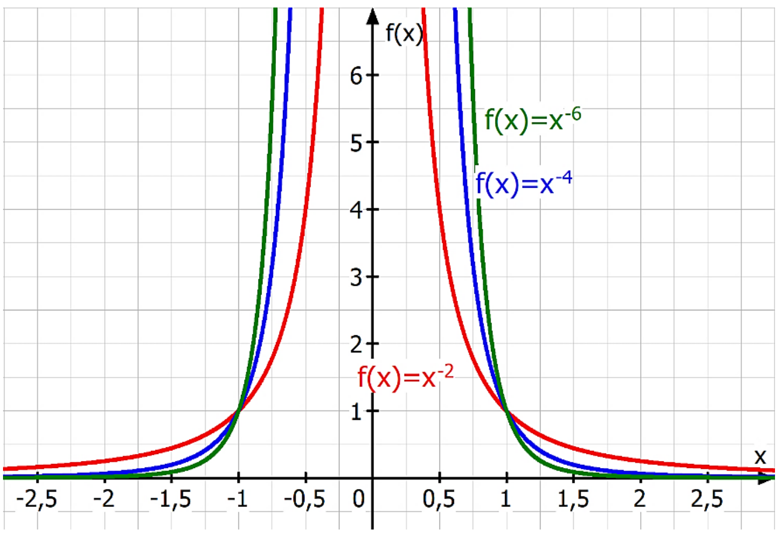
FA3 – Potenzfunktionen

Maturaskript AHS (15 Seiten)

Grundkompetenzen:

- **FA3.1** verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge dieser Art als entsprechende Funktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
- **FA3.2** aus Tabellen, Graphen und Gleichungen dieser Funktionen Werte(paare) sowie die Parameter a und b ermitteln und im Kontext deuten können
- **FA3.3** die Wirkung der Parameter a und b kennen und die Parameter im Kontext deuten können
- **FA3.4** indirekte Proportionalität als Potenzfunktion beschreiben können



Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Prof. Tegischer

<u>Allgemeine Informationen zum Maturaskript</u>

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

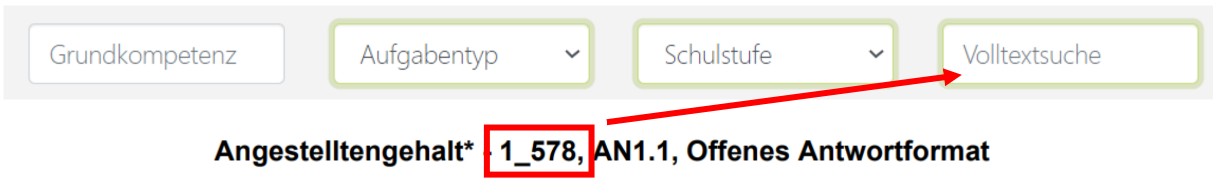
Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=M

2) Gib im Feld „**Volltextsuche**“ die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.



<u>Quellennachweis:</u>

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. 1_578) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**“ und „**GeoGebra**“ erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**“ erstellt.

<u>Lizenzbedingungen:</u>

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln	**Weitere Regeln für Lehrpersonen**
▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen. ▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen. ▪ Sie dürfen mein Materialen **NICHT** gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden. ▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden. ▪ Bei einem **Missbrauch** erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.	**WICHTIGSTE REGEL:** LehrerInnen dürfen die Materialien in **Ihrem eigenen Unterricht** verwenden: ▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen. ▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben. ▪ Es ist **nicht erlaubt**, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben. ▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **<u>Instagram</u>** (**prof. tegischer**) oder per **<u>Mail</u>** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

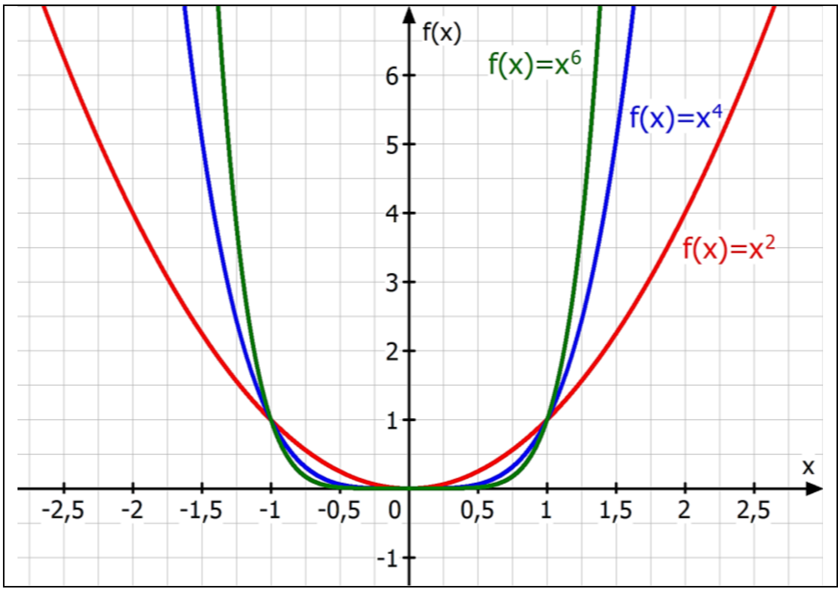
FA3 Potenzfunktionen

Eine reelle Funktion der Form $f(x) = a \cdot x^r \ \ (a, r \ \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ nennt man **Potenzfunktion**.

Video

Bei Potenzfunktionen hängen die Eigenschaften sowie die Definitionsmenge der Funktion vom Exponenten ab. Wir betrachten folgende Fälle:

1.1 Potenzfunktionen mit geraden natürlichen Exponenten $(\boldsymbol{r} \in \mathbb{N}_{\boldsymbol{g}})$

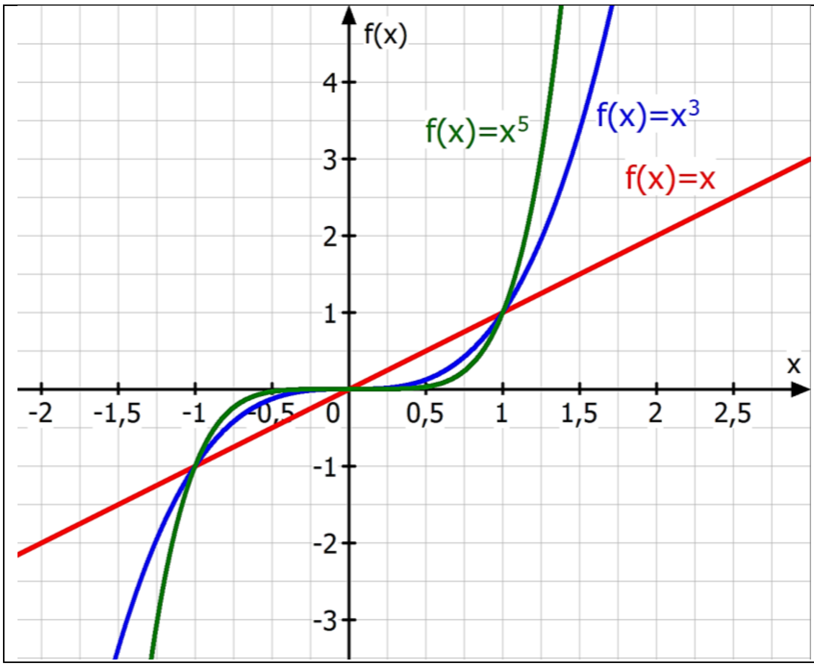


Eigenschaften

- **Definitionsmenge** $D = \mathbb{R}$
- für $x \leq 0$: streng monoton **fallend**
- für $x \geq 0$: streng monoton **steigend**
- **symmetrisch** bezüglich der y-Achse (gerade Funktion)
- Alle Graphen gehen durch folgende drei **Punkte**:

$$P_1 = (-1|1)$$
$$P_2 = (0|0)$$
$$P_3 = (1|1)$$

1.2 Potenzfunktionen mit ungeraden natürlichen Exponenten $(\boldsymbol{r} \in \mathbb{N}_{\boldsymbol{u}})$



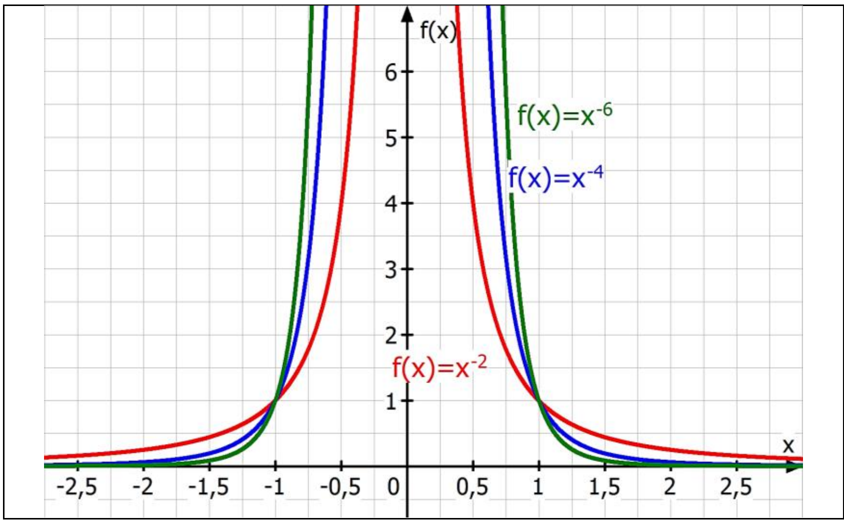
Eigenschaften

- **Definitionsmenge** $D = \mathbb{R}$
- für alle x: streng monoton **steigend**
- **punktsymmetrisch** bezüglich des Ursprungs (ungerade Funktion)
- Alle Graphen gehen durch folgende drei **Punkte**:

$$P_1 = (-1|-1)$$
$$P_2 = (0|0)$$
$$P_3 = (1|1)$$

1.3 Potenzfunktionen mit geraden negativen Exponenten

$$z.B.: \ f(x) = x^{-4} = \frac{1}{x^4} \quad \rightarrow \quad D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

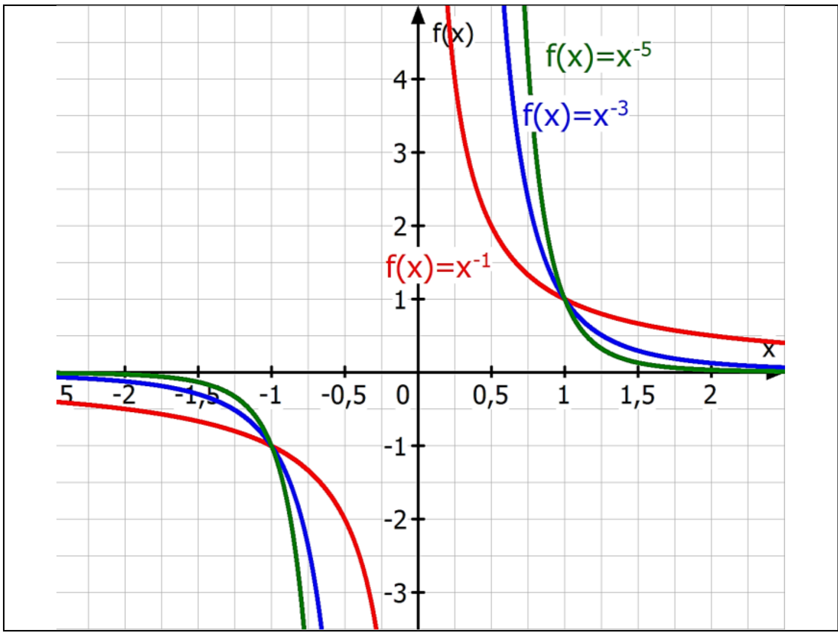


Eigenschaften

- **Definitionsmenge** $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
- für $x < 0$: streng monoton **steigend**
- für $x > 0$: streng monoton **fallend**
- für $x = 0$: nicht definiert
- **symmetrisch** bezüglich der y-Achse (gerade Funktion)
- Alle Graphen gehen durch folgende zwei **Punkte**:

$$P_1 = (-1|1)$$
$$P_2 = (1|1)$$

1.4 Potenzfunktionen mit ungeraden negativen Exponenten



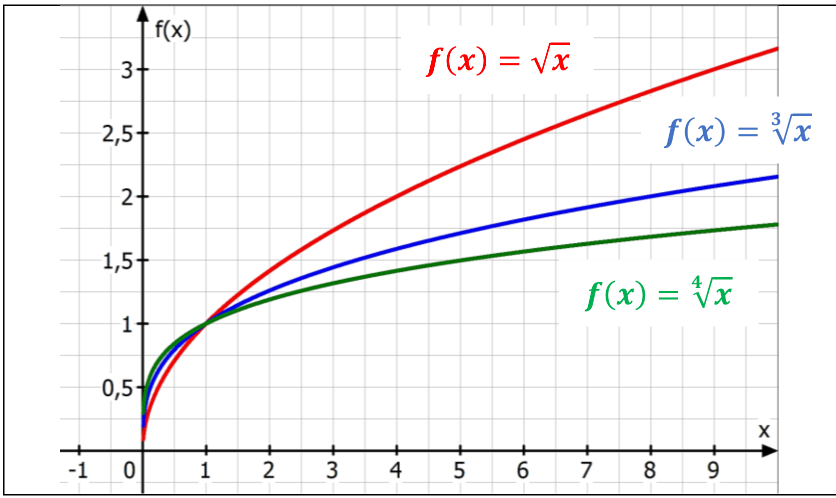
Eigenschaften

- **Definitionsmenge** $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
- für $x < 0$: streng monoton **fallend**
- für $x > 0$: streng monoton **fallend**
- für $x = 0$: nicht definiert
- **punktsymmetrisch** bezüglich des Ursprungs (ungerade Funktion)
- Alle Graphen gehen durch folgende zwei **Punkte**:

$$P_1 = (-1|-1)$$
$$P_2 = (1|1)$$

1.5 Wurzelfunktionen: Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten

Funktionen vom Typ $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ mit $D = \mathbb{R}_0^+$ und $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ nennt man **Wurzelfunktionen**.



Eigenschaften

- **Definitionsmenge** $D = \mathbb{R}_0^+$
- für alle $x \in D$: streng monoton **steigend**
- Alle Graphen gehen durch folgende zwei **Punkte**:

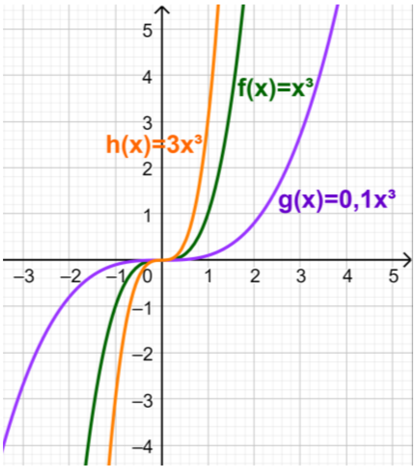
$$P_1 = (0|0)$$

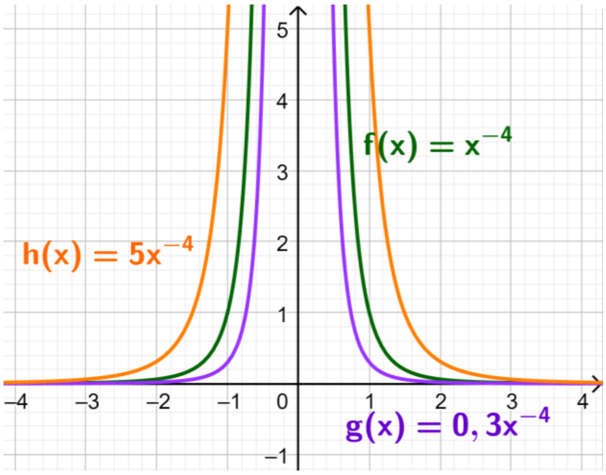
$$P_2 = (1|1)$$

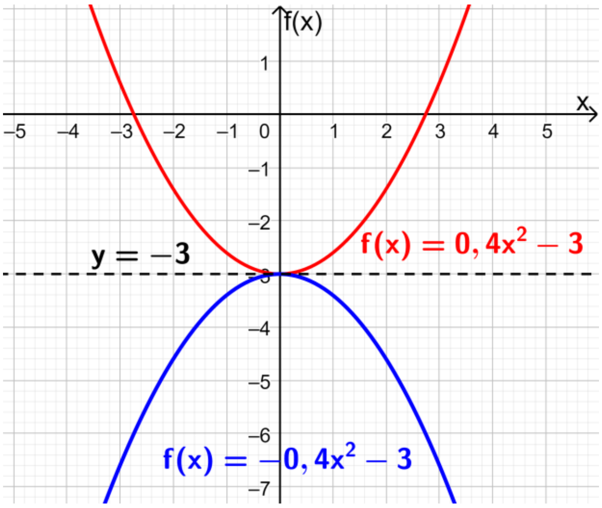
1.6 Wirkung der Parameter a,b einer Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^r + b$

- Ist $|a| > 1$, so wird die ursprüngliche Potenzfunktion entlang $f(x) = x^r$ **entlang der y-Achse gestreckt**.
- Ist $|a| < 1$, so wird die ursprüngliche Potenzfunktion entlang $f(x) = x^r$ **entlang der y-Achse gestaucht**.
- Ist a negativ, so wird die Funktion an der Gerade $y = b$ gespiegelt.

Video

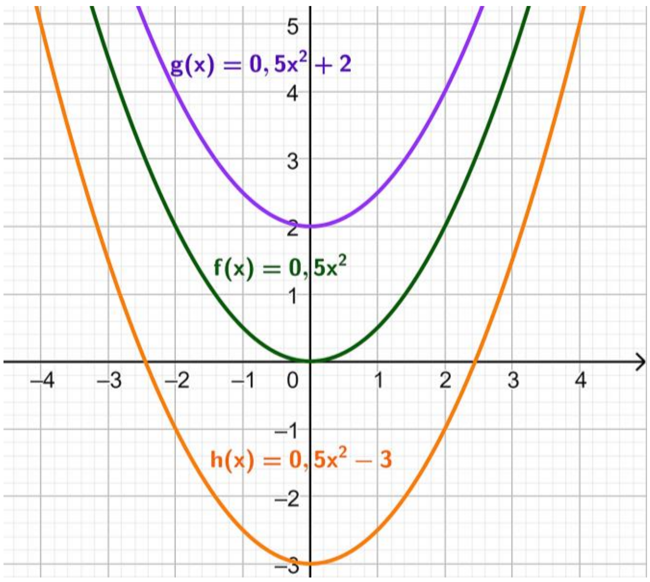






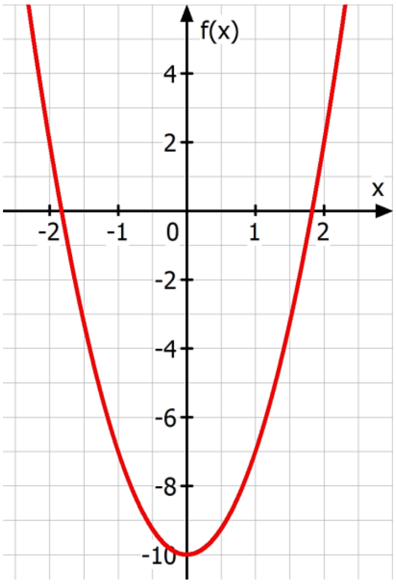
Der **Parameter b** bewirkt eine Verschiebung des Graphen $f(x) = a \cdot x^r$ um **b entlang der y-Achse**.

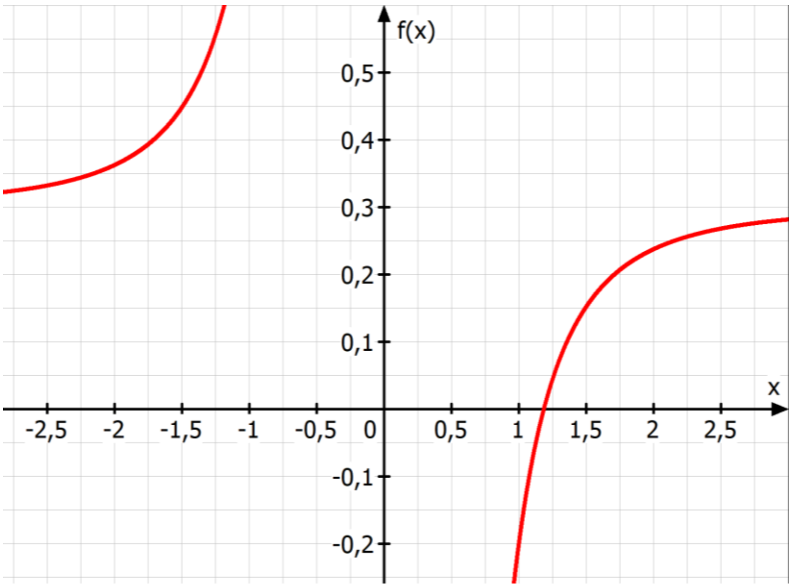
$\boldsymbol{b > 0}$: um b nach oben
$\boldsymbol{b < 0}$: um b nach unten

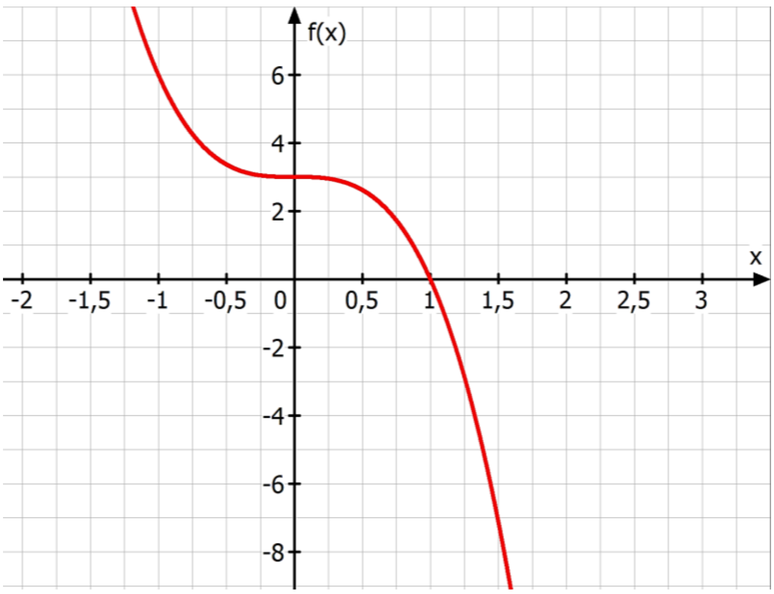


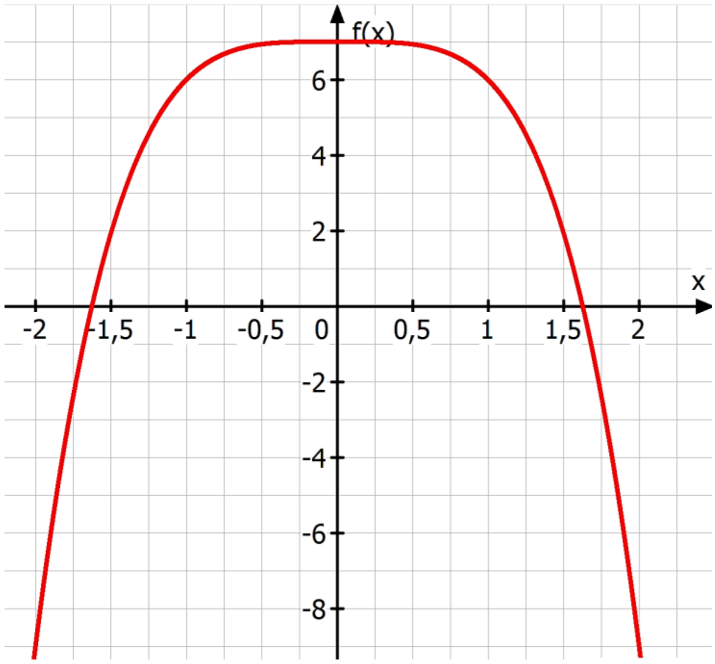
Bsp. 1) Gegeben ist der **Graph** einer Funktion f der Form $f(x) = a \cdot x^r + b$ mit $r \in \mathbb{Z}$ und $-6 \leq r \leq 6$. Bestimme die Werte der Parameter a, b und r und gib die **Funktionsgleichung** an.

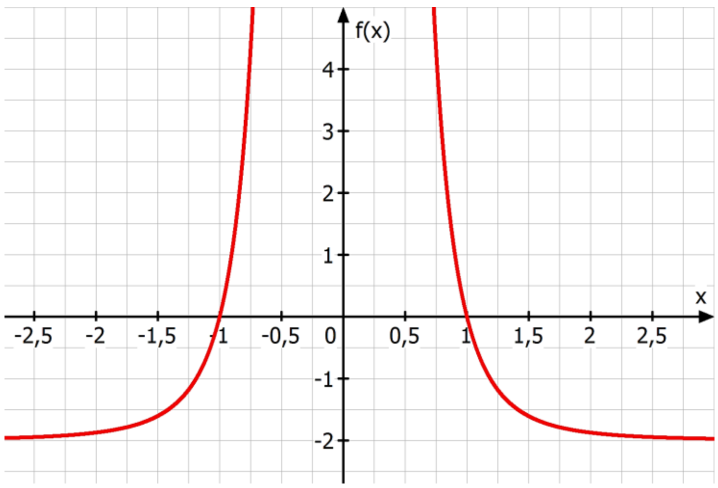
Video

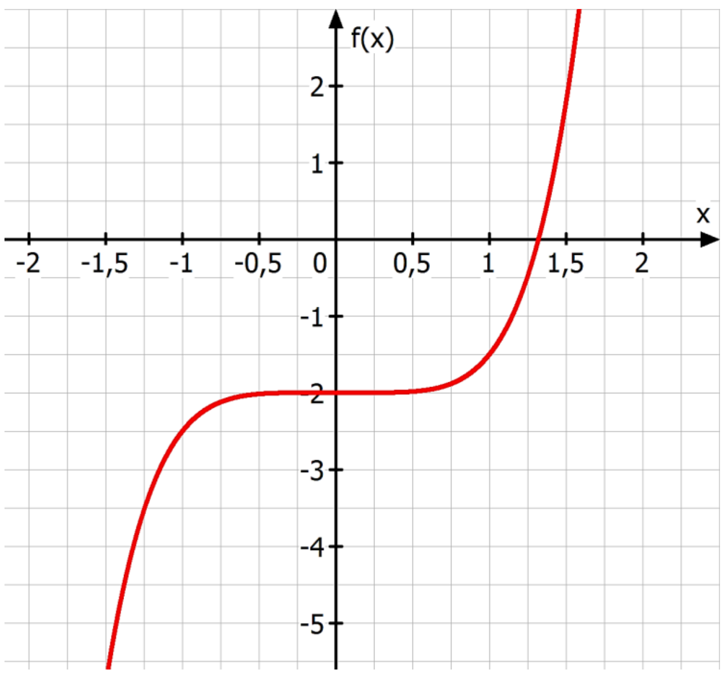






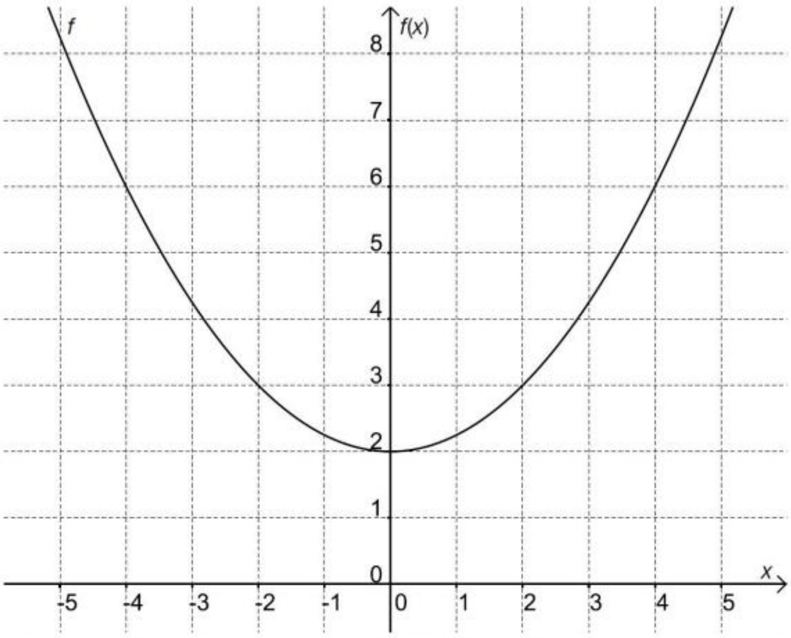

f(x)
x
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-2
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2


f(x)
x
4
3
2
1
-1
-2
-2,5
-2
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
2,5


f(x)
x
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-2
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2

Gleichung einer quadratischen Funktion* - 1_341, FA3.1, Halboffenes Antwortformat

Im nachstehenden Koordinatensystem ist der Graph einer quadratischen Funktion f mit der Gleichung $f(x) = a \cdot x^2 + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ dargestellt.



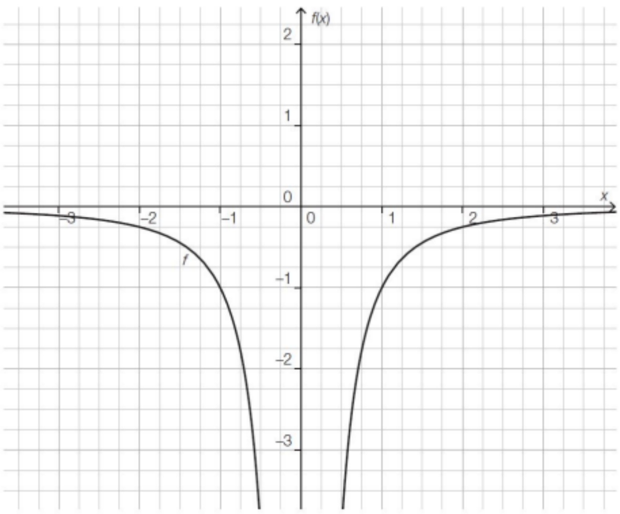
Ermitteln Sie die Werte der Parameter a und b! Die für die Berechnung relevanten Punkte mit ganzzahligen Koordinaten können dem Diagramm entnommen werden.

$a =$ ______________________________

$b =$ ______________________________

Potenzfunktion* - 1_437, FA3.1, 1 aus 6

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Potenzfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^z$ und $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $z \in \mathbb{Z}$ dargestellt.

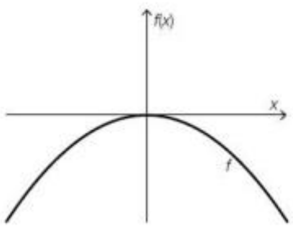
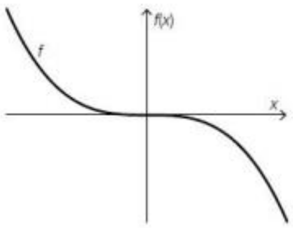
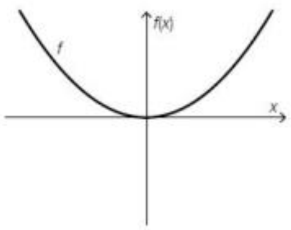
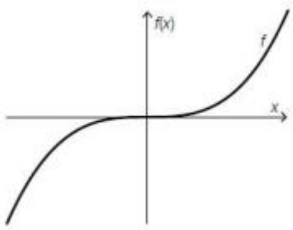


$f(x) = 2 \cdot x^{-4}$	☐
$f(x) = -x^{-2}$	☐
$f(x) = -x^{2}$	☐
$f(x) = -x^{-1}$	☐
$f(x) = x^{-2}$	☐
$f(x) = x^{-1}$	☐

Kreuzen Sie diejenige Funktionsgleichung an, die zum abgebildeten Graphen passt.

Potenzfunktionen* - 1_484, FA3.1, Zuordnungsformat

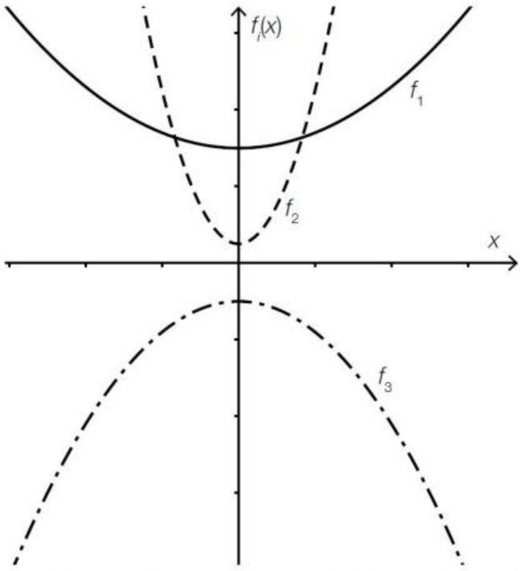
Gegeben sind die Graphen von vier verschiedenen Potenzfunktionen f mit $f(x) = a \cdot x^z$ sowie sechs Bedingungen für den Parameter a und den Exponenten z. Dabei ist a eine reelle, z eine natürliche Zahl.
Ordnen Sie den vier Graphen jeweils die entsprechende Bedingung für den Parameter a und den Exponenten z der Funktionsgleichung (aus A bis F) zu!

A	$a > 0, z = 1$
B	$a > 0, z = 2$
C	$a > 0, z = 3$
D	$a < 0, z = 1$
E	$a < 0, z = 2$
F	$a < 0, z = 3$

Graphen quadratischer Funktionen* - 1_622, FA3.2, Halboffenes Antwortformat

Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen quadratischer Funktionen f_1, f_2 und f_3 mit den Gleichungen $f_i(x) = a_i \cdot x^2 + b_i$, wobei gilt: $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3\}$.



Ordnen Sie die Parameterwerte a_i und b_i jeweils der Größe nach, beginnend mit dem kleinsten!

Parameterwerte a_i: _______ < _______ < _______

Parameterwerte b_i: _______ < _______ < _______

Potenzfunktion* - 1_790, FA3.2, 2 aus 5

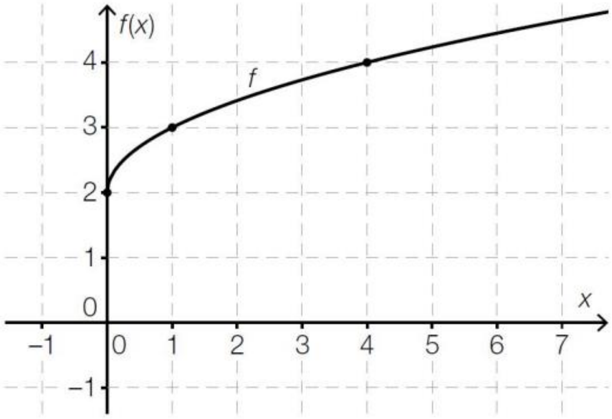
Gegeben ist eine Potenzfunktion $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{a}{x^2}$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf die Funktion f auf jeden Fall zutreffen.

$f\left(\frac{1}{a}\right) = 1$	☐
$f(x + 1) = \frac{a}{x^2 - 2 \cdot x + 1}$	☐
$f(2 \cdot x) = \frac{a}{4 \cdot x^2}$	☐
$f(2 \cdot a) = \frac{1}{2 \cdot a}$	☐
$f(-x) = f(x)$	☐

Funktion* - 1_532, FA3.2, Halboffenes Antwortformat

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{2}} + b$ $(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ dargestellt.
Die Koordinaten der hervorgehobenen Punkte des Graphen der Funktion sind ganzzahlig.



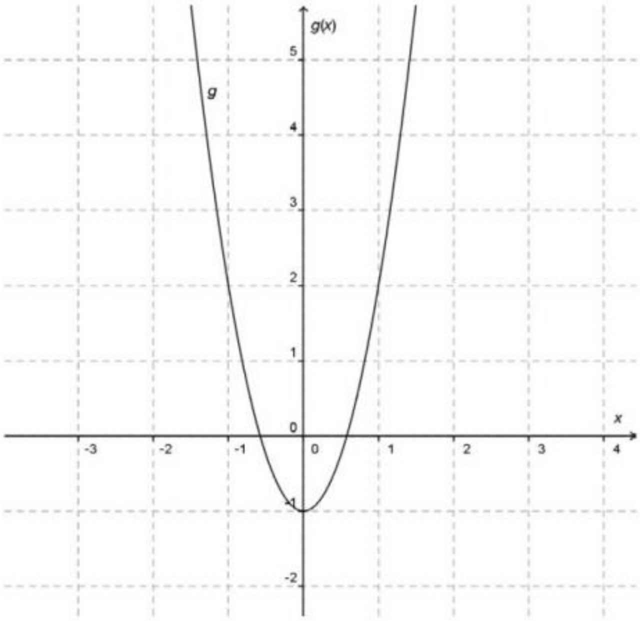
Geben Sie die Werte von a und b an!

a = ______________________________

b = ______________________________

Graph einer quadratischen Funktion* - 1_362, FA3.3, Halboffenes Antwortformat

Gegeben ist der Graph einer Funktion g mit $g(x) = a \cdot x^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $a \neq 0$.



Geben Sie die Parameter a und b so an, dass sie zum abgebildeten Graphen von g passen!

a = ______________________________

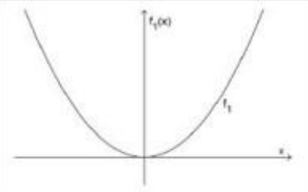
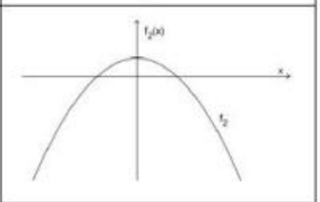
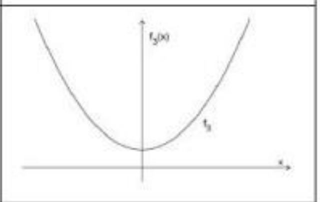
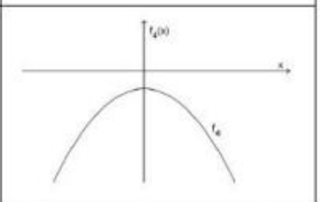
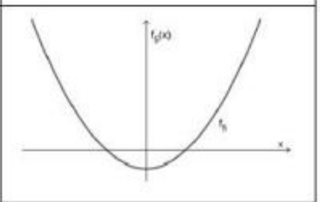
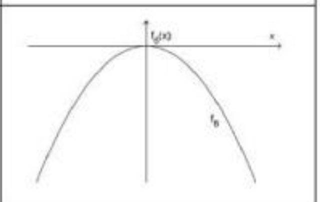
b = ______________________________

Parabeln zuordnen* - 1_389, FA3.3, Zuordnungsformat

Gegeben sind die Graphen von sechs Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 und f_6 mit der Gleichung $f_i(x) = ax^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ (i von 1 bis 6).

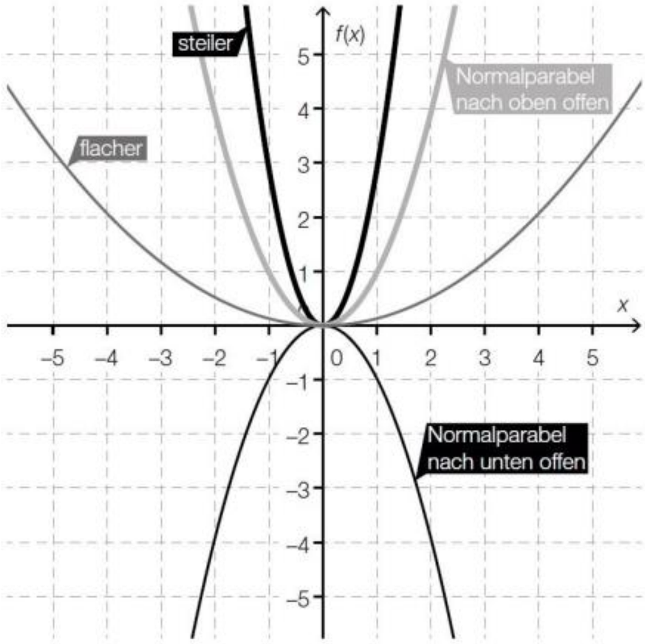
Ordnen Sie den folgenden Eigenschaften jeweils den entsprechenden Graphen der dargestellten Funktionen zu!

$a < 0$ und $b < 0$	
$a < 0$ und $b > 0$	
$a > 0$ und $b < 0$	
$a > 0$ und $b > 0$	

A	
B	
C	
D	
E	
F	

Parabeln* - 1_719, FA3.3, Zuordnungsformat

Die Graphen von Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x^2$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ sind Parabeln. Für $a = 1$ erhält man den oft als *Normalparabel* bezeichneten Graphen. Je nach Wert des Parameters a erhält man Parabeln, die im Vergleich zur Normalparabel „steiler" oder „flacher" bzw. „nach unten offen" oder „nach oben offen" sind.



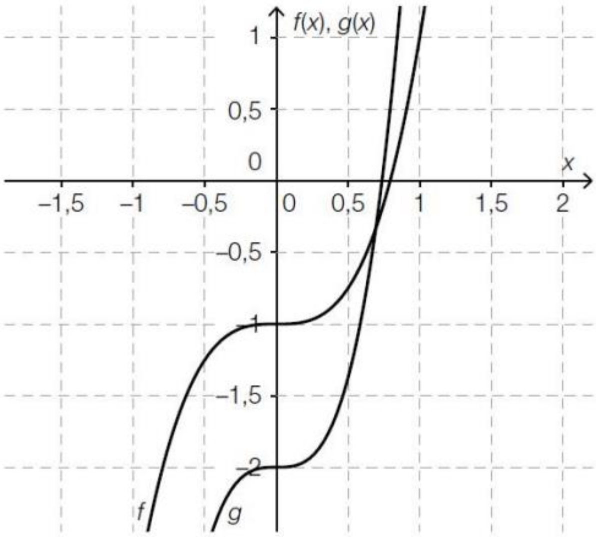
Nachstehend sind vier Parabeln beschrieben. Ordnen Sie den vier Beschreibungen jeweils diejenige Bedingung (aus A bis F) zu, die der Parameter a erfüllen muss.

Die Parabel ist im Vergleich zur Normalparabel „flacher" und „nach oben offen".	
Die Parabel ist im Vergleich zur Normalparabel weder „flacher" noch „steiler", aber „nach unten offen".	
Die Parabel ist im Vergleich zur Normalparabel „steiler" und „nach unten offen".	
Die Parabel ist im Vergleich zur Normalparabel „steiler" und „nach oben offen".	

A	$a < -1$
B	$a = -1$
C	$-1 < a < 0$
D	$0 < a < 1$
E	$a = 1$
F	$a > 1$

Parameter reeller Funktionen* - 1_574, FA3.3, 2 aus 5

Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen zweier reeller Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $f(x) = a \cdot x^3 + b$ und $g(x) = c \cdot x^3 + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.



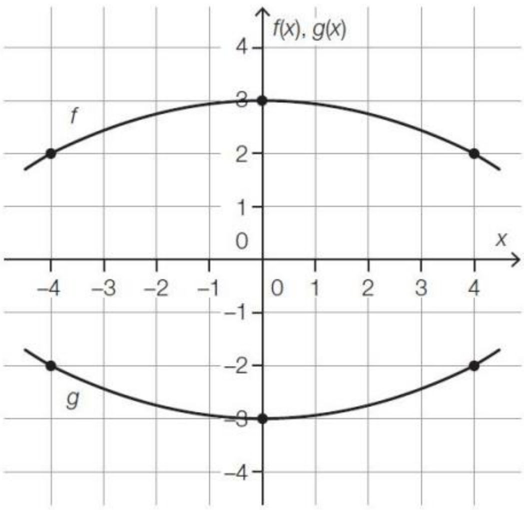
$a > c$	☐
$b > d$	☐
$a > 0$	☐
$b > 0$	☐
$c < 1$	☐

Welche der nachstehenden Aussagen treffen für die Parameter a, b, c und d zu?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Quadratische Funktionen* - 1_839, FA3.3, 2 aus 5

In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der beiden reellen Funktionen f und g dargestellt. Es gilt:

$f(x) = a \cdot x^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$
$g(x) = c \cdot x^2 + d$ mit $c, d \in \mathbb{R}$



$d = f(0)$	☐
$b = d$	☐
$a = -c$	☐
$-f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$	☐
$f(2) = g(2)$	☐

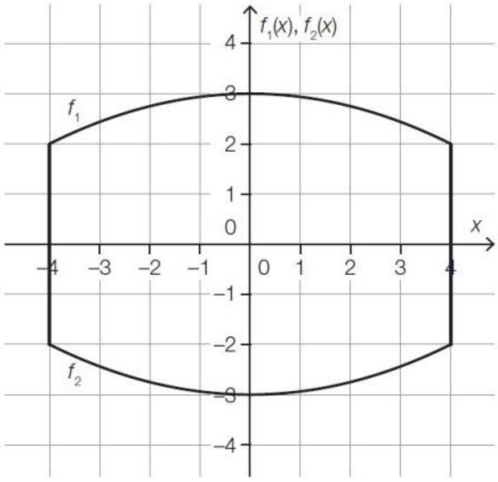
Die Koordinaten der gekennzeichneten Punkte sind ganzzahlig.

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

Zwei quadratische Funktionen* - 1_863, FA3.3, Halboffenes Antwortformat

Eine bestimmte Querschnittsfläche wird von den Graphen der quadratischen Funktionen f_1 und f_2 sowie den Geraden $x = -4$ und $x = 4$ begrenzt.
Es gilt:
f_1: $[-4; 4] \to \mathbb{R}, x \mapsto a \cdot x^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$
f_2: $[-4; 4] \to \mathbb{R}, x \mapsto c \cdot x^2 + d$ mit $c, d \in \mathbb{R}$

Der Sachverhalt wird durch die nachstehende Abbildung veranschaulicht.

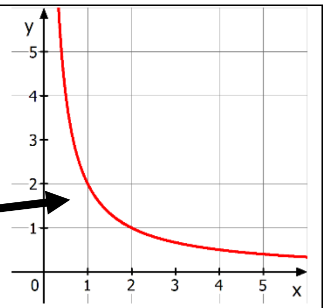


Ergänzen Sie „<", „=" oder „>" in (1) und (2) jeweils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

(1) a ______ c

(2) b ______ d

Indirekte Proportionalität

Wird ein Zusammenhang zwischen **zwei Größen x und y** in der Form $\boldsymbol{y} = \frac{k}{x}$ $mit\ k, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beschrieben, so spricht man von einem **indirekt proportionalem Zusammenhang** zwischen x und y. $k = x \cdot y$ heißt **Proportionalitätskonstante**. Typischer Funktionsgraph (Positiver Teil der Hyperbel) 
Beispiele für indirekte Proportionalität (je MEHR, desto WENIGER): ▪ Je höher die Geschwindigkeit – desto kürzer die Dauer. ▪ Je mehr Wasserschläuche – desto schneller ist ein Pool voll. ▪ Je mehr Bagger – desto schneller ist der Abriss fertig.

Ist f eine **indirekte Proportionalitätsfunktion** mit $f(x) = \frac{c}{x}$ $(c \neq 0;\ \ x \neq 0)$, dann gilt:

(1) $f(a \cdot x) = \frac{f(x)}{a}$ $für\ a \neq 0$	Dem a-fachen Argument entspricht der $a - te$ Teil des Funktionswertes.
(2) $c = f(1)$	Die Konstante c ist der Funktionswert an der Stelle 1.
(3) $f(x) \cdot x = c$	Das Produkt aus Funktionswert und Argument ist konstant.

Bsp. 2) Es sei $t(v)$ die Zeit, die ein Läufer braucht, um eine 200m lange Strecke mit annähernd konstanter Geschwindigkeit v zu durchlaufen.

1) Besteht zwischen $t(v)$ und v eine Proportionalität?
2) Stelle eine Tabelle auf, die für $v = 2{,}4{,}6, \ldots, 12\ m/s$ die zugehörige Zeit $t(v)$ in Sekunden angibt. Gib die zugehörige Funktionsgleichung an.
3) Zeichne den Graphen der Funktion t, die jeder Geschwindigkeit v die Zeit $t(v)$ zuordnet.

Video

Bsp. 3) Die Autobahn-Strecke zwischen Wien und Graz beträgt ca. 200 km. Gib eine Funktion $t(v)$ an, die die **Abhängigkeit der Fahrzeit t** von der **Durchschnittsgeschwindigkeit v** eines Autos beschreibt. Gib zudem eine geeignete **Definitionsmenge** an und erstelle eine **Wertetabelle**.
Zeichne den **Graphen** der Funktion und **interpretiere** den **Zusammenhang** von **Geschwindigkeit** und **Fahrzeit**.

Druck und Volumen eines idealen Gases* - 1_791, FA3.4, Halboffenes Antwortformat

Bei gleichbleibender Temperatur sind der Druck und das Volumen eines idealen Gases zueinander indirekt proportional. Die Funktion p ordnet dem Volumen V den Druck $p(V)$ zu (V in m^3, $p(V)$ in Pascal).
Geben Sie $p(V)$ mit $V \in \mathbb{R}^+$ an, wenn bei einem Volumen von 4 m^3 der Druck 50 000 Pascal beträgt.

$p(V) =$ ______________________________

Flächeninhalt von Rechtecken* - 1_886, FA3.4, Halboffenes Antwortformat

Die Funktion f ordnet der Breite x (mit $x > 0$) eines Rechtecks mit dem Flächeninhalt 26 cm^2 die Länge $f(x)$ zu (x, $f(x)$ in cm).

Stellen Sie eine Funktionsgleichung von f auf.

$f(x) =$ ______________________________

Heizungstage* - 1_461, FA3.4, Halboffenes Antwortformat

Die Anzahl der Heizungstage, für die ein Vorrat an Heizöl in einem Tank reicht, ist indirekt proportional zum durchschnittlichen Tagesverbrauch x (in Litern).
In einem Tank befinden sich 1 500 Liter Heizöl. Geben Sie einen Term an, der die Anzahl $d(x)$ der Heizungstage in Abhängigkeit vom durchschnittlichen Tagesverbrauch x bestimmt!

$d(x) =$ ______________________________

Indirekte Proportionalität* - 1_1187, FA3.4, 1 aus 6

Gegeben sind sechs Zuordnungen mit $x \in \mathbb{R}^+$.

Kreuzen Sie diejenige Zuordnung an, die eine indirekte Proportionalität beschreibt. *[1 aus 6]*

$x \mapsto 3 - x$	☐
$x \mapsto -\frac{x}{3}$	☐
$x \mapsto \frac{3}{x^2}$	☐
$x \mapsto 3 \cdot x^{-1}$	☐
$x \mapsto 3^{-x}$	☐
$x \mapsto x^{-3}$	☐