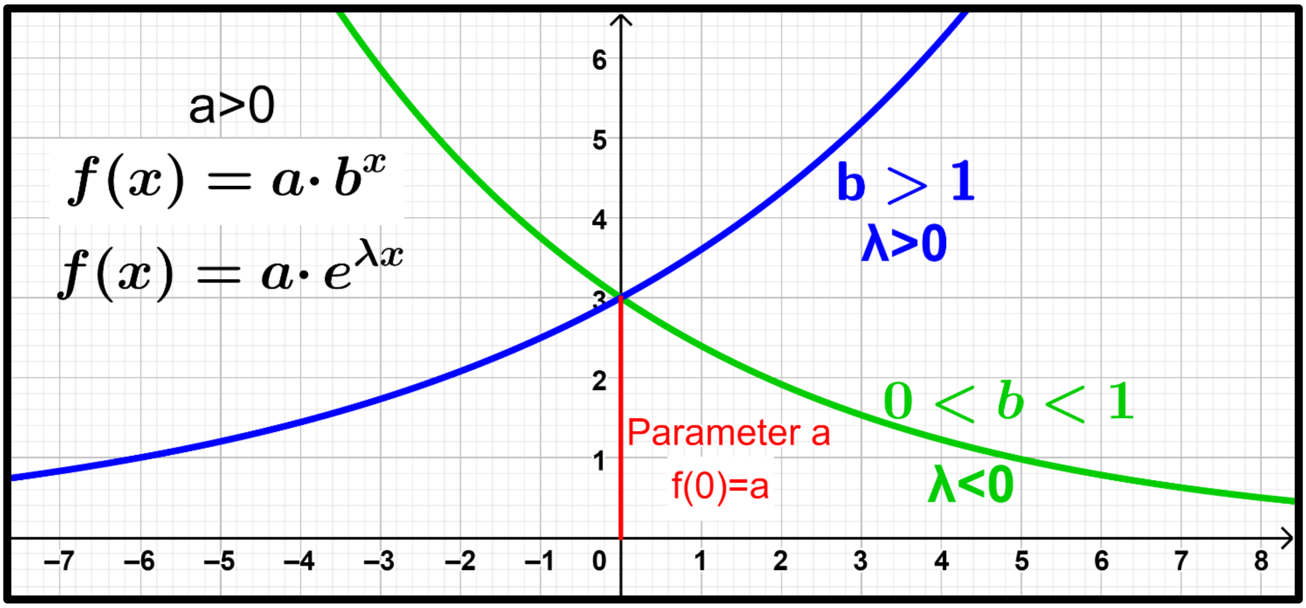
FA5 Exponentialfunktionen

Maturaskript AHS (34 Seiten)

Grundkompetenz:

- **FA5.1** verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene exponentielle Zusammenhänge als Exponentialfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
- **FA5.2** aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Exponentialfunktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können
- **FA5.3** die Wirkung der Parameter a und b bzw. λ kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können
- **FA5.4** wichtige Eigenschaften ($f(x + 1) = b \cdot f(x)$; $[e^x]' = e^x$) kennen und im Kontext deuten können
- **FA5.5** die Begriffe Halbwertszeit und Verdoppelungszeit kennen, die entsprechenden Werte berechnen und im Kontext deuten können
- **FA5.6** die Angemessenheit einer Beschreibung mittels Exponentialfunktion bewerten können



Prof. πegischer

Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

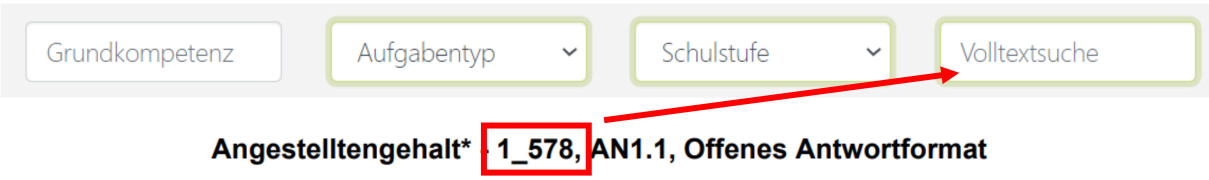
Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/

- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=M

2) Gib im Feld „**Volltextsuche**" die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.



Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. 1_578) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**" und „**GeoGebra**" erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**" erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln

- Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen.
- Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen.
- Sie dürfen mein Materialen **NICHT** gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden.
- Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden.
- Bei einem **Missbrauch** erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.

Weitere Regeln für Lehrpersonen

WICHTIGSTE REGEL: LehrerInnen dürfen die Materialien in **Ihrem eigenen Unterricht** verwenden:

- Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen.
- LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben.
- Es ist **nicht erlaubt**, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben.
- LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

FA5 - Exponentialfunktionen

Bsp. 1) Gegeben ist ein Grundwert G. Gib an, um wie viel Prozent G insgesamt **vergrößert** bzw. **verkleinert** wurde.

a. G wird um 20% vermehrt und anschließend um 17% vermindert.	**b.** G wird zuerst zweimal um 0,9 % vermehrt, und anschließend dreimal um 1,2% vermindert.
c. G wird zehn Mal um 2,4% vermehrt.	**d.** G wird fünf Mal um 3% vermindert & anschließend fünf Mal um 3% vermehrt.

Video

1. Definition einer Exponentialfunktion

Eine reelle Funktion der Form $f(x) = a \cdot b^x \quad (a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}^+)$ nennt man **Exponentialfunktion** mit der Basis b.

Bei einer Exponentialfunktion steht die Variable im Exponenten!!!

$$f(\boldsymbol{x}) = a \cdot b^{\boldsymbol{x}}$$

Bei einer Exponentialfunktion setzen wir $b > 0$ voraus, da die Potenz $b \leq 0$ nicht immer definiert ist:

Beispiel: $(-2)^{0,5} = (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2} \quad <- \quad negative\ Quadratwurzeln\ sind\ nicht\ definiert$

Parameter a (=Schnittpunkt mit der y-Achse)

Der Parameter a gibt den Schnittpunkt mit der y-Achse an und ist somit der Funktionswert an der Stelle $x = 0$, da folgender Zusammenhang gilt:

$$f(0) = a \cdot \boldsymbol{b^0} = a \cdot \boldsymbol{1} = a$$

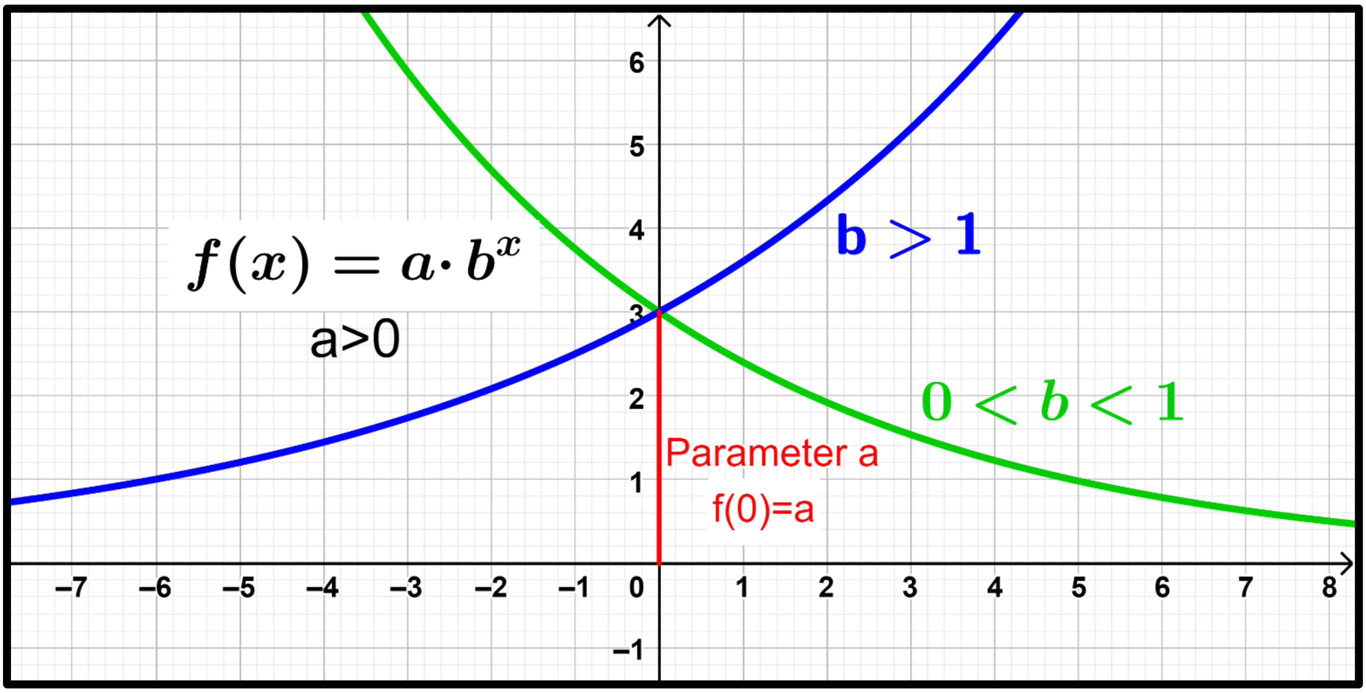
Parameter b (Annahme: $a > 0$) = Faktor mit dem f(x) multipliziert wird, wenn x um 1 erhöht wird

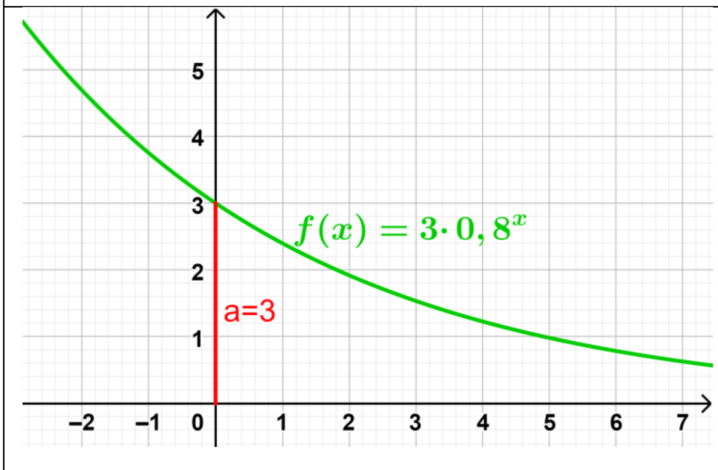
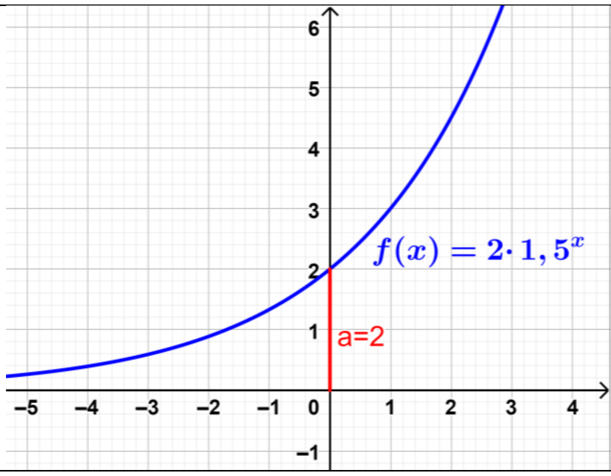
- Ist $b > 1$, so ist der Graph streng monoton steigend. Je größer b ist, desto stärker steigt der Graph.
- Für $0 < b < 1$ ist der Graph monoton fallend und nähert sich immer mehr der x-Achse.
- Ist $b = 1$, so handelt es sich um eine konstante Funktion:

$$f(x) = a \cdot 1^x = a$$

2. Graph und Eigenschaften von einer Exponentialfunktion

Fall 1: $a > 0$



<table>
<tr><th>$0 < b < 1$</th><th>$b > 1$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>

- für $0 < b < 1$: streng monoton **fallend**
- Alle Graphen gehen durch den Punkt $(0|a)$.
- Für $a > 0$ sind alle Funktionswerte **positiv**. Die x-Achse wird nie erreicht, für $x \to +\infty$ streben die Funktionswerte gegen 0. (x-Achse = **Asymptote**)
- Je kleiner b ist (zwischen 0 und 1), umso flacher verläuft der Graph.

</td><td>

- für $b > 1$: streng monoton **steigend**
- Alle Graphen gehen durch den Punkt $(0|a)$.
- Für $a > 0$ sind alle Funktionswerte **positiv**. Die x-Achse wird nie erreicht, für $x \to -\infty$ streben die Funktionswerte gegen 0. (x-Achse = **Asymptote**)
- Je größer der Parameter b ($b > 1$) ist, umso schneller steigt der Graph (exponentiell!).

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Die **Graphen** der Funktionen f_1 und f_2 mit

$$f_1(x) = b^x \; und \; f_2(x) = \left(\frac{1}{b}\right)^x$$

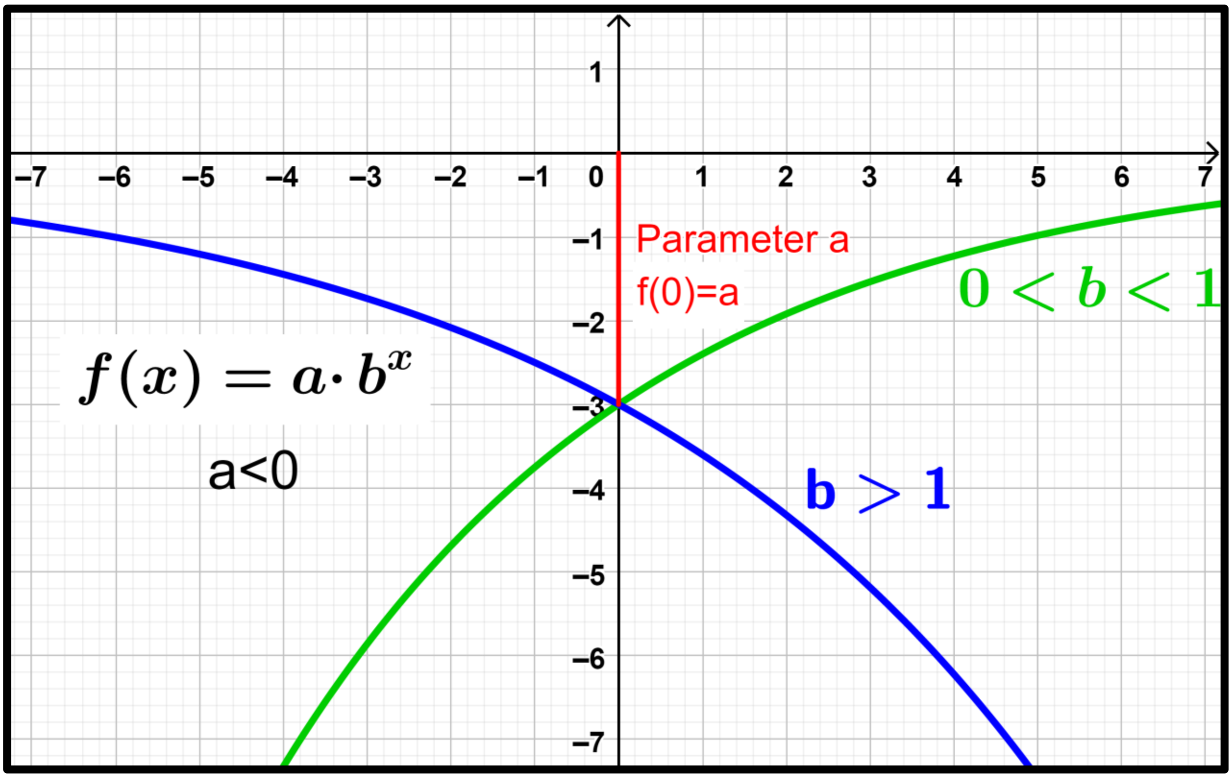
liegen **symmetrisch** bezüglich der **y-Achse**.

</td></tr>
</table>

Fall 2: $a < 0$

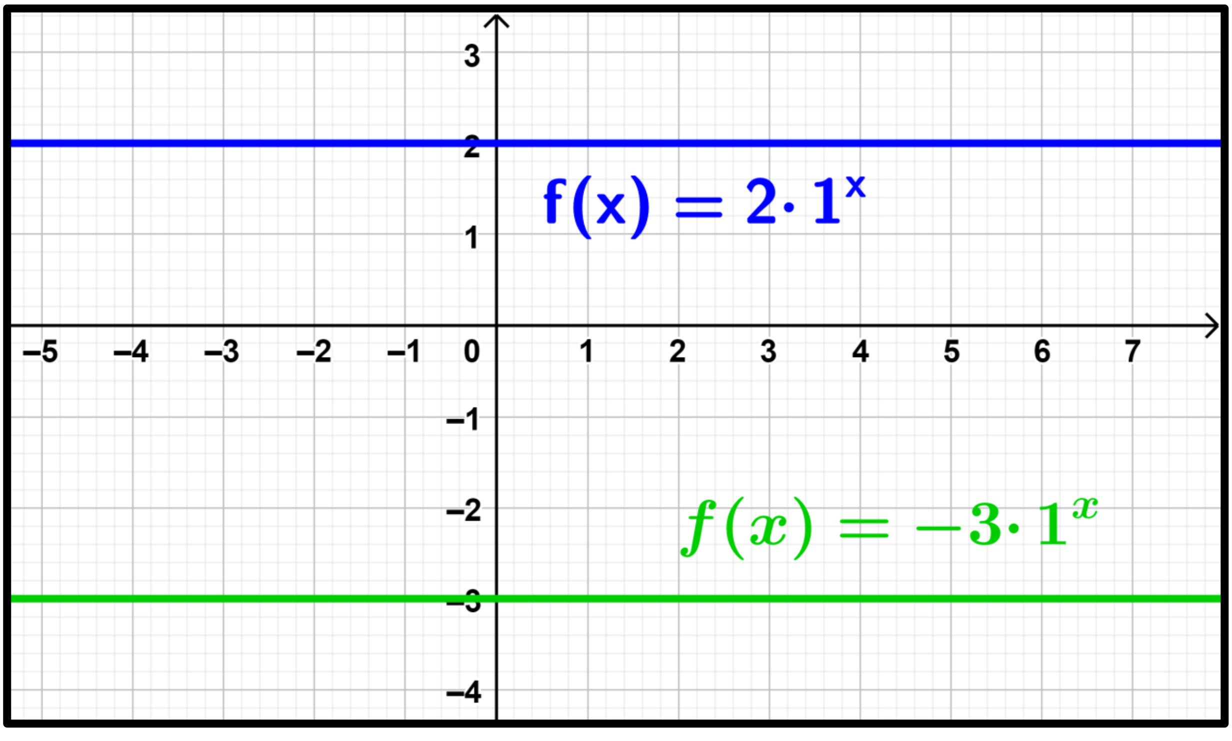
Ist der Parameter a negativ, so wird der Graph an der x-Achse gespiegelt und die die Funktionswerte werden allesamt negativ. Das Monotonieverhalten dreht sich um:

- für $0 < b < 1$: streng monoton steigend
- für $b > 1$: streng monoton fallend



Spezialfall: $b = 1$ (*konstante Funktion!*)

Ist $b = 1$, so ist der Graph konstant und schneidet die y-Achse beim Wert des Parameters a.



3. Graphische Ermittlung der Parameter a und b

Video

- **Parameter a**: Funktionswert an der Stelle $x = 0$ (=Abschnitt auf der y-Achse)
- **Parameter b**: Es gilt: $f(1) = a \cdot b^1 = a \cdot b$. Durch Umformen folgt daraus:

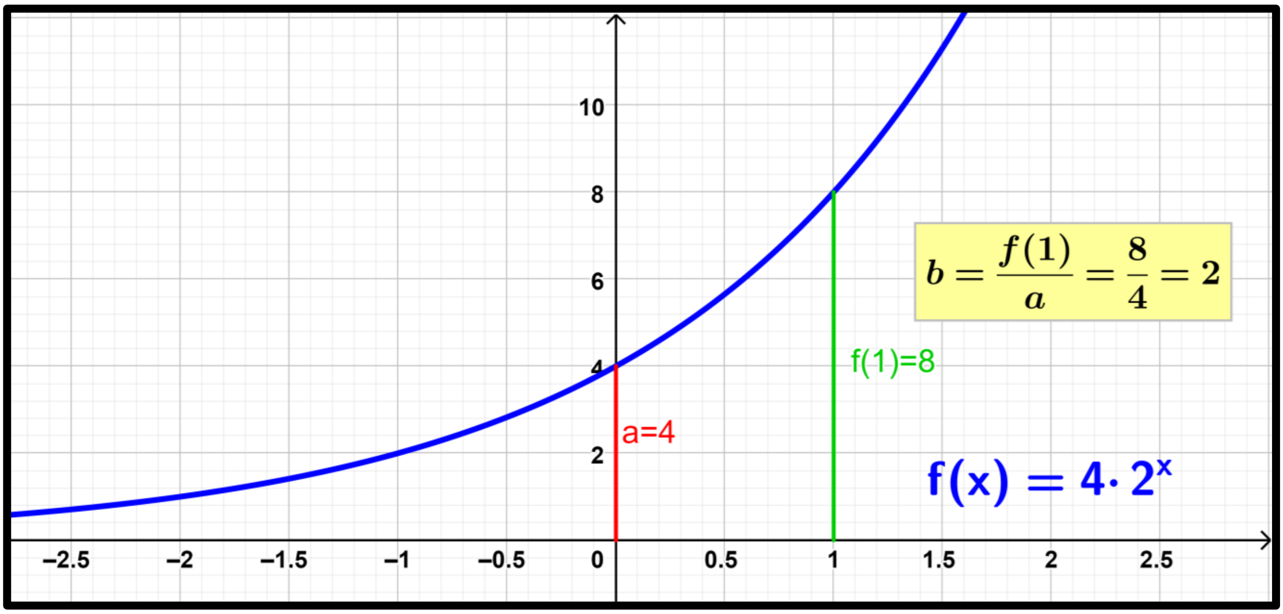
$$f(1) = a \cdot b$$

$$\boldsymbol{b = \frac{f(1)}{a}}$$

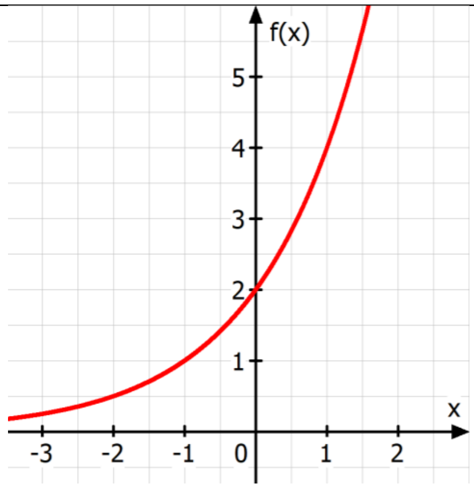
Bemerkung 1: Bestimme zuerst den Parameter a (Abschnitt auf der y-Achse) -> Bestimme anschließend den Funktionswert $f(1)$ graphisch. Dividiere diesen Wert durch den Parameter a, um den Wert von b zu erhalten! **(= Variante 1)**

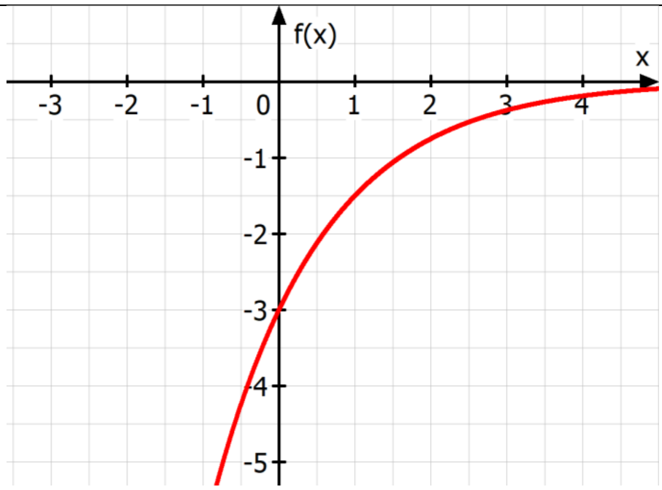
Bemerkung 2: Ist die Funktionsgleichung $f(x) = b^x$ $(a = 1)$, so entspricht der Parameter b dem Funktionswert an der Stelle 1, es gilt:

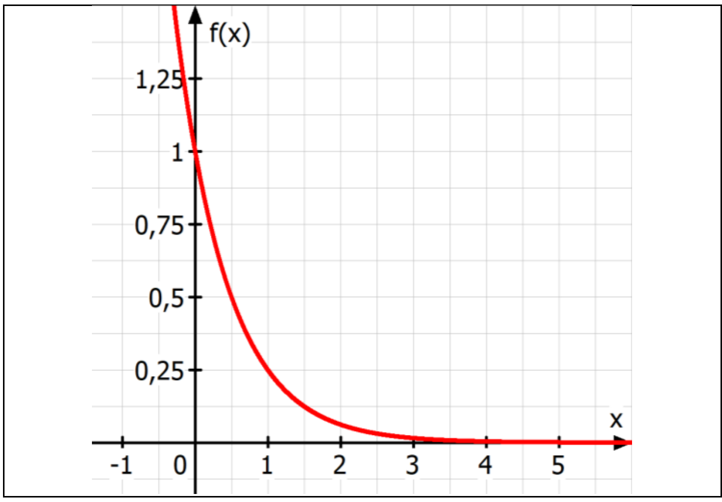
$$b = \frac{f(1)}{a} = \frac{f(1)}{1} = f(1)$$

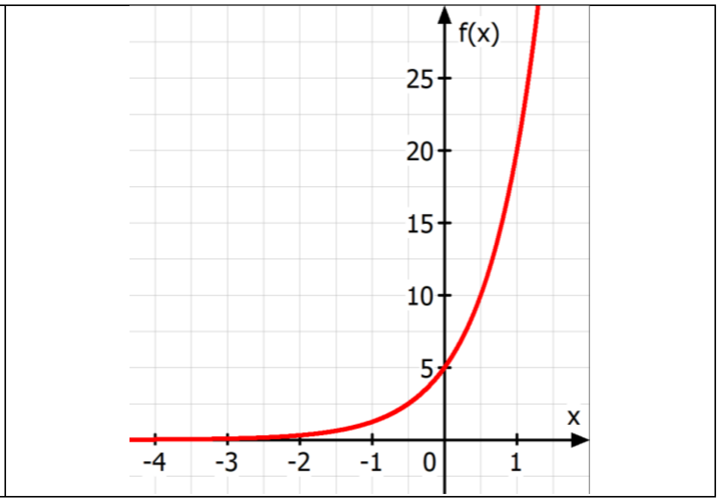


Bsp. 2) Bestimme die Funktionsgleichung der Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot b^x$.



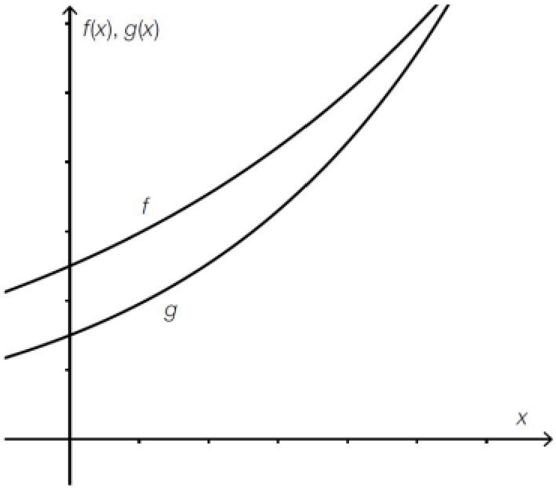






Parameter von Exponentialfunktionen* - 1_482, FA5.3, Lückentext

Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen zweier Exponentialfunktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $f(x) = c \cdot a^x$ und $g(x) = d \cdot b^x$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$.



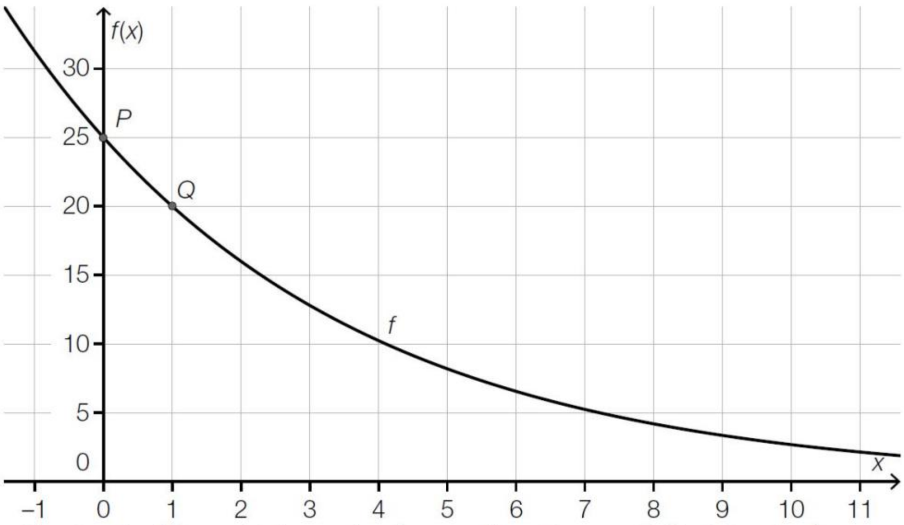
Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Für die Parameter a, b, c, d der beiden gegebenen Exponentialfunktionen gelten die Beziehungen _____①_____ und _____②_____.

①		②	
$c < d$	☐	$a < b$	☐
$c = d$	☐	$a = b$	☐
$c > d$	☐	$a > b$	☐

Exponentialfunktion* - 1_435, FA5.1, Offenes Antwortformat

Gegeben ist der Graph einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ durch die Punkte $P = (0|25)$ und $Q = (1|20)$.



Geben Sie eine Funktionsgleichung der dargestellten Exponentialfunktion f an!

4. Eigenschaften einer Exponentialfunktion

Video

Sei f eine Exponentialfunktion mit $f(x) = a \cdot b^x$, dann gilt:

- $f(0) = a$
- $b = \frac{f(1)}{a}$
- $f(x+1) = f(x) \cdot b \qquad bzw. \qquad f(x+h) = f(x) \cdot b^h$

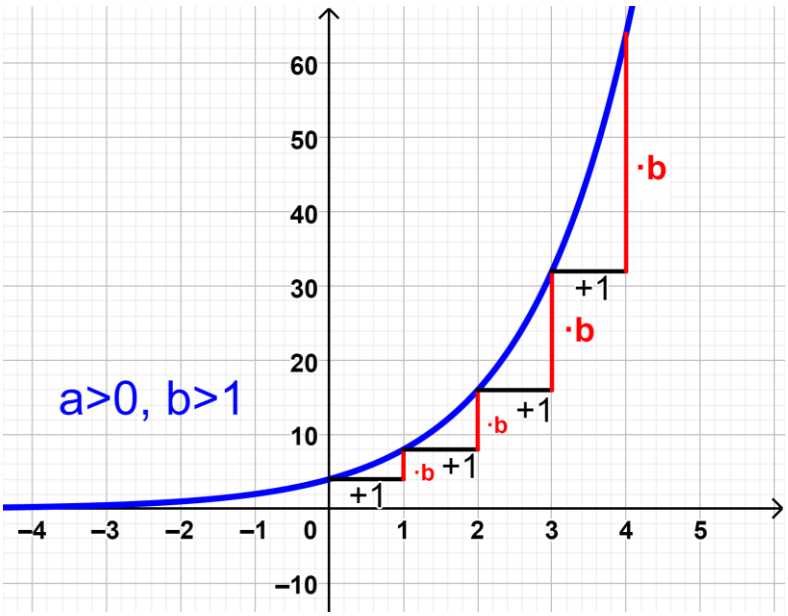
*Wird das Argument **um 1** vergrößert, so ändert sich der Funktionswert mit dem **Faktor b**.*

*Wird das Argument **um 2** vergrößert, so ändert sich der Funktionswert mit dem **Faktor b^2**.*

*Wird das Argument **um h** vergrößert, so ändert sich der Funktionswert mit dem **Faktor b^h**.*

- Wird das Argument um 1 erhöht, dann wächst / fällt $f(x)$ mit einem gleichen Prozentsatz p.

Fall 1: Exponentielles Wachstum: $b > 1$ (Annahme: $a > 0$)



Exponentielles Wachstum beschreibt **Änderungsprozesse**, bei denen sich ein Wert in gleichen (zeitlichen) Abständen immer um **denselben Faktor** ändert.

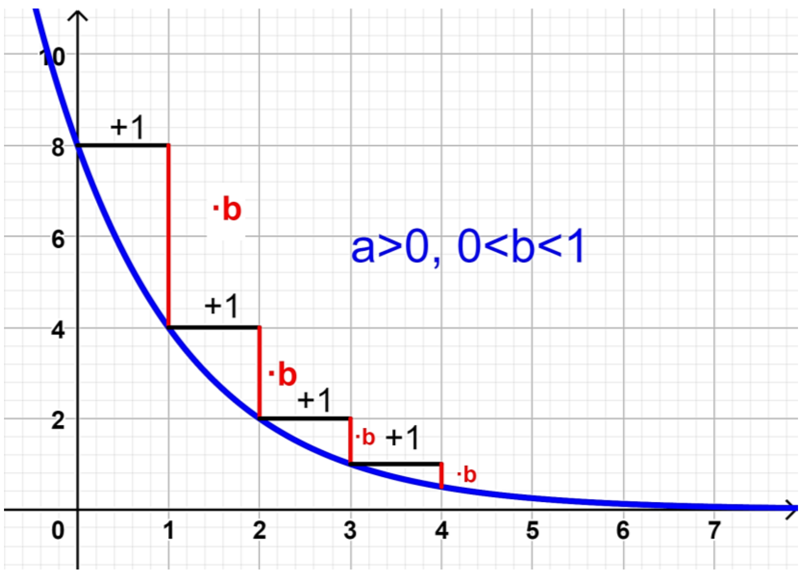
Da der Parameter $b > 1$ ist, steigen die Funktionswerte immer schneller weiter an (da sie immer mit dem Faktor b multipliziert werden! Der Graph wird immer steiler!)

$f(x) = 2 \cdot 2^x$

x	$f(x)$
0	2
1	4
2	8
3	16
4	32
5	64
6	128
7	256
8	512

+1 $\cdot\, b$

Fall 2: Exponentielle Abnahme: $0 < b < 1$ (Annahme: $a > 0$)



Exponentielle Abnahme (=Exponentieller Zerfall) beschreibt **Änderungsprozesse**, bei denen sich ein Wert in gleichen (zeitlichen) Abständen immer um **denselben Faktor** $(0 < b < 1)$ ändert.

Da der Parameter zwischen 0 und 1 liegt, werden die Funktionswerte immer kleiner (Die Kurve flacht immer weiter ab!)

$f(x) = 8 \cdot 0{,}5^x$

x	$f(x)$
0	8
1	4
2	2
3	1
4	0,5
5	0,25
6	0,125

+1 $\cdot\, b$

Bsp. 3) Gegeben ist eine Exponentialfunktion. Mit welchem Faktor wächst bzw. fällt f(x), wenn man das Argument um (i) 1, (ii) 3, (iii) 10 erhöht? Um viel Prozent ändert sich der Funktionswert?

$f(x) = 3 \cdot 1{,}2^x$	$f(x) = 0{,}45^x$

$f(x) = 2 \cdot 1{,}06^x$	$f(x) = 0{,}001 \cdot 0{,}95^x$

Eigenschaften einer Exponentialfunktion* - 1_459, FA5.4, 2 aus 5

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 50 \cdot 1{,}97^x$.

Kreuzen Sie die beiden auf f zutreffenden Aussagen an.

Der Graph der Funktion f verläuft durch den Punkt $P = (50 \mid 0)$.	☐
Die Funktion f ist im Intervall [0; 5] streng monoton steigend.	☐
Die Funktion f ist im Intervall [0; 5] rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt).	☐
Wenn man den Wert des Arguments x um 5 vergrößert, wird der Funktionswert 50-mal so groß.	☐
Wenn man den Wert des Arguments x um 1 vergrößert, wird der zugehörige Funktionswert um 97 % größer.	☐

Exponentialfunktion* - 1_339, FA5.4, 2 aus 5

Eine reelle Funktion f mit der Gleichung $f(x) = c \cdot a^x$ ist eine Exponentialfunktion, für deren reelle Parameter c und a gilt: $c \neq 0$, $a > 1$.
Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf diese Exponentialfunktion f und alle Werte $k, h \in \mathbb{R}$, $k > 1$ zutreffen!

$f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$	☐
$\frac{f(x+h)}{f(x)} = a^h$	☐
$f(x + 1) = a \cdot f(x)$	☐
$f(0) = 0$	☐
$f(x + h) = f(x) + f(h)$	☐

Funktion mit einer besonderen Eigenschaft* - 1_720, FA5.4, Halboffenes Antwortformat

Für eine nicht konstante Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Beziehung
$f(x+1) = 3 \cdot f(x)$.
Geben Sie eine Gleichung einer solchen Funktion f an.

$f(x) =$ ______________________________

Video

5. Aufstellen der Exponentialfunktion bei zwei gegebenen Punkten

Sind zwei beliebige Punkte von einer Exponentialfunktion gegeben, so kannst die Funktionsgleichung durch folgende zwei Schritte bestimmen:

Schritt 1: Bestimmung des Parameters b durch folgende Eigenschaft einer Exponentialfunktion: $$f(x+h) = f(x) \cdot b^h$$ Diese Eigenschaft muss man auf b umformen: $$b = \sqrt[h]{\frac{f(x+h)}{f(x)}}$$	$A = (-1\|1), B = (4\|32)$ $f(-1) = 1$ $f(4) = 32$ Die Argumente wurden um den Wert 5 erhöht: $f(4) = f(-1) \cdot b^5$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b} = \sqrt[5]{\frac{f(4)}{f(-1)}} = \sqrt[5]{\frac{32}{1}} = \mathbf{2}$ $f(x) = a \cdot 2^x$	$A = (-2\|12), B = (1\|1{,}5)$ $f(-2) = 12$ $f(1) = 1{,}5$ Die Argumente wurden um den Wert 3 erhöht: $f(1) = f(-2) \cdot b^3$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b} = \sqrt[3]{\frac{f(1)}{f(-2)}} = \sqrt[3]{\frac{1{,}5}{12}} = \mathbf{0{,}5}$ $f(x) = a \cdot 0{,}5^x$
Schritt 2: Setze einen der beiden Punkte in die Funktionsgleichung ein, um die Variable a bestimmen zu können. Umformen der linearen Gleichung! ▪ x-Koordinate des Punktes für die Variable x ▪ y-Koordinate des Punktes für f(x)	$f(x) = a \cdot 2^x$ $A = (-1\|1) \to f(-1) = 1$ $1 = a \cdot 2^{-1} \mid : 2^{-1}$ $a = 2$ $f(x) = 2 \cdot 2^x$	$f(x) = a \cdot 0{,}5^x$ $B = (1\|1{,}5) \to f(1) = 1{,}5$ $1{,}5 = a \cdot 0{,}5^1 \mid : 0{,}5$ $a = 3$ $f(x) = 3 \cdot 0{,}5^x$

Bsp. 4) Bestimme die Funktionsgleichung der Exponentialfunktion aus zwei gegebenen Punkten.
- Gib anschließend den Funktionswert an der Stelle $x = 7$ an.
- Bei welcher Stelle erreicht die Funktion den Funktionswert $f(x) = 100$?

$A = (-3\|0{,}5), B = (4\|64)$	$C = (-2\|50), D = (2\|0{,}005)$	$E = (2\|300), F = (6\|3\,000\,000)$

Bsp. 5) Gegeben sind drei Punkte. Können diese drei Punkte auf einer Exponentialfunktion liegen? Begründe rechnerisch. Falls ja, gib die Gleichung der Exponentialfunktion an.

$A = (1\|6), B = (6\|192), C = (9\|1536)$	$A = (-1\|8), B = (3\|0{,}5), C = (5\|0{,}25)$

Funktionsterm* - 1_841, FA5.1, Halboffenes Antwortformat

Von einer reellen Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist Folgendes bekannt:

- $f(1) = 3$
- Für alle reellen Zahlen x gilt: $f(x + 1)$ ist um 50 % größer als $f(x)$.

Geben Sie einen Funktionsterm einer solchen Funktion f an.

$f(x) =$ ______________________________

Exponentialfunktion* - 1_575, FA5.1, Halboffenes Antwortformat

Von einer Exponentialfunktion f sind die folgenden Funktionswerte bekannt:

$f(0) = 12$ und $f(4) = 192$
Geben Sie eine Funktionsgleichung der Exponentialfunktion f an!

$f(x) =$ ______________________________

Ausbreitung eines Ölteppichs* - 1_483, FA5.1, Offenes Antwortformat

Der Flächeninhalt eines Ölteppichs beträgt momentan 1,5 km² und wächst täglich um 5 %. Geben Sie an, nach wie vielen Tagen der Ölteppich erstmals größer als 2 km² ist!

Dicke einer Bleiplatte* - 1_672, FA5.1, Offenes Antwortformat

In der Medizintechnik werden Röntgenstrahlen eingesetzt. Durch den Einbau von Bleiplatten in Schutzwänden sollen Personen vor diesen Strahlen geschützt werden. Man geht davon aus, dass pro 1 mm Dicke der Bleiplatte die Strahlungsintensität um 5 % abnimmt.
Berechnen Sie die notwendige Dicke x (in mm) einer Bleiplatte, wenn die Strahlungsintensität auf 10 % der ursprünglichen Strahlungsintensität, mit der die Strahlen auf die Bleiplatte auftreffen, gesenkt werden soll!

Wachstum* - 1_340, FA5.2, Halboffenes Antwortformat

Die Funktion f beschreibt einen exponentiellen Wachstumsprozess der Form $f(t) = c \cdot a^t$ in Abhängigkeit von der Zeit t.
Ermitteln Sie für $t = 2$ und $t = 3$ die Werte der Funktion f!

t	$f(t)$
0	400
1	600
2	$f(2)$
3	$f(3)$

$f(2) =$ ______________________________

$f(3) =$ ______________________________

Exponentialfunktion* - 1_387, FA5.3, Halboffenes Antwortformat

Von einer Exponentialfunktion f mit der Gleichung $f(x) = 25 \cdot b^x$ ($b \in \mathbb{R}^+$; $b \neq 0$; $b \neq 1$) ist folgende Eigenschaft bekannt:

Wenn x um 1 erhöht wird, sinkt der Funktionswert auf 25 % des Ausgangswertes.
Geben Sie den Wert des Parameters b an!

$b =$ ______________________________

6. Die natürliche Exponentialfunktion

Video

Erinnerung: $f(x) = a \cdot \boldsymbol{b}^x$

Exponentialfunktionen können eine beliebige, positive Basis besitzen. Die natürliche Exponentialfunktion besitzt als Basis die Euler'sche Zahl $e = 2{,}718 \ldots (irrational)$. Den griechischen Buchstaben λ ("$Lambda$") benötigt man, sodass man die beiden Schreibweisen gleich setzen kann:

Natürliche Exponentialfunktion: $f(x) = a \cdot \boldsymbol{e}^{\lambda x}$

Da der Parameter a und die Variable x bei beiden Darstellungen gleich sind, muss dies auch für den Parameter b bzw. $\boldsymbol{e}^{\lambda}$ gelten:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}^{\lambda}$$

Um diese **Exponentialgleichung** lösen zu können, wendet man den **ln** auf beiden Seiten an:

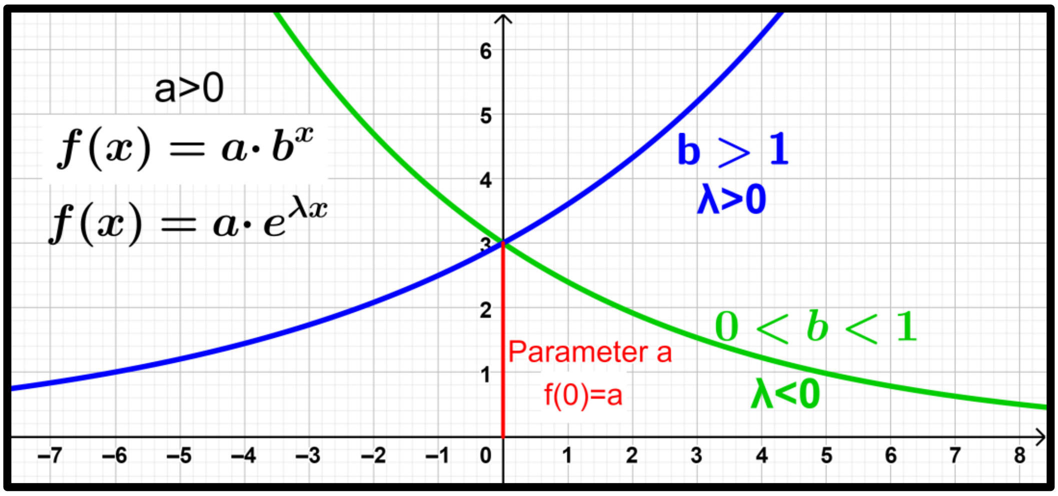
$$\ln b = \ln e^{\lambda}$$

$$\ln b = \lambda \cdot \ln e \quad | \ln e = 1$$

$$\boldsymbol{\lambda = \ln b}$$

<u>**Annahme**</u>: $\boldsymbol{a > 0}$

Die Exponentialfunktion ist **streng monoton steigend**, wenn $b > 1$ ist: $\boldsymbol{b > 1} \quad oder \quad \boldsymbol{e^{\lambda} > 1}$ Es gilt: $e^0 = 1$ $Sobald\ \lambda > 0\ ist, ist\ auch\ e^{\lambda} > 1$ Die Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot \boldsymbol{e}^{\lambda x}$ ist streng monoton steigend, wenn $\lambda > 0$ ist.
Die Exponentialfunktion ist **streng monoton fallend**, wenn $0 < b < 1$ ist: $\boldsymbol{0 < b < 1} \quad oder \quad \boldsymbol{0 < e^{\lambda} < 1}$ Es gilt: $e^0 = 1$ $Sobald\ \lambda < 0\ ist, gilt: 0 < e^{\lambda} < 1$ Die Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot \boldsymbol{e}^{\lambda x}$ ist streng monoton fallend, wenn $\lambda < 0$ ist.



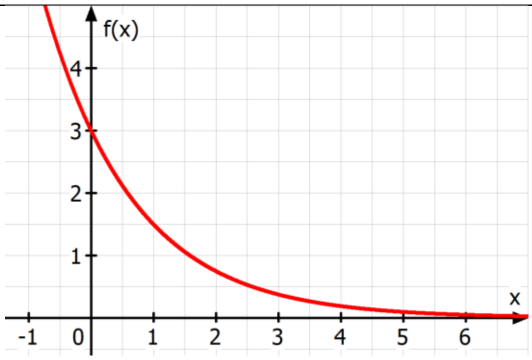
Bsp. 6) Stelle die Exponentialfunktion f in der Form $f(x) = a \cdot b^x$ dar.

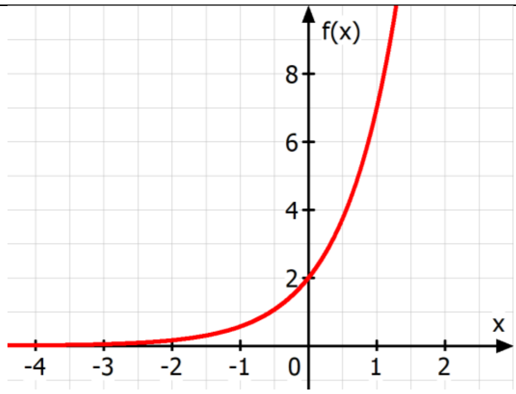
$f(x) = a \cdot e^{-1,2x}$	$f(x) = a \cdot e^{0,8x}$	$f(x) = a \cdot e^{3x}$

Bsp. 7) Stelle die Exponentialfunktion f in der Form $f(x) = a \cdot e^{\lambda x}$ dar.

$f(x) = a \cdot 0,6^x$	$f(x) = a \cdot 3^x$	$f(x) = a \cdot 2,2^x$

Bsp. 8) Stelle die Exponentialfunktion f in der Form $f(x) = a \cdot e^{\lambda x}$ dar.





Bsp. 9) Die Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot e^{\lambda x}$ geht durch die Punkte (0|3) und (2|27).

a. Bestimme die Parameter λ und a.
b. Bei welchem Argument x beträgt der Funktionswert 100?
c. Wie lautet der Funktionswert bei der Stelle $x = 7$?
d. Stelle die Funktion in der Form $f(x) = a \cdot \mathrm{b}^{\mathrm{x}}$ dar.
e. Um wie viel Prozent ändert sich der Funktionswert, wenn das Argument um den Wert 1 erhöht wird?
f. Um wie viel Prozent ändert sich der Funktionswert, wenn das Argument um den Wert 3 erhöht wird?

Video

Exponentialfunktion* - 1_648, FA5.3, Halboffenes Antwortformat

Für eine Exponentialfunktion f mit $f(x) = 5 \cdot e^{\lambda \cdot x}$ gilt: $f(x + 1) = 2 \cdot f(x)$.
Geben Sie den Wert von λ an!

λ = ____________________

Lineare und Exponentielle Wachstumsprozesse

In diesem Kapitel werden **mathematische Funktionen** (lineare und exponentielle Funktion) erstellt, um damit in der **Natur** bzw. im **Alltag** vorkommende **Wachstums- und Zerfallsprozesse** (z.B. Wachstum einer Bevölkerung, Zerfall eines radioaktiven Atoms, Abnahme des Alkoholspiegels im Blut) zu beschreiben.

Video 1/5

Für die Berechnungen werden folgende **Grundbegriffe** verwendet:

- $\boldsymbol{t}$... gibt den Zeitpunkt an (in Jahren, Stunden, Sekunden, etc. – steht in der Angabe)
- $\boldsymbol{N_0 = N(0)}$ ... Anfangswert (Anzahl bzw. Größe zum Zeitpunkt $t = 0$)
- $\boldsymbol{N(t)}$ ... Wert zum Zeitpunkt t

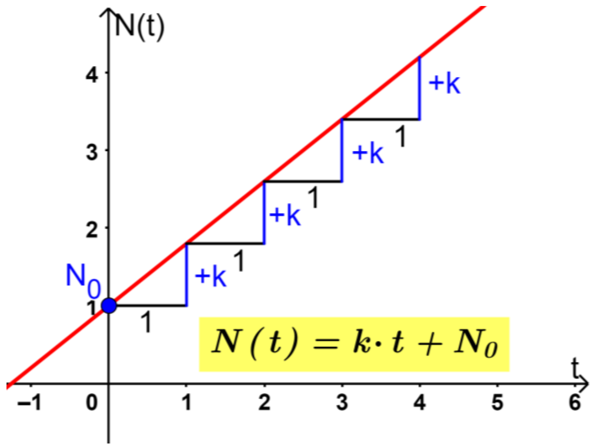
Video 2/5

1. Lineares Wachstum & Lineare Abnahme:

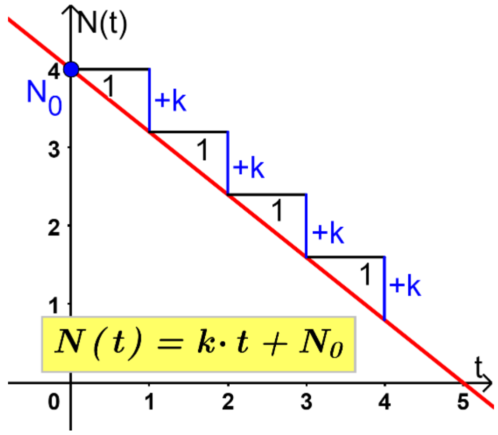
Eine Größe verändert sich **linear**, wenn sie in gleichen **Zeitabständen um denselben konstanten Wert k** wächst oder fällt. Die Funktionsgleichung entspricht der einer linearen Funktion $y = kx + d$:

$$N(t) = k \cdot t + N_0$$

$\boldsymbol{k > 0}$: Lineares Wachstum



$\boldsymbol{k < 0}$: Lineare Abnahme



Wird die Zeit t um einen Zeitschritt vergrößert, so **steigt** bzw. **fällt N(t)** gerade um den Wert **k**.

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">BERMERKUNG
Es gibt IMMER zwei Möglichkeiten, um Berechnungen mit einer Funktionsgleichung durchzuführen!</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">$h(t) = -0{,}5 \cdot t + 10$ beschreibt die Höhe einer Kerze, die mit zunehmenden Abbrennen immer kleiner wird. Zu Beginn ist die Kerze 10 cm hoch, da $h(0) = 10$ ist. Pro Minute wird die Kerze um 0,5 cm kleiner.</td></tr>
<tr><td align="center">Möglichkeit 1: Argument („x-Wert“) gegeben
-> zugehöriger Funktionswert gesucht (EINSETZEN!)</td><td align="center">Möglichkeit 2: Funktionswert gegeben
-> zugehörige/s Argument/e gesucht, bei denen der Funktionswert eintritt (Wert statt $f(x), N(t)$, ... einsetzen)</td></tr>
<tr><td>ARGUMENTE = Zeitpunkte (in diesem Beispiel)
▪ Wie hoch ist die Kerze nach 5 Minuten?
Argument $t = 5$ -> zugehöriger Funktionswert $h(5)$ gesucht
$h(5) = -0{,}5 \cdot 5 + 10 = -2{,}5 + 10 = 7{,}5\ cm$

Ist ein Argument gegeben, so musst du dieses Argument in die Funktionsgleichung einsetzen, um den zugehörigen Funktionswert zu erhalten 😊</td><td>FUNKTIONSWERTE = Höhe der Kerze
▪ Wann erreicht die Kerze eine Höhe von 3 cm?
Funktionswert $h(t) = 3$ -> Argument/Zeitpunkt gesucht!!!
$h(t) = -0{,}5 \cdot t + 10$
$3 = -0{,}5 \cdot t + 10 \ \mid -10$
$-7 = -0{,}5 \cdot t \ \mid : (-0{,}5)$
$14 = t \rightarrow nach\ 14\ Minuten$
Ist ein Funktionswert gegeben, so musst du diesen Wert statt der Funktion f(x), N(t), ... einsetzen und die entstehende Gleichung nach dem Argument auflösen. 😊</td></tr>
</table>

Bsp. 1) Moritz hat ein Geburtsgewicht von 3000 g. Nach 3 Wochen hat er bereits 3900 g.

a. Erstelle ein lineares Modell $N(t) = k \cdot t + N_0$, welches die Abhängigkeit des Gewichts N vom Alter nach t Wochen beschreibt.
b. Was bedeuten die Parameter k und N_0 in diesem Zusammenhang?
c. Moritz ist bei seiner Taufe 9 Wochen alt. Welches Gewicht hat er?
d. Wann erreicht Moritz ein Gewicht von 6,2 kg?
e. Stelle diesen Wachstumsprozess graphisch dar. Beschrifte die Achsen (inkl. Einheiten) und wähle eine passende Definitions- und Wertemenge.

Bsp. 2) Ein Schwimmbecken wird mit Wasser gefüllt. Am Anfang ist das Becken leer. Pro Minute laufen nun 20 l Wasser in das Becken. Das Schwimmbecken fasst insgesamt 54.000 l.

a. Erstelle ein lineares Modell $N(t) = k \cdot t + N_0$, wobei $N(t)$ das Wasservolumen in Litern nach t Minuten beschreibt.
b. Wie viel Wasser befindet sich nach einer halben Stunde im Becken?
c. Nach wie vielen Minuten ist das Schwimmbecken zu 60% voll?
d. Nach welcher Zeit ist das Becken vollständig mit Wasser gefüllt?
e. Stelle diesen Wachstumsprozess graphisch dar. Beschrifte die Achsen (inkl. Einheiten) und wähle eine passende Definitions- und Wertemenge.

Bsp. 3) Die Grundgebühr eines Stromanbieters beträgt 30,50 € monatlich. Dazu kommen 15,94 Cent pro verbrauchter Kilowattstunde (kWh).

a. Erstelle ein lineares Modell $N(t) = k \cdot t + N_0$, wobei N(t) die Gesamtkosten bei t verbrauchten Kilowattstunden bezeichnet.
b. Erstelle eine Wertetabelle der anfallenden Kosten für 20, 30, 40, 50 kWh!
c. Übertrage die Wertepaare der Tabelle in ein Koordinatensystem! Wähle geeignete Einheiten und zeichne die lineare Funktion!
d. Wie viele Kilowattstunden darf man verbrauchen, wenn man pro Monaten maximal 50€ zahlen möchte?

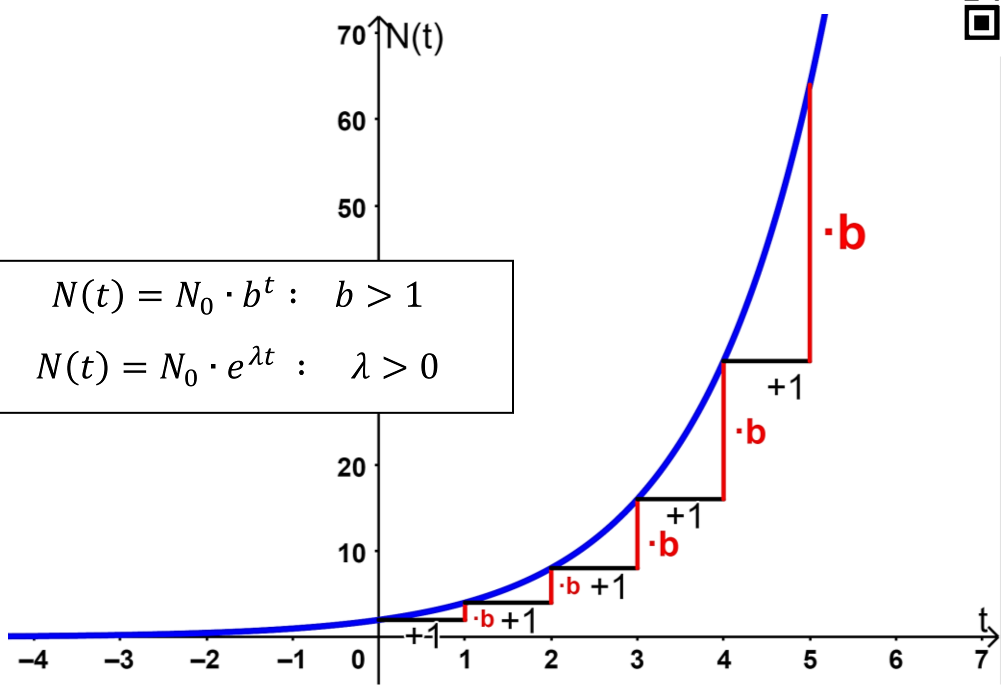
Bsp. 4) Bei einem großen Schwimmteich ist am Boden bei der Teichfolie ein Loch entstanden. Ursprünglich waren im Schwimmteich 100 000 Liter Wasser. Pro Minuten rinnen nun 50 Liter Wasser ab.

a. Erstelle ein lineares Modell $N(t) = k \cdot t + N_0$, wobei N(t) das Wasservolumen nach t Minuten angibt.
b. Handelt es sich um ein lineares Wachstums- oder Abnahmemodell? Begründe anhand der Steigung k.
c. Nach wie vielen Minuten bzw. Stunden sind nur mehr 15% vom ursprünglichen Wasservolumen im Badeteich?
d. Wie viele Liter Wasser sind nach 2 Stunden noch im Teich?
e. Wann ist der Teich komplett ausgeronnen?
f. Stelle diesen Wachstumsprozess graphisch dar. Wähle eine passende Skalierung der Achsen.

2. Exponentielles Wachstum

Video 3/5

Eine Größe wächst exponentiell, wenn sie in gleichen Zeitabständen **um denselben, konstanten Faktor $b > 1$** wächst.



*UNTERSCHIED zu linearem Wachstum: Bei jedem Zeitschritt wird die Größe jeweils mit diesem **Faktor b multipliziert**! Beim linearen Wachstum wurde bei jedem Zeitschritt der **Wert k** zur Größe N(t) **addiert / subtrahiert**.*

Wie bei den Exponentialfunktionen gibt es auch hier zwei äquivalente Formeln:

$N(t) = N_0 \cdot b^t$	$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$
$\boldsymbol{b > 1}$ ... ist der **Wachstumsfaktor** und gibt an, mit welchem Faktor sich die Population pro Zeiteinheit verändert. Da die Population wächst, muss $b > 1$ sein. Beispiel: $b = 1{,}26$ -> *Die Population wächst um den Faktor 1,26 -> Die Population vergrößert sich pro Zeiteinheit um 26%.*	$\boldsymbol{\lambda > 0 \ldots Wachstumskonstante}$ $b = e^{\lambda}$ $\lambda = \ln b$

Verdoppelungszeit

Die **Verdoppelungszeit** τ ist die Zeit, in der sich eine **Größe verdoppelt** hat. Insbesondere gilt:

$$\boldsymbol{N(\tau) = 2 \cdot N_0}$$

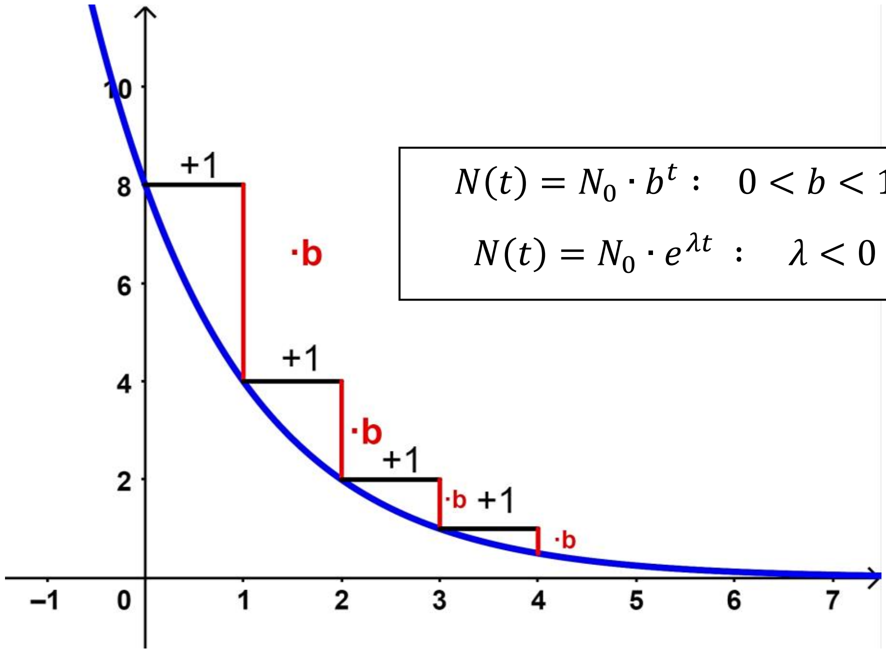
Die Verdoppelungszeit wird berechnet, indem man für $N(t) = \boldsymbol{2 \cdot N_0}$ einsetzt:

$N(t) = N_0 \cdot b^t$ $\boldsymbol{2 \cdot N_0} = N_0 \cdot b^t \quad \mid : N_0$ $2 = b^t \quad \mid ln$ $\ln 2 = \ln b^t$ $\ln 2 = t \cdot \ln b \quad \mid : \ln b$ $\boldsymbol{\tau} = \frac{\ln(2)}{\ln(b)}$	$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$ $\boldsymbol{2 \cdot N_0} = N_0 \cdot e^{\lambda t} \quad \mid : N_0$ $2 = e^{\lambda t} \quad \mid ln$ $\ln 2 = \ln e^{\lambda t}$ $\ln 2 = \lambda t \cdot \ln e \quad \mid \ln e = 1$ $\ln 2 = \lambda t \quad \mid : \lambda$ $\boldsymbol{\tau} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$

3. Exponentielle Abnahme / Exponentieller Zerfall

Video 4/5

Man spricht von einer exponentieller Abnahme bzw. von einem exponentiellen Zerfall, wenn sich eine Größe in **gleichen Zeitabständen** immer **um den gleichen Faktor verkleinert**.



$$N(t) = N_0 \cdot b^t : \quad 0 < b < 1$$

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t} : \quad \lambda < 0$$

$N(t) = N_0 \cdot b^t$	$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$
b... ist der **Abnahmefaktor** und gibt an, mit welchem Faktor sich die Population pro Zeiteinheit verringert. Da die Population abnimmt, muss $\mathbf{0 < b < 1}$ sein. Beispiel: b= 0,64 -> *Die Population verringert sich pro Zeiteinheit um den Faktor 0,64 -> Die Population verringert sich pro Zeiteinheit um* $1 - 0{,}64 = 0{,}36 = 36\ \%$	$\boldsymbol{\lambda < 0 \ldots Zerfallskonstante}$ $b = e^{\lambda}$ $\lambda = \ln b$

Halbwertszeit

Die **Halbwertszeit** τ ist die Zeit, in der sich eine **Größe halbiert**. Insbesondere gilt:

$$\boldsymbol{N(\tau) = \frac{N_0}{2}}$$

Die Halbwertszeit wird berechnet, indem man für $N(t) = \frac{N_0}{2}$ einsetzt:

$$N(t) = N_0 \cdot b^t$$
$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot b^t \quad | : N_0$$
$$\frac{1}{2} = b^t \quad | \, ln$$
$$\ln 0{,}5 = \ln b^t$$
$$\ln 0{,}5 = t \cdot \ln b \quad | : \ln b$$
$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(b)}$$

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$$
$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{\lambda t} \quad | : N_0$$
$$0{,}5 = e^{\lambda t} \quad | \, ln$$
$$\ln 0{,}5 = \ln e^{\lambda t}$$
$$\ln 0{,}5 = \lambda t \cdot \ln e \quad | \ln e = 1$$
$$\ln 0{,}5 = \lambda t \quad | : \lambda$$
$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\ln(0{,}5)}{\lambda}$$

Bemerkung: Die Halbwertszeit hängt nicht vom Anfangswert N_0 ab!!! (kürzt sich weg!)

Bemerkung:

- Möchtest du z.B. berechnen, wann nur mehr 15% eines Stoffes vorhanden sind, so musst du ähnlich zur Berechnung der Halbwertszeit **für $\boldsymbol{N(t) = 0,15 \cdot N_0}$** einsetzen:

$$N(t) = N_0 \cdot b^t$$
$$0{,}15 \cdot N_0 = N_0 \cdot b^t \quad | \, N_0$$
$$0{,}15 = b^t \quad | \, ln$$
$$ln\, 0{,}15 = ln\, b^t$$
$$ln\, 0{,}15 = t \cdot ln\, b \quad | : ln\, b$$

$$\boldsymbol{t} = \frac{ln\,(0{,}15)}{ln\,(b)}$$

- Allgemein: Sollen nur mehr p % eines Stoffes vorhanden sein, so berechnest du diese Zeit mit:

$$\boldsymbol{t} = \frac{ln\left(\frac{p}{100}\right)}{ln\,(b)}$$

Bsp. 5) Ein Kapital auf einem Sparbuch wächst jährlich um 6.5 % pro Jahr.

a. Bestimme die Funktionsgleichung, wenn zu Beginn € 100 auf dem Sparbuch liegen.
b. Ermittle die Verdoppelungszeit.
c. Nach wie vielen Jahren liegen auf dem Sparbuch zum ersten Mal mindestens 1000 €?

Bsp. 6) Die Größe einer Bakterienpopulation nach t Stunden kann mithilfe der Funktion $N(t) = N_0 \cdot 1{,}14^t$ angegeben werden.

a. Bestimme, um wie viel Prozent sich die Population pro Stunde vergrößert.
b. Berechne die Verdoppelungszeit.
c. Um wie viel Prozent hat sich die Bakterienpopulation nach fünf Stunden vergrößert?
d. Sei $N_0 = 1000$. Nach welcher Zeit sind 1 000 000 Bakterien vorhanden?

Bsp. 7) Die Verdoppelungszeit eines exponentiellen Wachstumsprozesses der Form $N(t) = N_0 \cdot b^t$ beträgt 17 Tage (t gibt die Tage an).

a. Berechne den Wachstumsfaktor b.
b. Bestimme die Zeit, wie lange es dauert, bis das 8-fache des Anfangswertes vorhanden ist.

Bsp. 8) Von einer bestimmten Menge eines radioaktiven Elements zerfallen stündlich 4 %.

a. Stelle das Zerfallsgesetz in der Form $N(t) = N_0 \cdot a^t$ auf.
b. Bestimme die Halbwertszeit.
c. Bestimme zusätzlich noch das Zerfallsgesetz in der Form $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$.
d. Nach wie vielen Stunden ist nur noch 1 % der Anfangsmenge vorhanden?
e. Um wie viel Prozent verringert sich N_0 in den ersten sechs Stunden?

Bsp. 9) Ein Patient erhält 100 mg eines Wirkstoffs. Nach vier Stunden sind noch 42,5 mg im Körper vorhanden. Der Wirkstoff wird exponentiell vom Körper abgebaut.

a. Gib das Zerfallsgesetz an und stelle es für die ersten zehn Stunden nach der Einnahme graphisch dar.
b. Ermittle, wie viel mg des Wirkstoffes 13 Stunden nach der Einnahme noch vorhanden sind?
c. Wie lang dauert es, bis 97,5 % des Wirkstoffes vom Körper abgebaut werden?
d. Wie lange dauert es, bis die Hälfte des Wirkstoffes vom Körper abgebaut wird?

Bsp. 10) Die Tierpopulation der Polarwölfe hat sich in einem Resort in vier Jahren exponentiell von 190 auf 310 Tiere vergrößert.

a. Stelle das exponentielle Wachstumsgesetz auf.
b. Gib an, um wie viel % die Population jährlich anwächst.
c. Ermittle die Verdoppelungszeit.
d. Wann hat sich die Tierpopulation vom Ausgangswert (190 Tiere) verachtfacht?
e. Wie lange dauert es, bis 710 Polarwölfe im Tierresort leben?

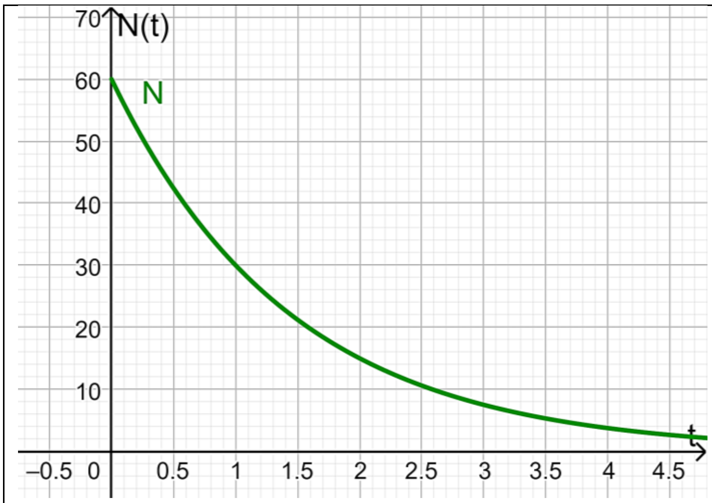
Bsp. 11) Von einem Stoff ist 12 Jahre nach Beginn der Messungen nur noch $\frac{1}{8}$ der Anfangsmenge nachweisbar. Gib die Halbwertszeit an.

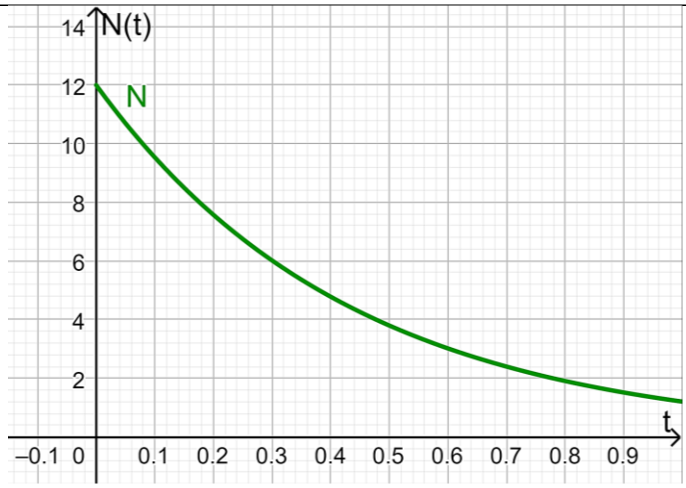
Bsp. 12) Ein Atom hat eine Halbwertszeit von 1250 Jahren. Ermittle, nach welcher Zeit 25% des Atoms zerfallen sind.

Bsp. 13) Der Holzbestand eines Waldes wurde 2010 auf 120 000 Kubikmeter geschätzt. Elf Jahre später ergab die Schätzung nur mehr 85 000 Kubikmeter. Es wird eine exponentielle Abnahme angenommen.

a. Stelle ein Wachstumsgesetz für den Holzbestand h mit $h(t) = h_0 \cdot b^t$ und $h(t) = h_0 \cdot e^{\lambda t}$ in Abhängigkeit von den seit 2010 vergangenen Jahren auf. (Bemerkung: Wählte $t = 0$ für das Jahr 2010)
b. Um wie viel Prozent sinkt der Holzbestand jährlich?
c. In welchem Jahr ist nur mehr die Hälfte des ursprünglichen Holzbestandes dar?
d. Ermittle die absolute Abnahme vom Jahr 2012 auf 2022.

Bsp. 14) Gegeben ist der Graph eines Abnahmeprozesses. Lies aus dem Graphen die Halbwertszeit ab. Die Variable t ist in Stunden gegeben.





Bsp. 15) Es ist ein radioaktives Element mit seiner Halbwertszeit gegeben. Stelle das Zerfallsgesetz für dieses Element in der Form $N(t) = N_0 \cdot b^t$ und $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$ auf.

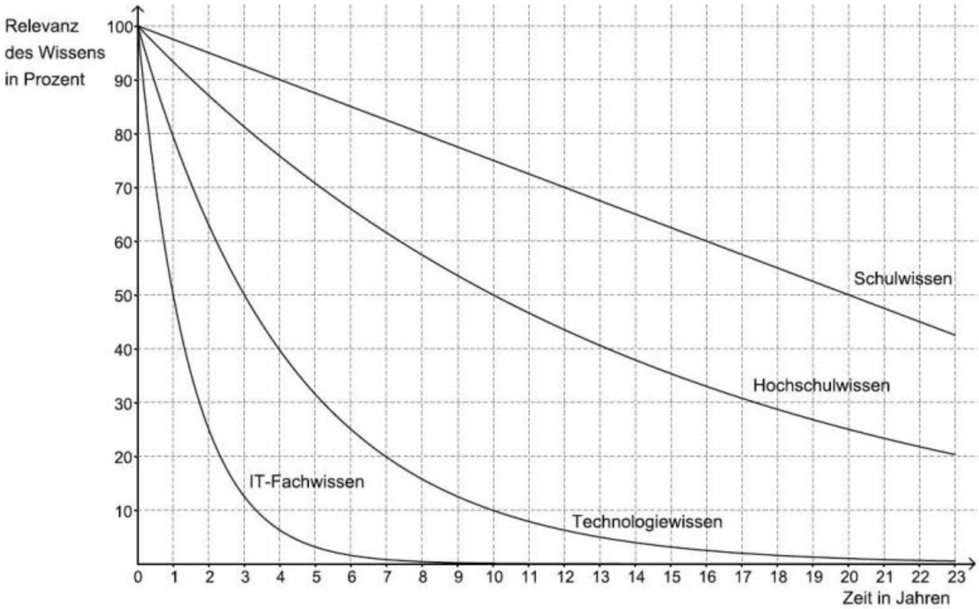
a. Element 1: 8 Tage	b. Element 2: 432 Jahre

Bsp. 16) In einer Probe waren zu Beginn 1000 Bakterien enthalten. Nach drei Minuten waren es bereits 3375 Bakterien.

a) Wie lautet die Gleichung der Exponentialfunktion $B(t)$, wenn $B(t)$ die Anzahl der Bakterien nach t Minuten angibt.
b) Wie viele Bakterien sind es nach diesen Modell nach 10 Minuten?
c) Wie lang dauert es, bis 1 000 000 Bakterien vorhanden sind?

Halbwertszeit des Wissens (b) - 2_093, FA5.1, Offenes Antwortformat

Das zu einem bestimmten Zeitpunkt erworbene Wissen verliert im Laufe der Zeit aufgrund gesellschaftlicher Veränderungen, technologischer Neuerungen etc. an Aktualität und Gültigkeit („Relevanz"). Die nachstehende Abbildung beschreibt die Abnahme der Relevanz des Wissens in verschiedenen Fachbereichen. Für jedes Jahr wird angegeben, wie viel Prozent des ursprünglichen Wissens noch relevant sind.



b) Die Relevanz von Technologiewissen nimmt mit einer Halbwertszeit von 3 Jahren exponentiell ab.

1) Stellen Sie diejenige Exponentialfunktion auf, die die Relevanz des Technologiewissens in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

c) Die Relevanz des Hochschulwissens lässt sich durch folgende Funktion N beschreiben:

$N(t) = 100 \cdot e^{-0{,}0693 \cdot t}$

t ... Zeit in Jahren
$N(t)$ ... Relevanz des Hochschulwissens zur Zeit t in % des anfänglichen Hochschulwissens

1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Relevanz des Hochschulwissens nach 7 Jahren bereits abgenommen hat.

Sonnenaufgang (a) - 2_066, FA5.3 FA5.1, Offenes Antwortformat

a) Während der Morgendämmerung wird es kontinuierlich heller. Die Beleuchtungsstärke bei klarem Himmel kann an einem bestimmten Ort in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch folgende Exponentialfunktion E beschrieben werden:

$E(t) = 80 \cdot a^t$ mit $-60 \leq t \leq 30$

t ... Zeit in min, wobei $t = 0$ der Zeitpunkt des Sonnenaufgangs ist
$E(t)$ ... Beleuchtungsstärke zur Zeit t in Lux
a ... Parameter

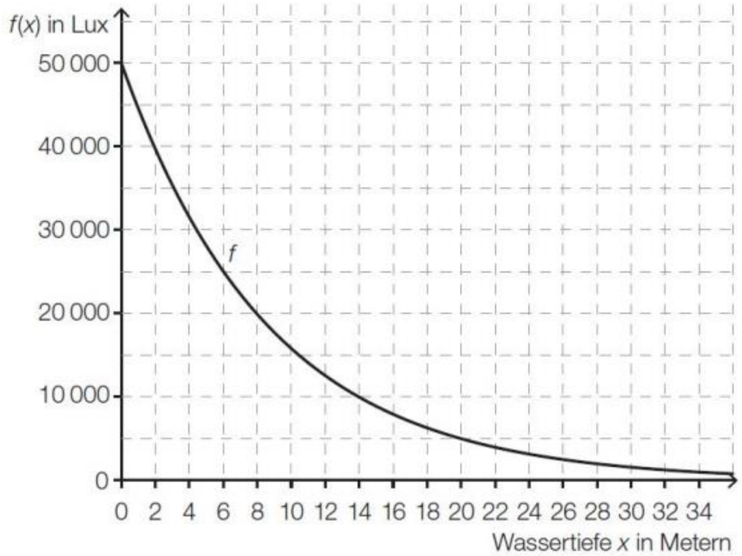
1) Interpretieren Sie die Zahl 80 in der Funktionsgleichung von E im gegebenen Sachzusammenhang.

Die Beleuchtungsstärke verdoppelt sich alle 5 min.

2) Berechnen Sie den Parameter a.

Unter Wasser (b) - 2_079, FA1.4 FA5.1, Offenes Antwortformat

b) Die Abnahme der Beleuchtungsstärke erfolgt unter Wasser exponentiell und kann näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden. Der Graph von f ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung ab, in welcher Tiefe die Beleuchtungsstärke nur mehr 10 % ihres Anfangswerts beträgt.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion f.

Wachstum von Holzbeständen (a) - 2_089, FA5.1, Offenes Antwortformat

a) Bauer Waldner weiß, dass sich der Holzbestand seines Waldes um ca. 2,7 % pro Jahr bezogen auf das jeweilige Vorjahr vermehrt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt der Holzbestand 36 000 m³.

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung für diejenige Funktion f auf, die den Holzbestand in Abhängigkeit von der Zeit in Jahren angibt.

Körperliche Leistungsfähigkeit* - 1_888, FA5.2, Offenes Antwortformat

Im Rahmen einer Studie wird jährlich die körperliche Leistungsfähigkeit bestimmter Personen untersucht. Das Ergebnis wird in Punkten angegeben. Modellhaft wird angenommen, dass diese Punktzahl mit zunehmendem Alter exponentiell abnimmt.

Lena ist eine dieser Personen. Von ihr sind folgende Daten bekannt:

Alter in Jahren	55	60
Punktzahl	1800	1650

Ermitteln Sie unter Verwendung eines exponentiellen Modells, ab welchem Alter Lena voraussichtlich höchstens 1200 Punkte erreichen wird.

Medikament* - 1_864, FA5.2, Offenes Antwortformat

Der schmerzlindernde Wirkstoff eines Medikaments wird im Körper eines bestimmten Patienten annähernd exponentiell abgebaut. Dabei nimmt die Wirkstoffmenge pro Stunde um 8 % ab. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die Wirkstoffmenge 700 Mikrogramm.

Ermitteln Sie, nach welcher Zeit (in h) die Wirkstoffmenge im Körper des Patienten auf 100 Mikrogramm gesunken ist.

Wirkstoff* - 1_696, FA5.2, Halboffenes Antwortformat

Die Abnahme der Menge des Wirkstoffs eines Medikaments im Blut lässt sich durch eine Exponentialfunktion modellieren.
Nach einer Stunde sind 10 % der Anfangsmenge des Wirkstoffs abgebaut worden.
Berechnen Sie, welcher Prozentsatz der Anfangsmenge des Wirkstoffs nach insgesamt vier Stunden noch im Blut vorhanden ist!

____________ % der Anfangsmenge

Bienenbestand* - 1_507, FA5.5, Halboffenes Antwortformat

Wegen eines Umweltgifts nimmt der Bienenbestand eines Imkers täglich um einen fixen Prozentsatz ab. Der Imker stellt fest, dass er innerhalb von 14 Tagen einen Bestandsverlust von 50 % erlitten hat.
Berechnen Sie den täglichen relativen Bestandsverlust in Prozent!

täglicher relativer Bestandsverlust: __________ %

Anzahl von Tieren* - 1_768, FA5.5, Halboffenes Antwortformat

Man nimmt an, dass sich die Anzahl der Tiere einer bestimmten Tierart auf der Erde um 1,8 % pro Jahr erhöht.

Bestimmen Sie diejenige Zeitdauer in Jahren, innerhalb der sich die Anzahl der Tiere dieser Tierart auf der Erde verdoppelt.

Zeitdauer: ca. ___________ Jahre

Dicke einer Bleischicht* - 1_576, FA5.5, Halboffenes Antwortformat

Die Intensität elektromagnetischer Strahlung nimmt bei Durchdringung eines Körpers exponentiell ab.

Die Halbwertsdicke eines Materials ist diejenige Dicke, nach deren Durchdringung die Intensität der Strahlung auf die Hälfte gesunken ist. Die Halbwertsdicke von Blei liegt für die beobachtete Strahlung bei 0,4 cm.
Bestimmen Sie diejenige Dicke d, die eine Bleischicht haben muss, damit die Intensität auf 12,5 % der ursprünglichen Intensität gesunken ist!

d = ________________________________ cm

Halbwertszeit von Cobalt-60* - 1_554, FA5.5, Offenes Antwortformat

Das radioaktive Isotop Cobalt-60 wird unter anderem zur Konservierung von Lebensmitteln und in der Medizin verwendet.
Das Zerfallsgesetz für Cobalt-60 lautet $N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}13149 \cdot t}$ mit t in Jahren; dabei bezeichnet N_0 die vorhandene Menge des Isotops zum Zeitpunkt $t = 0$ und $N(t)$ die vorhandene Menge zum Zeitpunkt $t \geq 0$.
Berechnen Sie die Halbwertszeit von Cobalt-60!

Halbwertszeit* - 1_1189, FA5.5, 2 aus 5

Die Halbwertszeit einer bestimmten radioaktiven Substanz beträgt T Jahre.
Die nach t Jahren vorhandene Menge der radioaktiven Substanz wird mit $m(t)$ bezeichnet.
Es gilt: $m(0) > 0$.

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an. *[2 aus 5]*

$m(T) = \frac{1}{2} \cdot m(0)$	☐
$m(2 \cdot T) = 0$	☐
$m(3 \cdot T) = \frac{7}{8} \cdot m(0)$	☐
$m(4 \cdot T) = \frac{1}{4} \cdot m(T)$	☐
$m(5 \cdot T) = \frac{1}{2} \cdot m(4 \cdot T)$	☐

Halbwertszeit* - 1_649, FA5.5, Offenes Antwortformat

Die Masse $m(t)$ einer radioaktiven Substanz kann durch eine Exponentialfunktion m in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.
Zu Beginn einer Messung sind 100 mg der Substanz vorhanden, nach vier Stunden misst man noch 75 mg dieser Substanz.
Bestimmen Sie die Halbwertszeit t_H dieser radioaktiven Substanz in Stunden!

Halbwertszeit* - 1_792, FA5.5, Halboffenes Antwortformat

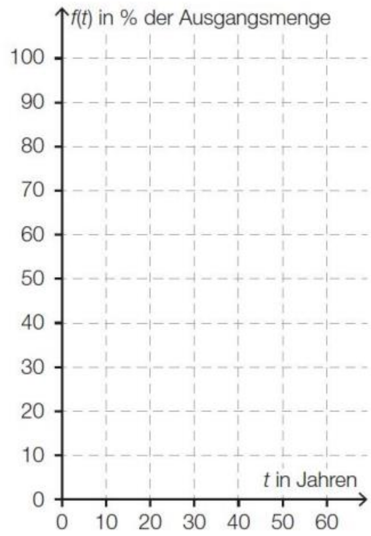
Die Funktion f mit $f(t) = 80 \cdot b^t$ mit $b \in \mathbb{R}^+$ beschreibt die Masse $f(t)$ einer radioaktiven Substanz in Abhängigkeit von der Zeit t (t in h, $f(t)$ in mg). Die Halbwertszeit der radioaktiven Substanz beträgt 4 h.
Eine Messung beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.
Berechnen Sie diejenige Masse (in mg) der radioaktiven Substanz, die nach den ersten 3 Halbwertszeiten vorhanden ist.

Halbwertszeit* - 1_816, FA5.5, Konstruktionsformat

Das radioaktive Isotop ^{137}Cs (Cäsium) hat eine Halbwertszeit von etwa 30 Jahren.

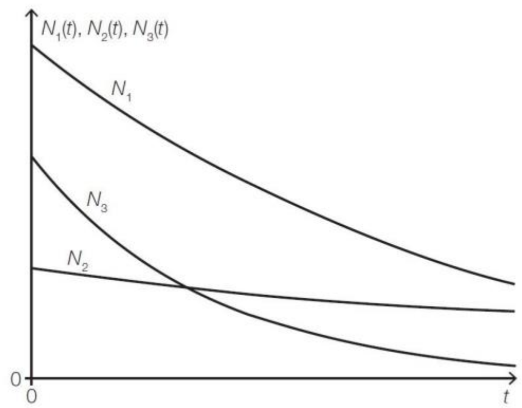
Die Funktion f gibt in Abhängigkeit von der Zeit t an, wie viel Prozent der Ausgangsmenge an ^{137}Cs noch vorhanden sind (t in Jahren, $f(t)$ in % der Ausgangsmenge).
Die zum Zeitpunkt $t = 0$ vorhandene Menge an ^{137}Cs wird als *Ausgangsmenge* bezeichnet.

Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem im Zeitintervall [0; 60] den Graphen von f ein.



Halbwertszeiten von Zerfallsprozessen* - 1_840, FA5.5, Halboffenes Antwortformat

Die drei Exponentialfunktionen N_1, N_2 und N_3 beschreiben jeweils einen Zerfallsprozess mit den zugehörigen Halbwertszeiten τ_1, τ_2 und τ_3.
Nachstehend sind Ausschnitte der Graphen dieser drei Funktionen abgebildet.

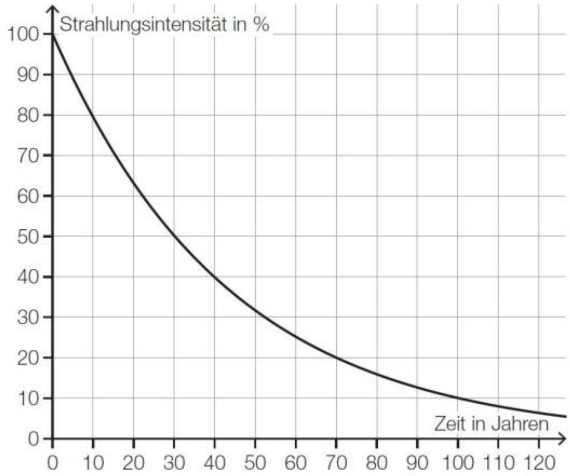


Ordnen Sie die Halbwertszeiten τ_1, τ_2 und τ_3 der Größe nach. Beginnen Sie mit der kürzesten Halbwertszeit.

_______ < _______ < _______

Halbwertszeit* - 1_865, FA5.5, Halboffenes Antwortformat

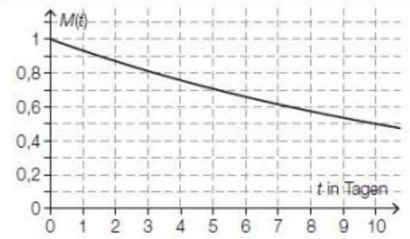
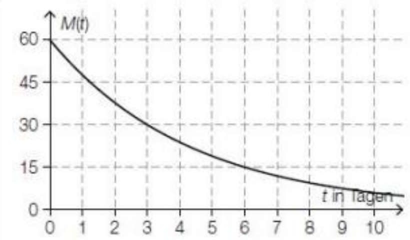
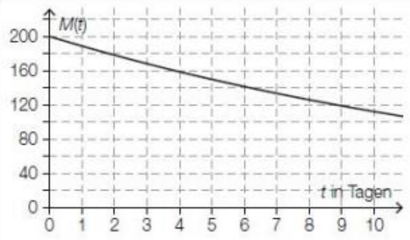
Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft die Entwicklung der Strahlungsintensität einer bestimmten radioaktiven Substanz in Abhängigkeit von der Zeit.



Geben Sie die Halbwertszeit T der Strahlungsintensität dieser radioaktiven Substanz an.

$T =$ ____________________ Jahre

Ordnen Sie den vier Graphen jeweils die entsprechende Halbwertszeit (aus A bis F) zu!

A	1 Tag
B	2 Tage
C	3 Tage
D	5 Tage
E	10 Tage
F	mehr als 10 Tage

Technetium* - 1_411, FA5.5, Offenes Antwortformat

Für eine medizinische Untersuchung wird das radioaktive Isotop $^{99m}_{43}Tc$ (Technetium) künstlich hergestellt. Dieses Isotop hat eine Halbwertszeit von 6,01 Stunden.
Geben Sie an, wie lange es dauert, bis von einer bestimmten Ausgangsmenge Technetiums nur noch ein Viertel vorhanden ist!

Halbwertszeiten* - 1_600, FA5.5, Zuordnungsformat

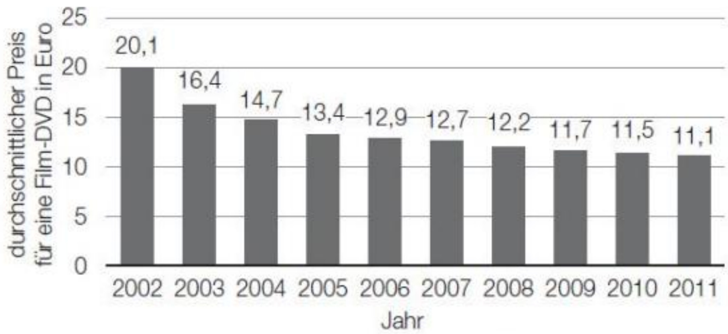
Die nachstehenden Abbildungen zeigen die Graphen von Exponentialfunktionen, die jeweils die Abhängigkeit der Menge einer radioaktiven Substanz von der Zeit beschreiben.
Dabei gibt $M(t)$ die Menge (in mg) zum Zeitpunkt t (in Tagen) an.

Speichermedien* (c) - 2_108, FA5.2, Halboffenes Antwortformat

In den letzten Jahrzehnten wurden verschiedene Speichermedien, wie zum Beispiel Speicherkarten, USB-Sticks oder DVDs, für die Sicherung von Daten verwendet.

c) Ein beliebtes Speichermedium für Filme ist die DVD.

Seit Anfang des 21. Jahrhunderts hat der durchschnittliche Preis für Film-DVDs abgenommen, wie das nachstehende Diagramm zeigt.



Datenquelle: https://www.mkdiscpress.de/ratgeber/chronik-der-speichermedien/ [20.11.2019].

Der durchschnittliche Preis für eine Film-DVD wird durch die Funktion P in Abhängigkeit von der Zeit t modelliert.

$P(t) = a \cdot b^t + 11$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2002
$P(t)$ ... durchschnittlicher Preis für eine Film-DVD zur Zeit t in Euro

1) Ermitteln Sie a und b so, dass P für die Jahre 2002 und 2011 den durchschnittlichen Preis für eine Film-DVD im jeweiligen Jahr laut obigem Diagramm ergibt.

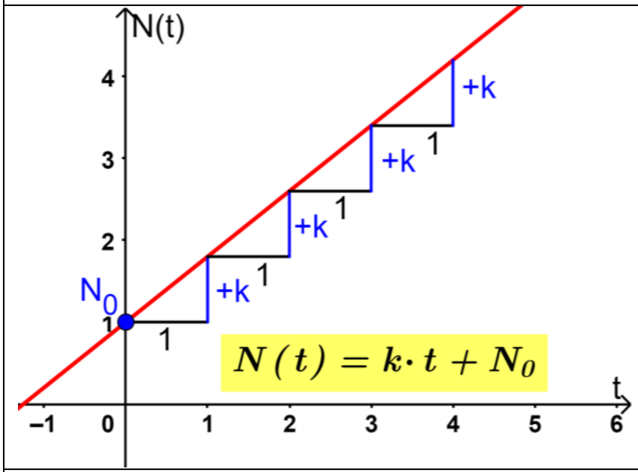
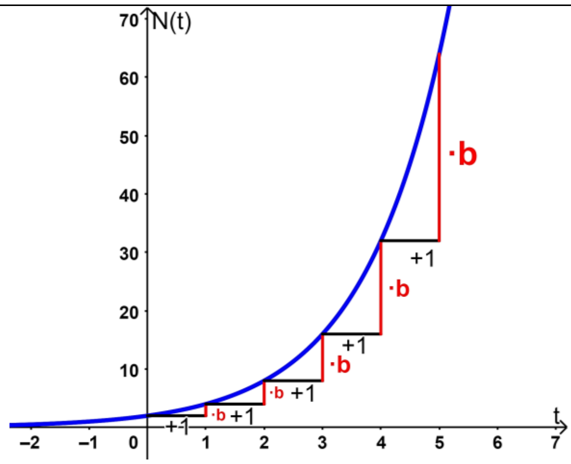
$a =$ ____________________

$b =$ ____________________

Video 5/5

4. Unterschied: Lineares und Exponentielles Wachstum

Es ist wichtig, die Unterschiede zwischen dem linearen und dem exponentiellen Wachstum zu kennen. Aus diesem Grund vergleichen wir hier die beiden Wachstumsprozesse:

Lineares Wachstum	**Exponentielles Wachstum**
Addition um konstante Zahl	Multiplikation mit einem konstanten Faktor
Pro Zeitschritt: Immer $+k$	Pro Zeitschritt: Immer $\cdot\, b$
Graph ist eine Gerade	Graph ist eine exponentielle Kurve
	
Verändert man das Argument um 1, dann verändert sich der Funktionswert um k: $N(t+1) = N(t) + k$	Verändert man das Argument um 1, dann verändert sich der Funktionswert um den Faktor b: $N(t+1) = N(t) \cdot b$
Verändert man das Argument um h, dann verändert sich der Funktionswert um $h \cdot k$: $N(t+h) = N(t) + h \cdot k$	Verändert man das Argument um h, dann verändert sich der Funktionswert um den Faktor b^h: $N(t+h) = N(t) \cdot b^h$
Die **mittlere Änderung** $\frac{N(t+h)-N(t)}{h}$ ist stets konstant und liefert immer die Steigung k.	$b = \sqrt[h]{\frac{N(t+h)}{N(t)}}$

Bsp. 17) Ordne den Situationen das **passende Wachstum** zu und bestimme jeweils k bzw. b:

1. Der Umfang eines Baumes nimmt jährlich um 7% zu:
2. Der Meeresspiegel steigt jährlich um 1,05 cm:
3. Die Bevölkerung wächst jährlich um den Faktor 1,02:
4. Der Stamm eines Baumes wird pro Jahr um 2 cm dicker:
5. Ein Kapital wird jährlich mit 3 % p.a. verzinst.
6. Der Umsatz eines Betriebes sinkt jährlich um 23 %.

Bsp. 18) Der Fahrrad-Bestand ist in Österreich von 2 991 284 Fahrrädern im Jahr 1990 auf 4 359 944 Fahrrädern im Jahr 2009 gestiegen. Wähle $t = 0$ für das Jahr 1990.

a) Die Veränderung des Fahrrad-Bestandes soll durch eine lineare Funktion modelliert werden.

− Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate des Fahrrad-Bestandes pro Jahr für den Zeitraum von 1990 bis 2009.

− Berechnen Sie, welcher PKW-Bestand im Jahr 2022 gemäß diesem Modell zu er warten wäre.

b) Die Veränderung des Fahrrad-Bestandes soll durch eine Exponentialfunktion modelliert werden.

− Stellen Sie eine Exponentialfunktion in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren auf, die diesen Sachverhalt beschreibt.

− Berechnen Sie, welcher Fahrrad-Bestand im Jahr 2022 gemäß diesem Modell zu erwarten wäre.

Bsp. 19) In der Tabelle sieht man die Entwicklung der Einwohnerzahl einer Stadt. Beschreibe den Wachstumsvorgang durch eine Funktion ($t = 0$ für das Jahr 2012) und begründe, warum du dich für dieses Modell entscheidest.

Jahr	**2012**	**2014**	**2016**	**2018**	**2020**
Einwohnerzahl	120000	173000	248500	358000	516000

Bsp. 20) In der Tabelle sieht man die Entwicklung der Einwohnerzahl einer Stadt. Beschreibe den Wachstumsvorgang durch eine Funktion ($t = 0$ für das Jahr 2012) und begründe, warum du dich für dieses Modell entscheidest.

Jahr	**2012**	**2014**	**2016**	**2018**	**2020**
Einwohnerzahl	1 000 000	1 210 000	1 420 000	1 630 000	1 840 000

Bsp. 21) In der Tabelle sieht man die Entwicklung der Einwohnerzahl einer Stadt. Beschreibe den Wachstumsvorgang durch eine (1) lineare Funktion bzw. (2) Exponentialfunktion, indem die Daten von 2009 und 2013 als Ausgangspunkte verwendet werden. Vergleiche die beiden Funktionen mit den Daten aus den Jahren 2015 und 2020. Begründe, welches Modell passender wäre. Wähle $t = 0$ für das Jahr 2009.

Jahr	**2009**	**2013**	**2015**	**2020**
Einwohnerzahl	2 340	30 495	110 000	2 800 000

Bsp. 22) Österreichs CO_2-Emissionen betrugen 79 Millionen Tonnen im Jahr 1990. Im Jahr 2006 betrugen sie 91 Millionen Tonnen. Wähle $t = 0$ für das Jahr 1990.

a. Beschreibe die Entwicklung der CO_2-Emissionen durch ein lineares und exponentielles Modell.
b. Stelle beide Modelle für den Zeitraum 2006-2040 grafisch dar und interpretiere die Eigenschaften der einzelnen Modelle.

Bsp. 23) In einer genügend großen Nährlösung befinden sich anfangs 50 Bakterien. Sie teilen sich so schnell, dass sich ihre Anzahl alle 10 Minuten verdoppelt. Ab einer Anzahl von 10 000 000 Bakterien verlangsamt sich die Anzahl der Teilungen, sodass pro Minuten 50 000 Bakterien neu gebildet werden.

a. Erstelle ein passendes mathematisches Modell für die zeitliche Entwicklung der Bakterienanzahl und verwende es, um festzustellen, wann die kritische Zahl von 10 000 000 Bakterien überschritten wird.

b. Beschreibe die Entwicklung der Bakterienanzahl nach diesem Zeitpunkt durch ein neues mathematisches Modell. Ermittle den Zeitpunkt, wann die Zahl von 12 000 000 Bakterien überschritten werden.

Änderungsprozess* - 1_599, FA5.1, 1 aus 6

Durch die Gleichung $N(t) = 1{,}2 \cdot 0{,}98^t$ wird ein Änderungsprozess einer Größe N in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben.

Welcher der angeführten Änderungsprozesse kann durch die angegebene Gleichung beschrieben werden? Kreuzen Sie den zutreffenden Änderungsprozess an!

Von einer radioaktiven Substanz zerfallen pro Zeiteinheit 0,02 % der am jeweiligen Tag vorhandenen Menge.	☐
In ein Speicherbecken fließen pro Zeiteinheit 0,02 m³ Wasser zu.	☐
Vom Wirkstoff eines Medikaments werden pro Zeiteinheit 1,2 mg abgebaut.	☐
Die Einwohnerzahl eines Landes nimmt pro Zeiteinheit um 1,2 % zu.	☐
Der Wert einer Immobilie steigt pro Zeiteinheit um 2 %.	☐
Pro Zeiteinheit nimmt die Temperatur eines Körpers um 2 % ab.	☐

Baumwachstum (a) - 2_010, FA5.1 FA5.2, Halboffenes Antwortformat Offenes Antwortformat

Die nachstehende Tabelle enthält Messwerte des Umfangs eines bestimmten Baumstamms in Abhängigkeit von seinem Alter.

Alter t (in Jahren)	25	50	75	100
Umfang u (in Metern)	0,462	1,256	2,465	3,370

Dieser Zusammenhang kann durch eine Wachstumsfunktion u modelliert werden, wobei der Wert $u(t)$ den Umfang zum Zeitpunkt t angibt.

a) Für die ersten 50 Jahre soll die Zunahme des Umfangs mit einer Exponentialfunktion f mit $f(t) = a \cdot b^t$ in Abhängigkeit von der Zeit t modelliert werden.

1) Geben Sie a und b so an, dass f mit den in der obigen Tabelle angegebenen Werten für ein Alter von 25 und 50 Jahren übereinstimmt.

$a =$ ____________________

$b =$ ____________________

2) Begründen Sie rechnerisch, warum dieses Modell für die darauffolgenden 25 Jahre nicht angemessen ist.

Bevölkerungwachstum in Afrika* (c) - 2_083, FA5.1 FA5.5, Offenes Antwortformat

Afrika hatte Ende 2018 eine Bevölkerung von ca. 1,3 Milliarden Menschen und verzeichnet derzeit das stärkste Bevölkerungswachstum aller Kontinente.

c) Die nachstehende Tabelle zeigt die Bevölkerungsentwicklung in Nigeria im Zeitraum von 1980 bis 2010.

Kalenderjahr	1980	1990	2000	2010
Bevölkerungszahl in Millionen	73,5	95,3	122,4	158,6

1) Zeigen Sie anhand der Tabelle, dass die Bevölkerungszahl im Zeitraum von 1980 bis 2010 annähernd exponentiell zugenommen hat.

Nehmen Sie an, dass die Bevölkerungszahl von Nigeria weiterhin in dieser Art exponentiell wachsen wird.

2) Geben Sie unter Verwendung der Daten aus den beiden Kalenderjahren 2000 und 2010 an, in welchem Kalenderjahr die Bevölkerungszahl Nigerias erstmals mehr als 360 Millionen betragen wird.

Wachstum einer Population* - 1_531, FA5.3, Halboffenes Antwortformat

Die Größe einer Population wird in Abhängigkeit von der Zeit mithilfe der Funktion N mit $N(t) = N_0 \cdot e^{0,1188 \cdot t}$ beschrieben, wobei die Zeit t in Stunden angegeben wird. Dabei bezeichnet N_0 die Größe der Population zum Zeitpunkt $t = 0$ und $N(t)$ die Größe der Population zum Zeitpunkt $t \geq 0$.

Bestimmen Sie denjenigen Prozentsatz p, um den die Population pro Stunde wächst!

$p \approx$ __________ %

Zellkulturen* - 1_624, FA5.3, Zuordnungsformat

Im Rahmen eines biologischen Experiments werden sechs Zellkulturen günstigen und ungünstigen äußeren Bedingungen ausgesetzt, wodurch die Anzahl der Zellen entweder exponentiell zunimmt oder exponentiell abnimmt.
Dabei gibt $N_i(t)$ die Anzahl der Zellen in der jeweiligen Zellkultur t Tage nach Beginn des Experiments an ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).
Ordnen Sie den vier beschriebenen Veränderungen jeweils die zugehörige Funktionsgleichung (aus A bis F) zu!

Die Anzahl der Zellen verdoppelt sich pro Tag.	
Die Anzahl der Zellen nimmt pro Tag um 85 % zu.	
Die Anzahl der Zellen nimmt pro Tag um 85 % ab.	
Die Anzahl der Zellen nimmt pro Tag um die Hälfte ab.	

A	$N_1(t) = N_1(0) \cdot 0,15^t$
B	$N_2(t) = N_2(0) \cdot 0,5^t$
C	$N_3(t) = N_3(0) \cdot 0,85^t$
D	$N_4(t) = N_4(0) \cdot 1,5^t$
E	$N_5(t) = N_5(0) \cdot 1,85^t$
F	$N_6(t) = N_6(0) \cdot 2^t$

Weltbevölkerung* (a) - 2_115, FA5.3, Offenes Antwortformat

In der nachstehenden Tabelle ist für bestimmte Kalenderjahre die Schätzung der Weltbevölkerung (jeweils zur Jahresmitte) angegeben.

Kalenderjahr	Weltbevölkerung in Milliarden
1850	1,260
1900	1,650
1950	2,536
1960	3,030
1970	3,700
1990	5,327
2000	6,140
2010	6,957
2020	7,790

Datenquellen: https://de.statista.com/statistik/daten/studie/1694/umfrage/entwicklung-der-weltbevoelkerungszahl/, https://www.statistik.at/web_de/statistiken/menschen_und_gesellschaft/bevoelkerung/internationale_uebersich/036446.html [17.05.2020].

a) Im Zeitraum von 1850 bis 1950 hat sich die Weltbevölkerung annähernd verdoppelt. Nehmen Sie für diesen Zeitraum an, dass die Weltbevölkerung jährlich um den gleichen Prozentsatz gewachsen ist.

1) Berechnen Sie diesen Prozentsatz. *[0/1 P.]*

Bevölkerungszahl* - 1_889, FA5.6, 2 aus 5

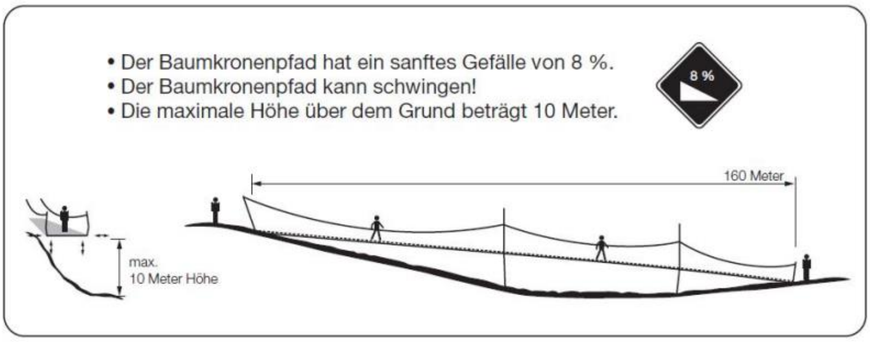
Es wurde erhoben, wie sich die Bevölkerungszahl in verschiedenen Städten in den vergangenen fünf Jahren verändert hat.
Zwei der unten angeführten Situationen können als exponentielles Wachstum der jeweiligen Bevölkerungszahl beschrieben werden.

Kreuzen Sie die beiden Situationen an, die jeweils mithilfe einer Exponentialfunktion angemessen beschrieben werden können. *[2 aus 5]*

Die Bevölkerungszahl nahm jedes Jahr um $\frac{1}{10}$ der Bevölkerungszahl des jeweiligen Vorjahres zu.	☐
Die Bevölkerungszahl hat im ersten Jahr um 10000, im zweiten um 20000, im dritten um 30000, im vierten um 40000 und im letzten Jahr um 50000 zugenommen.	☐
Die Bevölkerungszahl war jedes Jahr um 5 % größer als im jeweiligen Vorjahr.	☐
Die Bevölkerungszahl war jedes Jahr um 20000 größer als im jeweiligen Vorjahr.	☐
Die Bevölkerungszahl war in den ersten zwei Jahren jedes Jahr um 5 % größer als im jeweiligen Vorjahr, dann jedes Jahr um 15 % größer als im jeweiligen Vorjahr.	☐

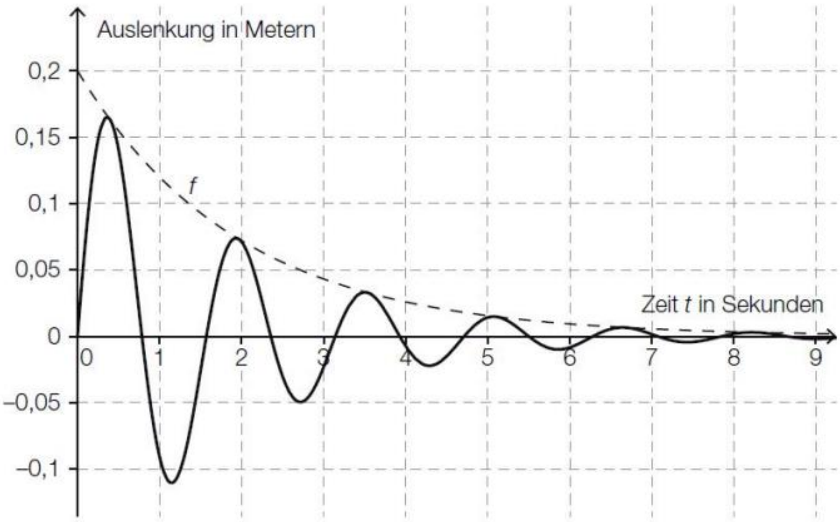
Baumkronenpfad (b) - 2_076, FA5.1 FA5.3, Offenes Antwortformat

Der *Baumkronenpfad* ist eine Brückenstrecke durch einen Teil des Schönbrunner Tiergartens.



b) Auf dem Schild zum Baumkronenpfad ist zu lesen: „Der Baumkronenpfad kann schwingen!"

In der nachstehenden Grafik ist das Auf-und-ab-Schwingen des Baumkronenpfads an einer bestimmten Stelle dargestellt.



In der obigen Grafik ist die sogenannte „Einhüllende" strichliert eingezeichnet. Es handelt sich dabei um eine Funktion *f* mit $f(t) = c \cdot a^t$.

1) Lesen Sie aus der Grafik den Parameter *c* ab.
2) Begründen Sie mathematisch, warum für den Parameter *a* dieser Funktion *f* gilt: $0 < a < 1$.

Tee* (a) - 2_097, FA5.6 FA5.2, Offenes Antwortformat

Tee ist weltweit eines der meistkonsumierten Getränke.

a) Modellhaft wird angenommen, dass der Pro-Kopf-Verbrauch von Tee in Österreich jedes Jahr im Vergleich zum jeweiligen Vorjahr um den gleichen Prozentsatz steigt.

Unter dieser Annahme gibt die Funktion f den jährlichen Pro-Kopf-Verbrauch von Tee in Österreich ab 2016 in Abhängigkeit von der Zeit t an (t in Jahren, $f(t)$ in Litern).

1) Geben Sie an, um welchen Funktionstyp es sich bei f handelt.

Der jährliche Pro-Kopf-Verbrauch von Tee lag in Österreich im Jahr 2016 bei 33 L. Der Anteil des Tees, der in Österreich im Jahr 2016 mittels Teebeuteln zubereitet wurde, beträgt 95 %.

Es werden folgende Annahmen getroffen:

- Der Pro-Kopf-Verbrauch von Tee in Österreich steigt seit dem Jahr 2016 jedes Jahr im Vergleich zum jeweiligen Vorjahr um 2 %.
- Der Anteil des Tees, der in Österreich jedes Jahr mittels Teebeuteln zubereitet wird, bleibt gleich.

2) Geben Sie an, wie viele Liter Tee im Jahr 2026 unter den oben angeführten Annahmen pro Kopf in Österreich mittels Teebeuteln zubereitet werden.