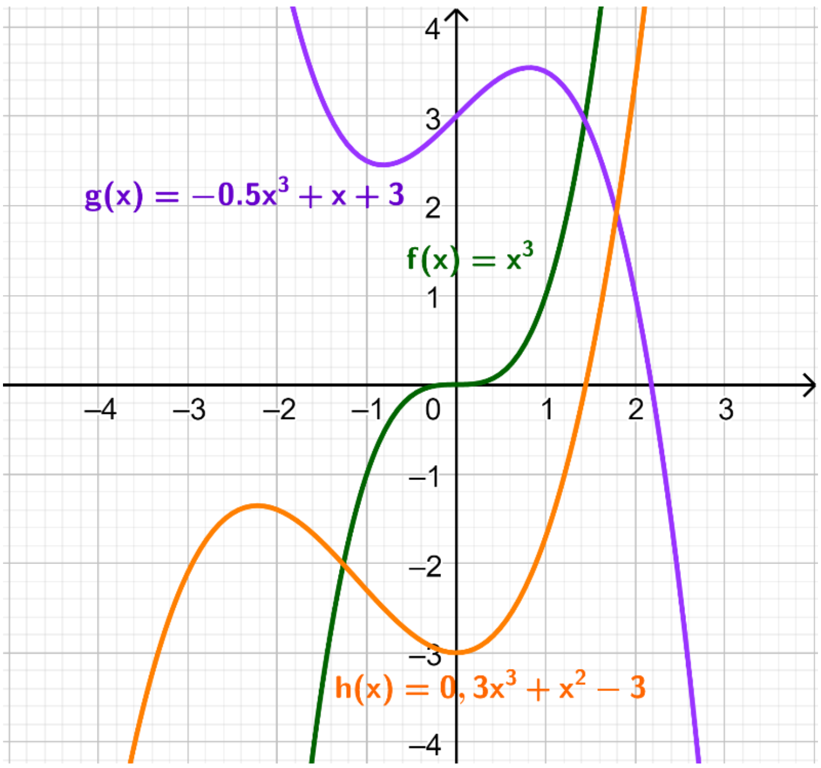
FA4 Polynomfunktionen

Maturaskript AHS (8 Seiten)

Grundkompetenz:

- **FA4.1** typische Verläufe von Graphen in Abhängigkeit vom Grad der Polynomfunktion (er)kennen
- **FA4.2** zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen von Zusammenhängen dieser Art wechseln können
- **FA4.3** aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Polynomfunktionen Funktionswerte, aus Tabellen und Graphen sowie aus einer quadratischen Funktionsgleichung Argumentwerte ermitteln können
- **FA4.4** den Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der (möglichen) Null-, Extrem- und Wendestellen wissen



Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Prof. Tegischer

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

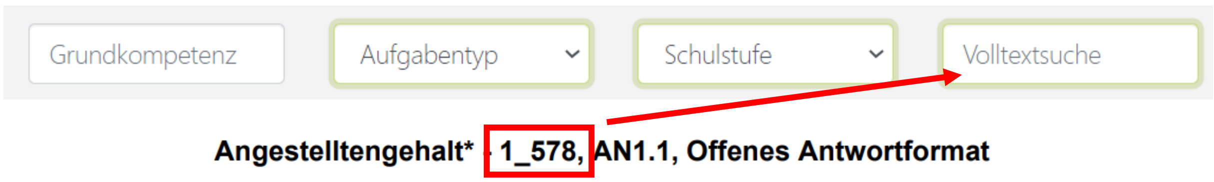
Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=M
2) Gib im Feld „**Volltextsuche**“ die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.



Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. 1_578) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**“ und „**GeoGebra**“ erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**“ erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln	**Weitere Regeln für Lehrpersonen**
▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen. ▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen. ▪ Sie dürfen mein Materialen **NICHT** gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden. ▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden. ▪ Bei einem **Missbrauch** erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.	**WICHTIGSTE REGEL:** LehrerInnen dürfen die Materialien in **Ihrem eigenen Unterricht** verwenden: ▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen. ▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben. ▪ Es ist **nicht erlaubt**, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben. ▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

FA4 Polynomfunktionen

Polynomfunktionen sind Funktionen, die aus **Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten zusammengesetzt** sind. Die allgemeine Funktionsgleichung einer Polynomfunktion **n-ten Grades** lautet:

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x^1 + a_0 \;\; mit\; a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0 \; und \; n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

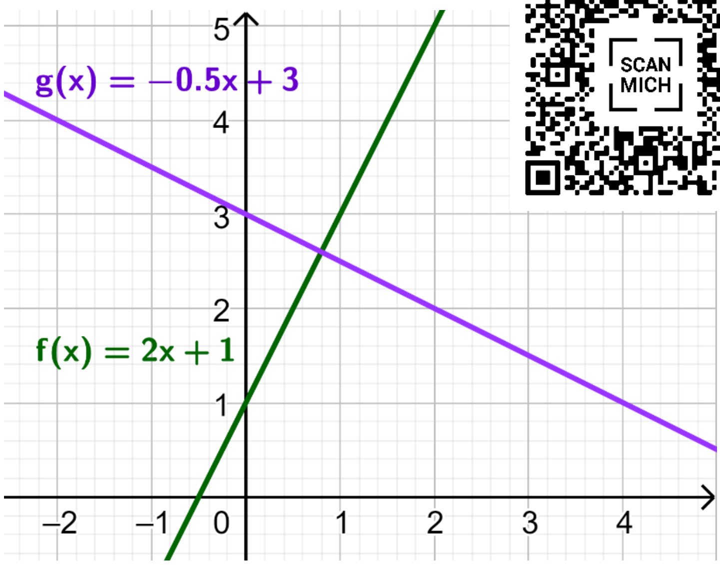
- der **höchste Exponent n** gibt dabei den "**Grad**" des **Polynoms** an.
- a_0 ist der **konstante Term** (da keine Variable dabei steht) und gibt an, in welchem Abstand vom Ursprung die **y-Achse** geschnitten wird **(=y-Abschnitt**) (Vergleiche Lineare Funktionen: da ist a_0 der Ordinatenabschnitt d).

Polynomfunktion 1. Grades (=Lineare Funktion)

Video

$$f(x) = k \cdot x + d$$

- **Graph:** Gerade
- **Parameter k = Steigung**
- **Parameter d = y-Abschnitt**

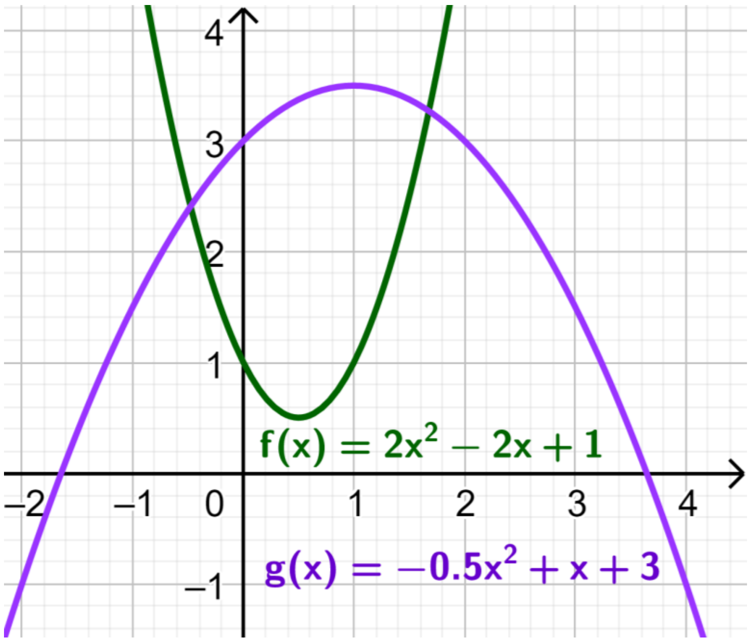


Polynomfunktion 2. Grades (=Quadratische Funktion)

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Hauptform

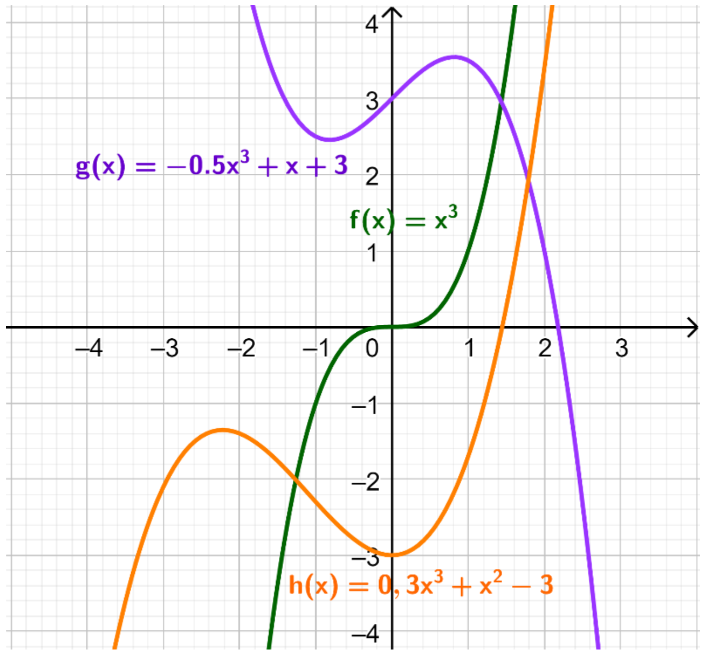
- **Graph:** Parabel
- $\boldsymbol{a > 0}$**:** Parabel nach oben geöffnet
- $\boldsymbol{a < 0}$**:** Parabel nach unten geöffnet
- **Parameter c:** Schnittunkt mit der y-Achse



Polynomfunktion 3. Grades

$$f(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

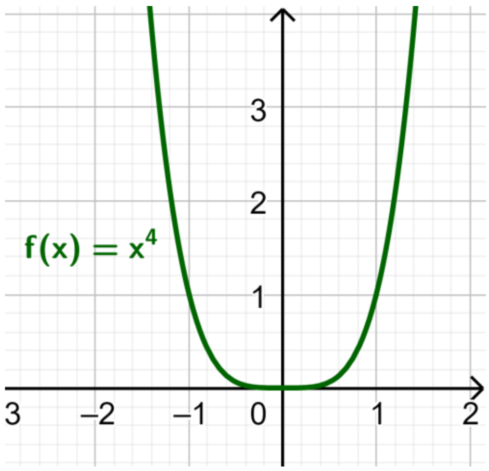
Die **Graphen** haben stets die **Form einer S-Kurve**. Es sind auch Graphen möglich, bei denen diese Form nicht mehr so deutlich auffällt.

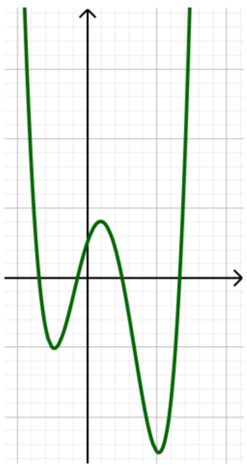


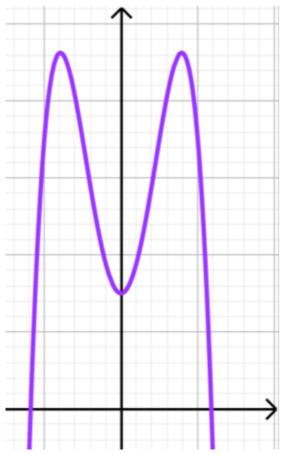
Polynomfunktion 4. Grades

$$f(x) = a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

Die **Graphen** haben stets die **Form einer „Doppel-S-Kurve“**. Es sind auch Graphen möglich, bei denen diese Form nicht mehr so deutlich auffällt.







Nullstellen und Extremstellen von Polynomfunktionen

Eine Polynomfunktion n-ten Grades besitzt:

- **höchstens n Nullstellen.**
  - ➔ Polynomfunktionen vom Grad 1, 3, 5, usw. haben stets **mindestens eine reelle** Nullstelle.
  - ➔ Polynomfunktionen vom Grad 2, 4, 6, usw. **müssen nicht unbedingt** eine reelle Nullstelle haben. Es kann z.B. sein, dass bei einer Funktion vom Grad 2 der Graph der Parabel nach oben verschoben ist (Bsp: $f(x) = x^2 + 2$) und die x-Achse somit nicht geschnitten wird.
- **höchstens n-1 Extremstellen (Grad 2,4,6..: mindestens 1, Grad 1,3,5..: kann auch keine haben).**
- **höchstens n-2 Wendestellen. (Grad 2,4,6..: kann keine haben, Grad 1,3,5..: mindestens 1)**

Symmetrie

Der Graph einer Polynomfunktion ist

- **symmetrisch** bezüglich der **y-Achse**, wenn alle auftretenden Exponenten **gerade** sind.
- **punktsymmetrische** bezüglich des **Ursprungs**, wenn alle auftretenden Exponenten **ungerade** sind.

Eigenschaften einer Polynomfunktion* - 1_436, FA4.4, 2 aus 5

Eine reelle Funktion f mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$) heißt Polynomfunktion dritten Grades.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Jede Polynomfunktion dritten Grades hat immer zwei Nullstellen.	☐
Jede Polynomfunktion dritten Grades hat genau eine Wendestelle.	☐
Jede Polynomfunktion dritten Grades hat mehr Nullstellen als lokale Extremstellen.	☐
Jede Polynomfunktion dritten Grades hat mindestens eine lokale Maximumstelle.	☐
Jede Polynomfunktion dritten Grades hat höchstens zwei lokale Extremstellen.	☐

Eigenschaften einer Polynomfunktion* - 1_647, FA4.4, 2 aus 5

Gegeben ist eine Polynomfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$).
Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf die Funktion f für beliebige Werte von a, b, c und d auf jeden Fall zutreffen.

Die Funktion f hat genau einen Schnittpunkt mit der x-Achse.	☐
Die Funktion f hat höchstens zwei lokale Extremstellen.	☐
Die Funktion f hat höchstens zwei Punkte mit der x-Achse gemeinsam.	☐
Die Funktion f hat genau eine Wendestelle.	☐
Die Funktion f hat mindestens eine lokale Extremstelle.	☐

Symmetrische Polynomfunktion* - 1_388, FA4.4, Offenes Antwortformat

Der Graph einer zur senkrechten Achse symmetrischen Polynomfunktion f hat den lokalen Tiefpunkt $T = (3|-2)$.
Begründen Sie, warum die Polynomfunktion f mindestens 4. Grades sein muss!

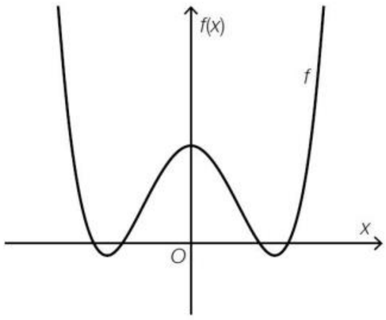
Eigenschaften von Polynomfunktionen 3. Grades* - 1_460, FA4.4, 2 aus 5

Eine Polynomfunktion 3. Grades hat allgemein die Form $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.
Welche der folgenden Eigenschaften treffen für Polynomfunktionen 3. Grades zu?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Antworten an!

Es gibt Polynomfunktionen 3. Grades, die keine lokale Extremstelle haben.	☐
Es gibt Polynomfunktionen 3. Grades, die keine Nullstelle haben.	☐
Es gibt Polynomfunktionen 3. Grades, die mehr als eine Wendestelle haben.	☐
Es gibt Polynomfunktionen 3. Grades, die keine Wende-stelle haben.	☐
Es gibt Polynomfunktionen 3. Grades, die genau zwei verschiedene reelle Nullstellen haben.	☐

Grad einer Polynomfunktion* - 1_887, FA4.4, Offenes Antwortformat

Nachstehend ist der Graph der Polynomfunktion *f* abgebildet. Außerhalb des dargestellten Bereichs hat *f* keine Null-, keine Extrem- und keine Wendestellen.



Begründen Sie, warum der Grad von *f* mindestens 4 sein muss.

Begründen Sie, warum es sich bei der dargestellten Funktion nicht um eine Polynomfunktion dritten Grades handeln kann!

Polynomfunktion* - 1_815, FA4.4, Lückentext

Zwischen dem Grad einer Polynomfunktion und der Anzahl der reellen Nullstellen, der lokalen Extremstellen und der Wendestellen besteht ein Zusammenhang.

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

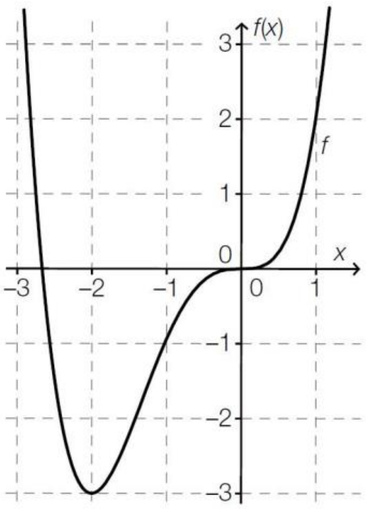
Jede Polynomfunktion ___①___ hat ___②___.

①	
4. Grades	☐
5. Grades	☐
6. Grades	☐

②	
mindestens zwei verschiedene lokale Extremstellen	☐
mindestens zwei verschiedene reelle Nullstellen	☐
mindestens eine Wendestelle	☐

Polynomfunktion vom Grad n* - 1_508, FA4.4, Lückentext

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion *f*. Alle charakteristischen Punkte des Graphen (Schnittpunkte mit den Achsen, Extrempunkte, Wendepunkte) sind in dieser Abbildung enthalten.



Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

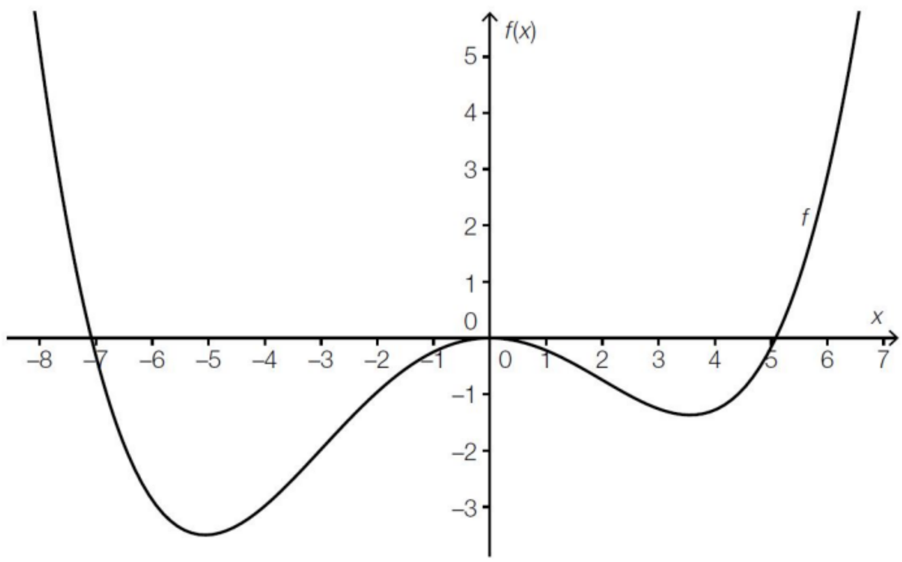
Die Polynomfunktion *f* ist vom Grad ____①____, weil *f* genau ____②____ hat.

①	
$n < 3$	☐
$n = 3$	☐
$n > 3$	☐

②	
eine Extremstelle	☐
zwei Wendestellen	☐
zwei Nullstellen	☐

Polynomfunktion* - 1_623, FA4.4, Offenes Antwortformat

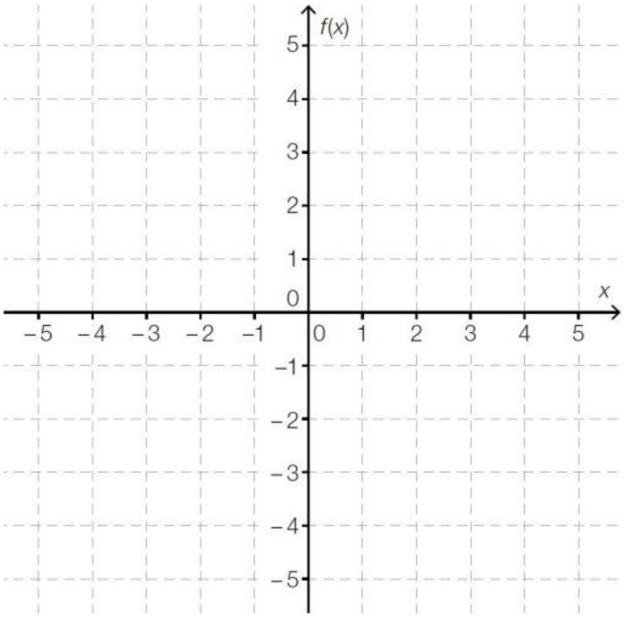
Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion *f*.



Begründen Sie, warum es sich bei der dargestellten Funktion nicht um eine Polynomfunktion dritten Grades handeln kann!

Polynomfunktionen dritten Grades* - 1_671, FA4.4, Konstruktionsformat

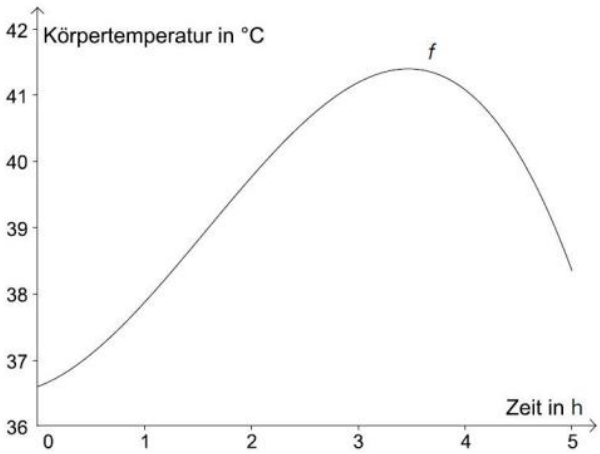
Eine Polynomfunktion dritten Grades ändert an höchstens zwei Stellen ihr Monotonieverhalten.
Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen einer Polynomfunktion dritten Grades f, die an den Stellen $x = -3$ und $x = 1$ ihr Monotonieverhalten ändert!



Ganzkörperhyperthermie (b) - 2_092, AN3.3 FA4.4, Offenes Antwortformat

Bei einem Therapieverfahren wird die Körpertemperatur bewusst stark erhöht (künstliches Fieber). Die nebenstehende Grafik dokumentiert näherungsweise den Verlauf des künstlichen Fiebers bei einer solchen Behandlung.

Die Funktion f beschreibt den Zusammenhang zwischen Zeit und Körpertemperatur:



$f(t) = -0{,}18 \cdot t^3 + 0{,}85 \cdot t^2 + 0{,}6 \cdot t + 36{,}6$

t ... Zeit in Stunden (h) mit $0 \leq t \leq 5$
$f(t)$ ... Körpertemperatur zur Zeit t in °C

b) 1) Dokumentieren Sie, wie die maximale Körpertemperatur im angegebenen Zeitintervall mithilfe der Differenzialrechnung berechnet werden kann.

2) Begründen Sie, warum der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades höchstens 2 Extrempunkte haben kann.

Ungerade Funktion* - 1_1188, FA4.1, Offenes Antwortformat

Für die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x^n$ ($a \in \mathbb{R}, a \neq 0$) mit ungeradem $n \in \mathbb{N}$ ist die nachstehende Wertetabelle gegeben.

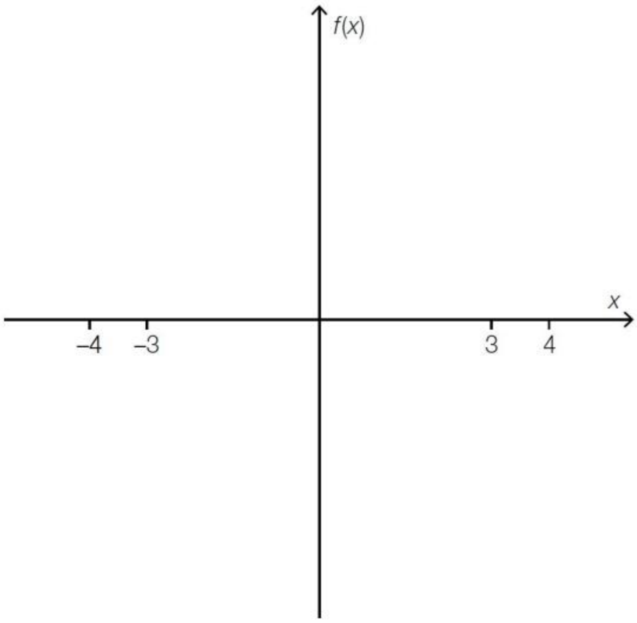
x	-2	0	2
$f(x)$	v	0	w

Dabei sind $v, w \in \mathbb{R}$.

Geben Sie den Zusammenhang zwischen v und w in Form einer Gleichung an.

Verlauf einer Polynomfunktion vierten Grades* - 1_695, FA4.1, Konstruktionsformat

Es gibt Polynomfunktionen vierten Grades, die genau drei Nullstellen x_1, x_2 und x_3 mit $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ und $x_1 < x_2 < x_3$ haben.
Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem im Intervall $[-4; 4]$ den Verlauf des Graphen einer solchen Funktion f mit allen drei Nullstellen im Intervall $[-3; 3]$!



Negative Funktionswerte* - 1_555, FA4.3, Offenes Antwortformat

Gegeben ist die Gleichung einer reellen Funktion f mit $f(x) = x^2 - x - 6$. Einen Funktionswert $f(x)$ nennt man negativ, wenn $f(x) < 0$ gilt.
Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, deren zugehöriger Funktionswert $f(x)$ negativ ist!

Kostenfunktion* (d) - 2_052, FA4.3 FA1.4, Offenes Antwortformat

d) Für ein weiteres Produkt dieses Herstellers sind in der nachstehenden Tabelle die Produktionskosten (in GE) für verschiedene Produktionsmengen (in ME) dargestellt.

Produktionsmenge (in ME)	50	100	250		500
Produktionskosten (in GE)	197	253	308	380	700

Diese Produktionskosten können durch eine Polynomfunktion dritten Grades K_1 mit $K_1(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ modelliert werden.

1) Bestimmen Sie die Werte von a, b, c und d.

2) Berechnen Sie die in der obigen Tabelle fehlende Produktionsmenge.

Kugelstoßen (c) - 2_070, FA4.3, Offenes Antwortformat

Kugelstoßen ist eine Disziplin bei den Olympischen Sommerspielen.
Eine Metallkugel muss so weit wie möglich aus einem Kreis in einen vorgegebenen Aufschlagbereich gestoßen werden.

c) Die Bahnkurve einer gestoßenen Kugel lässt sich näherungsweise durch den Graphen der quadratischen Funktion h beschreiben:

$h(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 0{,}75 \cdot x + 2$ mit $x \geq 0$

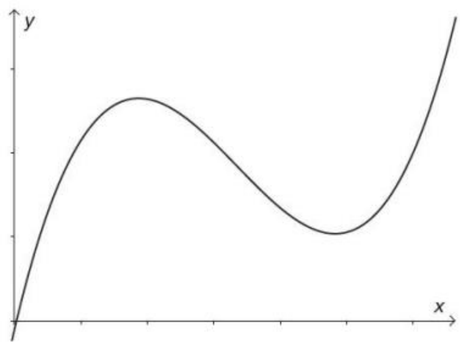
x ... horizontale Entfernung der Kugel von der Abstoßstelle in m
$h(x)$ ... Höhe der Kugel über dem Boden bei der horizontalen Entfernung x in m

1) Ermitteln Sie, in welcher horizontalen Entfernung von der Abstoßstelle die Kugel auf dem Boden aufschlägt.

Vergnügungspark (b) - 2_088, FA4.4, Offenes Antwortformat

Ein kürzlich eröffneter Vergnügungspark ist ein beliebtes Ausflugsziel in der Region.

b) Eine der Hauptattraktionen ist die Hochschaubahn. Ein Teilstück kann durch die Polynomfunktion modelliert werden, deren Graph in der folgenden Abbildung zu sehen ist:



1) Erklären Sie, welchen Grad diese Polynomfunktion mindestens haben muss.