballon zum Zeitpunkt der Befüllung ($t = 0$) hatte.

1) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Graphen der Funktion f im Intervall $[0; 20]$ ein.



Es gilt: $f'(15) \approx -0{,}27$

2) Interpretieren Sie den Wert $-0{,}27$ im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

Mai 2023, Prüfung 5: Erwerbstätigkeit

b) Die Anzahl der Erwerbstätigen in einer anderen Stadt kann in Abhängigkeit von der Zeit t mithilfe der Funktion g beschrieben werden.

$g(t) = 24\,000 \cdot 1{,}02^t$

t ... Zeit in Jahren seit Beobachtungsbeginn
$g(t)$ ... Anzahl der Erwerbstätigen in dieser Stadt zum Zeitpunkt t

Die Lösung der nachstehenden Gleichung wurde berechnet:

$48\,000 = 24\,000 \cdot 1{,}02^{t_1}$
$t_1 \approx 35$ Jahre

1) Interpretieren Sie den Wert 35 im gegebenen Sachzusammenhang.

c) In einer weiteren Stadt kann die Anzahl der Erwerbstätigen näherungsweise mithilfe der Funktion h beschrieben werden.

$h(t) = 6000 - 2312 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

t ... Zeit in Jahren seit Beobachtungsbeginn
$h(t)$ ... Anzahl der Erwerbstätigen in dieser Stadt zum Zeitpunkt t

20 Jahre nach Beobachtungsbeginn gab es in dieser Stadt 5400 Erwerbstätige.

1) Berechnen Sie den Parameter λ.

Februar 2023, Prüfung 2: Streamingkanal

Streamingkanal

Die zeitliche Entwicklung der Anzahl der Abos eines bestimmten Streamingkanals wird betrachtet.

a) Modellhaft wird angenommen, dass sich die Anzahl der Abos dieses Streamingkanals alle 3 Wochen verdoppelt.
Am Neujahrstag 2021 hatte der Streamingkanal 484 Abos.

1) Berechnen Sie die Anzahl der Abos 6 Wochen vor dem Neujahrstag 2021.

Die Anzahl der Abos soll in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

t ... Zeit in Wochen
$f(t)$ ... Anzahl der Abos zur Zeit t

2) Stellen Sie eine Gleichung der Exponentialfunktion f auf. Wählen Sie $t = 0$ für den Neujahrstag 2021.

Oktober 2022, Prüfung 2: Datenspeicherung

b) Das weltweit vorhandene Datenvolumen in Milliarden Terabyte in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren wird in einem einfachen Modell durch die Funktion D beschrieben.

$D(t) = 40 \cdot 1{,}41^t$

t … Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2020
$D(t)$ … Datenvolumen zum Zeitpunkt t in Milliarden Terabyte

1) Berechnen Sie die Verdoppelungszeit des Datenvolumens gemäß diesem Modell.

Juni 2022, Prüfung 1: Bevölkerungszahl Österreichs

Bevölkerungszahl Österreichs

Die Entwicklung der Bevölkerungszahl Österreichs ab dem Jahr 2010 wird untersucht.

a) In einem einfachen Modell wird die Entwicklung der Bevölkerungszahl Österreichs durch die Exponentialfunktion N beschrieben.

$N(t) = 8{,}35 \cdot 1{,}0064^t$

t ... Zeit ab dem Jahresbeginn 2010 in Jahren
$N(t)$ ... Bevölkerungszahl zum Zeitpunkt t in Millionen

1) Geben Sie das jährliche prozentuelle Wachstum der Bevölkerungszahl gemäß diesem Modell an.

2) Berechnen Sie die Zeit t_1, nach der die Bevölkerung Österreichs gemäß diesem Modell gegenüber dem Jahresbeginn 2010 um ein Viertel zugenommen hat.

Juni 2022, Prüfung 2: Apps

Apps

Für eine bestimmte App soll die zeitliche Entwicklung der Downloads durch drei verschiedene Modelle beschrieben werden.

Zu Beginn des Beobachtungszeitraums ($t = 0$) betrug die Anzahl der bis dahin erfolgten Downloads 0,35 Millionen (Mio.). 365 Tage später betrug die Anzahl der bis dahin erfolgten Downloads 1,81 Mio.

b) Im Modell B soll die zeitliche Entwicklung der Downloads mithilfe der Exponentialfunktion g mit $g(t) = a \cdot b^t$ beschrieben werden.

t ... Zeit ab Beginn des Beobachtungszeitraums in Tagen
$g(t)$ ... Anzahl der bis zum Zeitpunkt t erfolgten Downloads in Mio.

1) Berechnen Sie die Verdoppelungszeit für die Anzahl der Downloads gemäß dem Modell B.

Juni 2022, Prüfung 5: Bierschaum

Bierschaum

Nach dem Einschenken von Bier in ein Glas fällt der entstandene Bierschaum langsam wieder in sich zusammen.

a) Thomas misst die Höhe des Bierschaums nach dem Einschenken in ein bestimmtes Glas. In der nachstehenden Tabelle sind seine Messergebnisse angegeben.

Zeit nach dem Einschenken in s	0	20	60
Höhe des Bierschaums in cm	4	2,5	2

1) Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate der Höhe des Bierschaums für die ersten 60 Sekunden nach dem Einschenken. Geben Sie das Ergebnis mit der dazugehörigen Einheit an.

Die Höhe des Bierschaums soll durch eine Exponentialfunktion h der Form $h(t) = a \cdot b^t$ beschrieben werden.

t ... Zeit nach dem Einschenken in s
$h(t)$ ... Höhe des Bierschaums zum Zeitpunkt t in cm

2) Zeigen Sie, dass es keine Exponentialfunktion h dieser Form gibt, auf deren Graphen alle 3 Messergebnisse liegen.