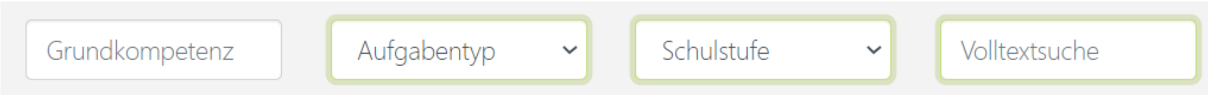
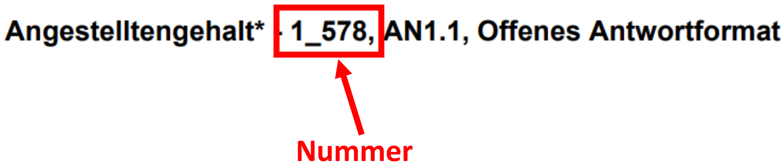
FA1 – Funktionen Grundlagen (Lösungen)

Lösungen Maturaaufgaben:

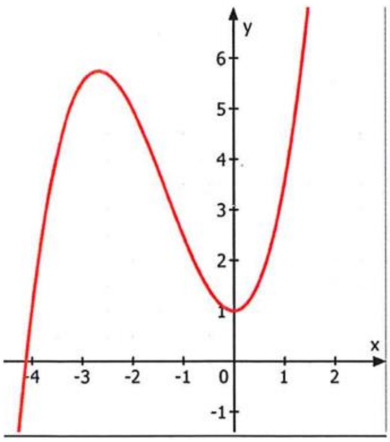
1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=M
2) Gib im Feld „**Volltextsuche**" die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.

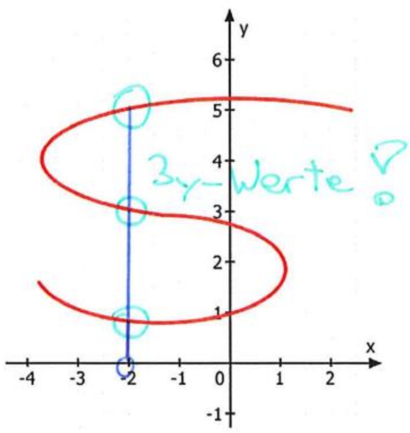




Bsp. 1)

Bsp. 1) Welcher der folgenden Graphen stellt eine Funktion dar?





JA!

NEIN!

Bsp. 2)

Bsp. 2) Welche Wertetabelle stellt eine Funktion dar?

x	$f(x)$
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

~~O~~ JA O NEIN

x	$f(x)$
0	2
1	3
1	4
2	4
3	3
4	2
5	1

O JA ~~O~~ NEIN

x	$f(x)$
-6	3
-4	3
-2	3
0	3
2	3
4	3
6	3

~~O~~ JA O NEIN

x	$f(x)$
3	0
3	1
3	1
3	2
3	3
3	4
3	5

O JA ~~O~~ NEIN

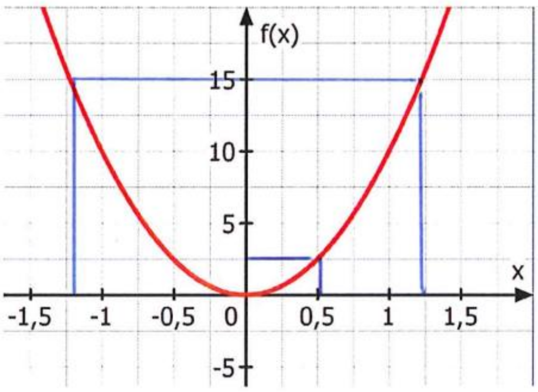
x	$f(x)$
1	1
1	1
2	1
2	1
3	1
3	1
5	1

~~O~~ JA O NEIN

x	$f(x)$
1	14
10	9
13	14
17	23
22	20
28	29
33	14

~~O~~ JA O NEIN

Bsp. 3)



$f(0{,}5) =$ 2,5

Video

$f(-1) =$ 10

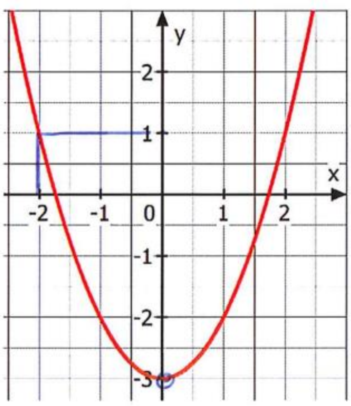
An welchen Stellen hat die Funktion den Funktionswert $f(x) = 15$?

$x_1 \approx -1{,}2 \quad x_2 \approx 1{,}2$

Gib die Koordinaten des Punktes an der Stelle $x = 0{,}5$ an.

$P = (0{,}5 | 2{,}5)$

Bsp. 4)



Bsp. 6) Beantworte die Fragen. Bei den Aufgaben (a) und (d) zeichne zusätzlich die graphische Bestimmung ein.

a. $f(-2) =$ 1

b. $f(1) =$ -2

c. Wie lautet der Funktionswert an der Stelle $x = -1$: -2

d. An welcher Stelle/n hat die Funktion den Funktionswert $f(x) = -3$?

$x = 0$

e. An welcher Stelle/n hat die Funktion den Funktionswert $f(x) = 1$?

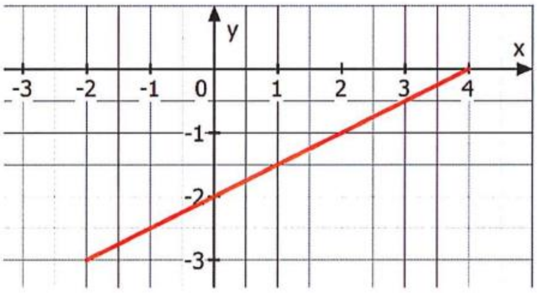
$x_1 = -2 \quad x_2 = 2$

Bsp. 5)

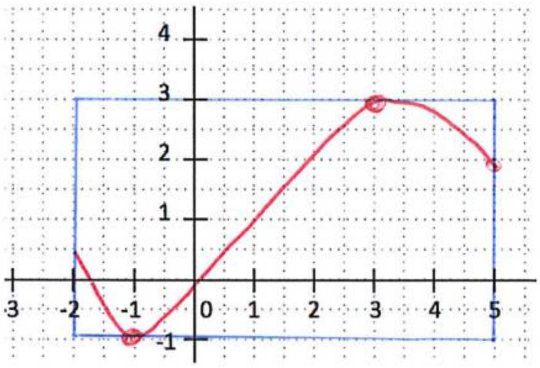
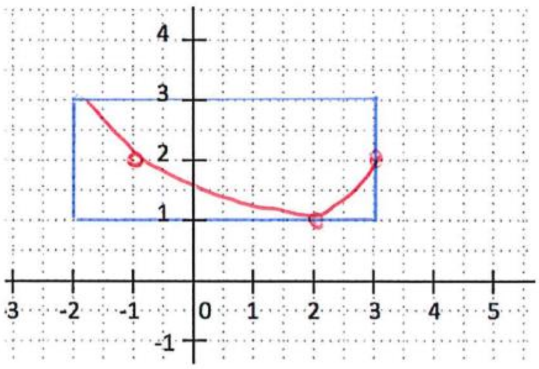
7) Gib die **Definitions**- und **Wertemenge** der Funktion an.

$D = [-2;4]$

$W = [-3;0]$



Bsp. 6)

▪ $D_f = [-2;5]$ ▪ $W_f = [-1;3]$ ▪ $f(-1) = -1$ ▪ $f(3) = 3$ ▪ $f(5) = 2$	▪ $D_f = [-2;3]$ ▪ $W_f = [1;3]$ ▪ $f(-1) = 2$ ▪ $f(2) = 1$ ▪ $f(3) = 2$
	

Bsp. 7)

$A = (2\|8), f(x) = x^2 + 3x - 2$ $f(2) = 2^2 + 6 - 2 = \underline{\underline{8}}$ $8 = 8$ ✓ $A \in f$	$A = (0\|4), f(x) = 5x + 4$ $f(0) = 4$ $4 = 4$ ✓ $A \in f$	$A = (-1\|-1), f(x) = 3x - 3$ $f(-1) = -3 - 3 = -6$ $-6 \neq -1$ $A \notin f$
$A = (-3\|5), f(x) = x^2 + 3x + 4$ $f(-3) = 9 - 9 + 4 = 4$ $4 \neq 5$ $A \notin f$	$A = (6\|-9), f(x) = -x^2 - 5x + 1$ $f(6) = -36 - 30 + 1 = -65$ $-65 \neq -9$ $A \notin f$	$A = (-2\|10), f(x) = x^2 - 4x - 2$ $f(-2) = 4 + 8 - 2 = 10$ $10 = 10$ ✓ $A \in f$

Bsp. 8)

$f(x) = x^2 + 3x - 2$	$f(x) = 5x + 4$
$f(0) = -2 \Rightarrow A = (0 \mid -2)$ $f(1) = 1 + 3 - 2 = 2 \Rightarrow B = (1 \mid 2)$	$f(-4) = -20 + 4 = -16 \Rightarrow A = (-4 \mid -16)$ $f(8) = 40 + 4 = 44 \Rightarrow B = (8 \mid 44)$
$f(x) = 5x^2 - 16$	$f(x) = -x^2 - 5x + 1$
$f(3) = 5 \cdot 9 - 16 = 29 \quad A = (3 \mid 29)$ $f(-1) = 5 - 16 = -11 \Rightarrow B = (-1 \mid -11)$	$f(7) = -49 - 35 + 1 = -83 \Rightarrow A = (7 \mid -83)$ $f(0) = 1 \Rightarrow B = (0 \mid 1)$

Bsp. 9)

Ausdruck	Interpretation
$Z(15) = 30$	15 Personen benötigen 30 h für diese Arbeit
$Z(4)$	= Zeit, die 4 Personen für die Arbeit benötigen
$Z(11) < Z(5)$	11 Personen brauchen kürzer als 5 Personen für diese Arbeit
$Z(6) = \frac{1}{2} \cdot Z(3)$	6 Personen sind doppelt so schnell wie 3 Personen
$Z(1) = Z(3) + 4$	1 Person braucht um 4h länger als 3P.

Bsp. 10)

Ausdruck	Interpretation
$s(3) = 150$	In 3 min legt die Person 150 m zurück.
$s(7) = s(6) + 50$	In der 7. Minute legt die Person 50 m zurück.
$s(2t) = 2s(t)$	In der doppelten Zeit legt die Person den doppelten Weg zurück
$s(100) - s(90) = 300$	Zwischen der 90. und 100. Minute legt die Person 300 m zurück

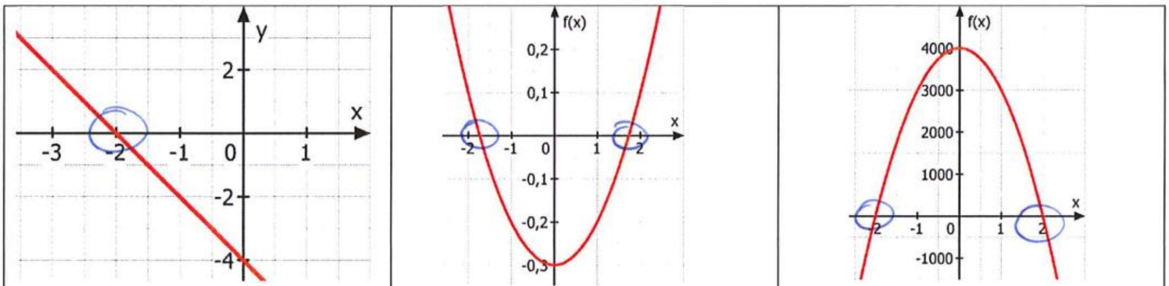
Bsp. 11)

Ausdruck	Interpretation
$s(5) = 100$	Nach fünf Stunden hat das Auto 100 km zurückgelegt.
$s(6) = s(4) + 250$	Nach sechs Stunden ist das Auto um 250 km mehr gefahren als nach vier Stunden.
$s(4) = 3 \cdot s(1)$	Nach vier Stunden ist das Auto dreimal soweit gefahren, wie nach einer Stunde.
$s(t+1) - s(t) = 35$	Das Auto legt jede Stunde 35 km zurück.
$\frac{s(8) - s(0)}{8} = 30$	Das Auto hat nach acht Stunden Fahrzeit im Durchschnitt 30km pro Stunde zurückgelegt.

Bsp. 12)

a. $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$	b. $f(x) = -4x$	c. $f(x) = x^2 - x - 12$
$f(x) = 0$ $\frac{1}{3}x + 1 = 0 \quad \vert -1$ $\frac{1}{3}x = -1 \quad \vert \cdot 3$ $\underline{\underline{x = -3}}$	$-4x = 0 \quad \vert :(-4)$ $\underline{\underline{x = 0}}$	$f(x) = 0$ Kleine LF: $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} \; \big/ \; \frac{49}{4} \; \big/ \; \frac{7}{2}$ $\underline{\underline{x_1 = 4}} \quad \underline{\underline{x_2 = -3}}$

Bsp. 13)



$x = -2$	$x_1 \approx -1{,}8 \quad x_2 = 1{,}8$	$x_1 = -2 \quad x_2 = 2$

Bsp. 14)

a. $h(t)$ gibt die Höhe h (in m) eines senkrecht hinauf geworfenen Steines t Sekunden nach dem Abwurf an. $h(8) = 0$	b. $W(J)$ gibt das Wirtschaftswachstum W im Jahr J an. $W(2014) = 0$
Nach 8 Sekunden kommt der Stein wieder auf den Boden auf!	Im Jahr 2014 gab es kein Wirtschaftswachstum (= konstant!)

Bsp. 15)

$f(x) = -5x + 20$	$f(x) = -x^2 - 2x - 6$
$f(-4) = 20 + 20 = \underline{40}$ $f(1) = \underline{15}$ $f(10) = -50 + 20 = \underline{-30}$	$f(-4) = -(-4)^2 - 2 \cdot (-4) - 6$ $= -16 + 8 - 6 = \underline{-14}$ $f(1) = -1 - 2 - 6 = \underline{-9}$ $f(10) = -100 - 20 - 6 = \underline{-126}$

Bsp. 16)

$f(x) = \frac{1}{3}x + 6$	$f(x) = -x^2 + 2x + 4$
<u>gesucht</u>: $f(x) = -1$? $\frac{1}{3}x + 6 = -1 \quad \vert -6$ $\frac{1}{3}x = -7 \quad \vert \cdot 3$ $x = -21$	<u>gesucht</u>: $f(x) = 1$? $-x^2 + 2x + 4 = 1 \quad \vert -1$ $-x^2 + 2x + 3 = 0$ Große LF: $x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12} \quad 16 \quad 4}{-2}$ $x_1 = \frac{-2+4}{-2} = -1$ $x_2 = \frac{-2-4}{-2} = 3$

Bsp. 17)

① $N(9) = 3000 + 300 \cdot 9 = 5700\,g$ Nach 9 Wochen wiegt er bereits 5,9 kg

② $6300 = 3000 + 300 \cdot t \quad | -3000$

$3300 = 300 \cdot t \quad | :300$

$11 = t$

$\Rightarrow$ Nach 11 Wochen wiegt er 6,3 kg.

Bsp. 18)

a) 15% von $100000 = 0{,}15 \cdot 100000 = 15000\,l$

$\Rightarrow 15000 = 100000 - 50t \quad | -100000$

$-85000 = -50t \quad | :(-50)$

$t = 1700\,min \approx 28{,}\dot{3}\,h$

2h = 120 min

b) $N(120) = 100000 - 50 \cdot 120 = 94000\,l$

c) $0 = 100000 - 50t \quad | +50t$

$50t = 100000 \quad | :50 \Rightarrow t = 2000\,min \approx 33{,}\dot{3}\,h$

Bsp. 19)

a) $h(t)=0$

$-t^2+t+2=0$

$t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}\,/9\,/3}{-2}$

$\left(t_1=\frac{2}{-2}=-1\right)$

$t_2=\frac{-4}{-2}=\underline{\underline{2}}$

Nach 2 Sekunden kommt der Pfeil am Boden auf!

b) $2=-t^2+t+2 \quad |-2$

$0=-t^2+t$

$-t^2+t=0$

$t\cdot(-t+1)=0$

$t_1=0$ START

$-t+1=0 \quad |+t$

$1=t$

Nach 1 Sekunde!

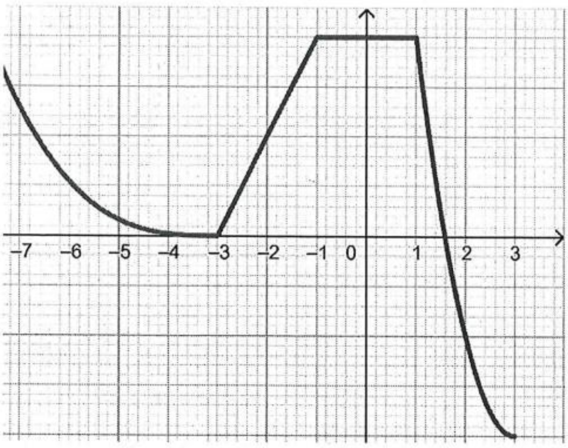
c) $h(1{,}5)=-1{,}5^2+1{,}5+2$

$=\underline{\underline{1{,}25\,m}}$

Nach 1,5s beträgt die Höhe 1,25m.

Bsp. 20)

Bsp. 7) Bestimme das Monotonieverhalten der Funktion im gegebenen Intervall.



a. $[-6;-4]$: str. m. fallend

b. $[1;3]$: str. m. fallend

c. $[0;2]$: mon. fallend

d. $[-1;0{,}5]$: konstant

e. $[-4;2]$: nicht monoton

f. $[-3;0]$: mon. steigend

g. $[-3;-1]$: str. m. steigend

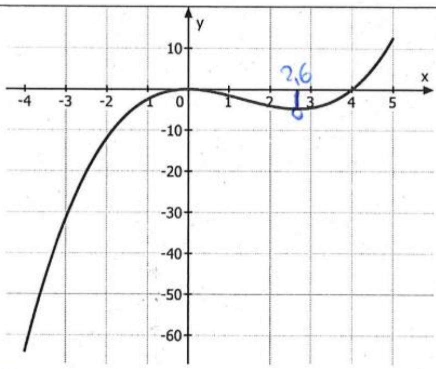
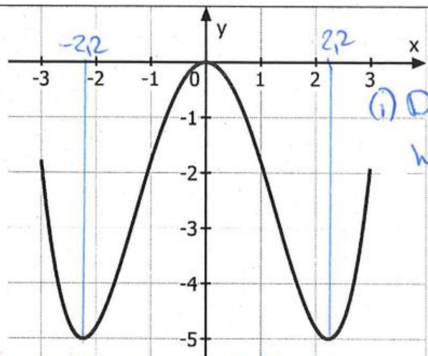
Bsp. 21)

a. $f(x)=x^2-2$	b. $f(x)=x^3+3x^2$	c. $f(x)=x^4-2x^2$
$(-\infty;0]$: str. m. fallend $[0;+\infty)$ str. mon. steigend	$(-\infty;-2]$ str. mon. steigend $[-2;0]$ str. mon. fallend $[0;+\infty)$ str. mon. steigend	$(-\infty;-1]$ str. mon. fallend $[-1;0]$ str. mon. steigend $[0;1]$ str. mon. fallend $[1;+\infty)$ str. mon. steigend

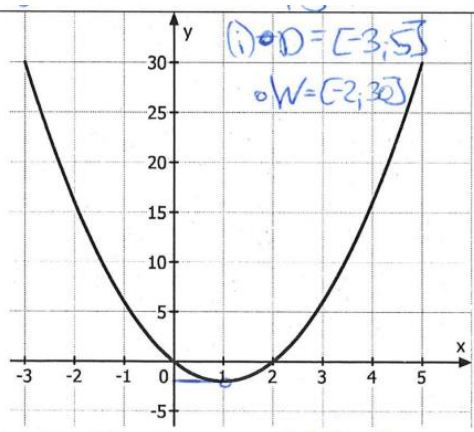
Bsp. 22)

Eine monoton steigende Funktion kann auch streng monoton steigend sein.	JA! Sie kann, muss aber nicht str. mon. steigend sein!
Gilt in einem Intervall $[a;b]$ auch $f(b) > f(a)$, so ist die Funktion streng monoton steigend.	NEIN! Diese Bedingung betrachtet nur die beiden Grenzen. Was ist dazwischen?
Jede streng monoton steigende Funktion ist auch monoton steigend.	JA!
Eine Funktion ist streng monoton fallend, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt: $f(x_2) < f(x_1)$	JA: Bedingung für str. mon. fallend
Jede monoton fallende Funktion ist auch streng monoton fallend.	FALSCH nicht str. mon. fallend

Bsp. 23)

	
(i) $D=[-4;5]$ $W\approx[-65;12]$ (ii) $[-4;0]$: str. mon. steigend $[0;2,6]$: —"— fallend $[2,6;5]$: —"— steigend (iii) lokales Max: $x=0 \Rightarrow H=(0\|0)$ lokales Min: $x\approx 2,6 \Rightarrow T=(2,6\|-5)$ (iv) globales Min: $x=-4$, globales Max: $x=5$	(i) $D=[-3;3]$ $W=[-5;0]$ (ii) $[-3;-2,2]$: str. mon. fallend $[-2,2;0]$: —"— steigend $[0;2,2]$: —"— fallend $[2,2;+3]$: —"— steigend (iii) lokales Max: $x=0 \Rightarrow H=(0\|0)$ lokales Min: $x_1=-2,2 \Rightarrow T_1=(-2,2\|-5)$ $x_2=2,2 \Rightarrow T_2=(2,2\|-5)$ (iv) globales Min: $x_1=-2,2$, $x_2=2,2$ globales Max: $x=0$

Bsp. 24)

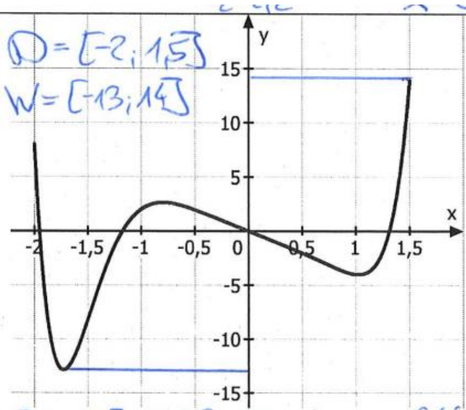


(ii) $[-3; 1]$: str. mon. fallend
$[1; 5]$: str. mon. steigend

(iii) lokales Min: $x = 1 \Rightarrow T = (1|-2)$

(iv) globales Min
$x = 1$

globales Max:
$x_1 = -3;\ x_2 = 5$



(ii) $[-2; -1{,}7]; [-0{,}8; 1{,}1]$: str. mon. fallend
$[-1{,}7; -0{,}8]; [1{,}1; 1{,}5]$: — " — steigend

(iii) lokales Min: $x_1 = -1{,}7 \Rightarrow T_1 = (-1{,}7|-13)$
$x_2 = 1{,}1 \Rightarrow T_2 = (1{,}1|-4)$

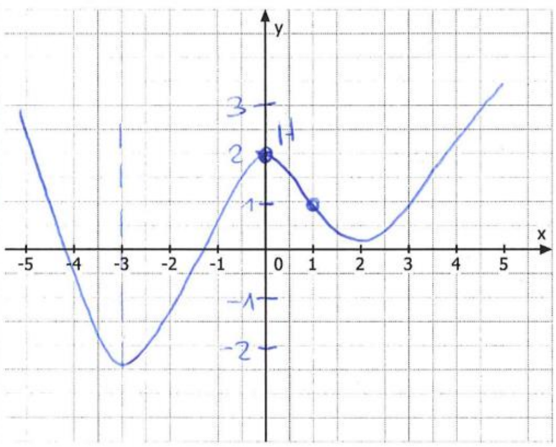
lokales Max: $x = -0{,}8 \Rightarrow H = (-0{,}8|2{,}5)$

(iv) globales Min
$x = -1{,}7$

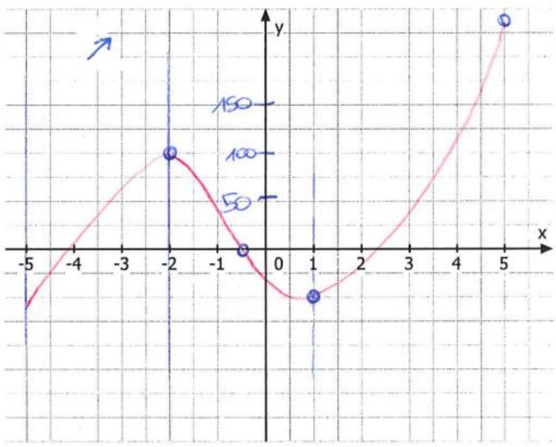
globales Max
$x = 1{,}5$

Bsp. 25)

- verläuft durch den Punkt $P = (1|1)$
- Lokale und Globale Minimumstelle bei $x = -3$.
- Hochpunkt bei $(0|2)$

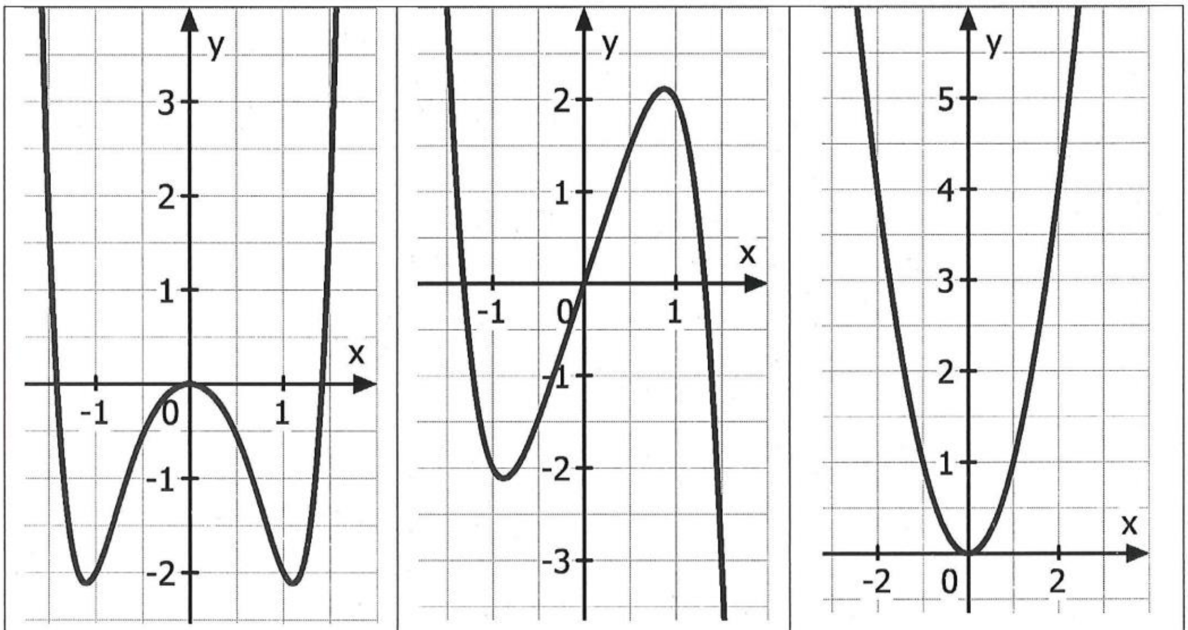


- Im Intervall $[-5; -2]$: streng monoton wachsend
- Hochpunkt bei $(-2|100)$
- Verläuft durch den Punkt $(-0{,}5|0)$
- Lokale Minimumstelle bei $x = 1$.
- Globales Maximum bei $x = 5$



Bsp. 26)

Bsp. 14) Gib aufgrund des Graphen von f an, ob die Funktion gerade oder ungerade ist.

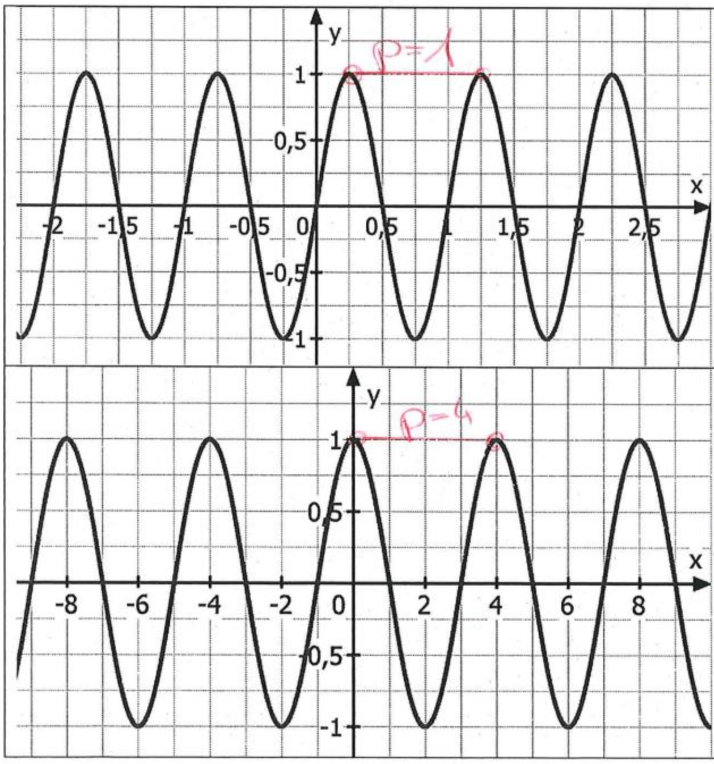


Gerade Funktion

Ungerade Funktion

Gerade Funktion

Bsp. 27)



- Ungerade Funktion
- p=1

- Gerade Funktion
- p=4

Bsp. 28)

a) $x = 2x$: $f = \frac{2x \cdot y^2}{z} = 2 \cdot \frac{xy^2}{z}$ verdoppelt!

b) $y = 2y$: $f = \frac{x \cdot (2y)^2}{z} = \frac{x \cdot 4y^2}{z} = 4 \cdot \frac{xy^2}{z}$ vervierfacht!

c) $z = 2z$: $f = \frac{x \cdot y^2}{2z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{xy^2}{z}$ halbiert

d) $y = 4y$: $f = \frac{x \cdot (4y)^2}{z} = \frac{x \cdot 16y^2}{z} = 16 \cdot \frac{xy^2}{z}$ 16x größer!

e) $f(x) = \underbrace{\frac{y^2}{z}}_{\text{wie „k"}} \cdot x = k \cdot x$ lineare Funktion & direkt proportional

f) $f(y) = \underbrace{\frac{x}{z}}_{\text{„a"}} \cdot y^2 = a \cdot y^2$ quadratische Funktion & nicht proportional

g) $f(z) = \frac{xy^2}{z} = \frac{c}{z}$ „c" rationale Funktion & indirekt proportional

konstant

Bsp. 29)

a) $a = 2a$: $T(2a, b, c) = \frac{(2a)^2 \cdot b^3}{c^2} = \frac{4a^2b^3}{c^2} = 4 \cdot \frac{a^2b^3}{c^2}$ 4x größer

b) $T(a, 2b, 3c) = \frac{a^2 \cdot (2b)^3}{(3c)^2} = \frac{a^2 \cdot 8b^3}{9c^2} = \frac{8}{9} \cdot \frac{a^2b^3}{c^2}$ T wird um den Faktor $\frac{8}{9}$ kleiner!

c) $T(\frac{a}{2}, 2b, \frac{c}{4}) = \frac{(\frac{a}{2})^2 \cdot (2b)^3}{(\frac{c}{4})^2} = \frac{\frac{a^2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{8}^{2} b^3}{\frac{c^2}{16}} = 32 \cdot \frac{a^2b^3}{c^2}$ 32x größer

d) $T(2a; \frac{b}{2}, 2c) = \frac{(2a)^2 \cdot (\frac{b}{2})^3}{(2c)^2} = \frac{4a^2 \cdot \frac{b^3}{8}}{4c^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{a^2b^3}{c^2}$

T wird auf $\frac{1}{8}$ verkleinert!

Bsp. 30)

a) $T(2a, 2b, 2c) = \frac{2a \cdot (2b)^4}{(2c)^3 \cdot d} = \frac{2a \cdot \cancel{16}^{2} b^4}{\cancel{8}c^3 d} = \underline{4 \cdot \frac{ab^4}{c^3d}}$ 4x größer

b) $T(a, 2b, c, 3d) = \frac{a \cdot (2b)^4}{c^3 \cdot 3d} = \frac{16}{3} \cdot \frac{ab^4}{c^3d}$ T wird $5{,}\dot{3}$x größer

c) $T(\frac{a}{2}, 2b, c, \frac{d}{4}) = \frac{\frac{a}{2} \cdot (2b)^4}{c^3 \cdot \frac{d}{4}} = \frac{\frac{a}{\cancel{2}} \cdot \cancel{16}^{8} b^4}{c^3 \cdot \frac{d}{4}} = \underline{\underline{32 \cdot \frac{ab^4}{c^3d}}}$ 32x größer