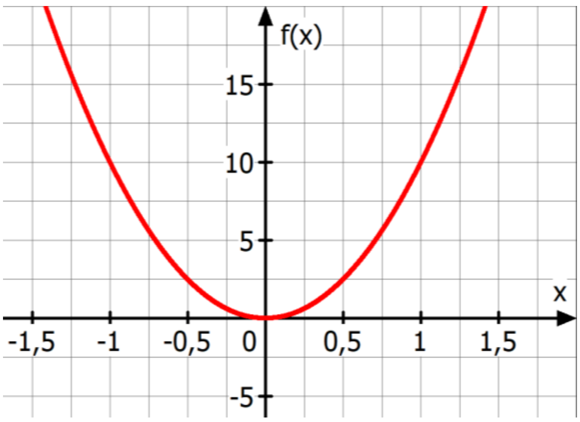
FA1 – Funktionen Grundlagen

Maturaskript AHS (34 Seiten)

Grundkompetenzen:

- **FA 1.1** für gegebene Zusammenhänge entscheiden können, ob man sie als Funktionen betrachten kann
- **FA1.2** Formeln als Darstellung von Funktionen interpretieren und dem Funktionstyp zuordnen können
- **FA1.3** zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge wechseln können
- **FA 1.4** aus Tabellen, Graphen1 und Gleichungen von Funktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können
- **FA 1.5** Eigenschaften von Funktionen erkennen, nennen, im Kontext deuten und zum Erstellen von Funktionsgraphen einsetzen können: Monotonie(wechsel), lokale Extrema, Wendepunkte, Periodizität, Achsensymmetrie, asymptotisches Verhalten, Schnittpunkte mit den Achsen
- **FA 1.6** Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen grafisch und rechnerisch ermitteln und im Kontext interpretieren können
- **FA 1.7** Funktionen als mathematische Modelle verstehen und damit verständig arbeiten können
- **FA 1.8** durch Gleichungen (Formeln) gegebene Funktionen mit mehreren Veränderlichen im Kontext deuten können, Funktionswerte ermitteln können



Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Prof. πegischer

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

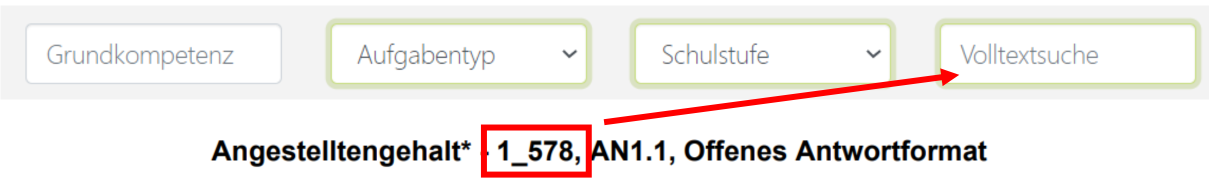
Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=M

2) Gib im Feld „**Volltextsuche**" die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.



Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. 1_578) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**" und „**GeoGebra**" erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**" erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln	**Weitere Regeln für Lehrpersonen**
▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen. ▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen. ▪ Sie dürfen mein Materialen **NICHT** gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden. ▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden. ▪ Bei einem **Missbrauch** erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.	**WICHTIGSTE REGEL:** LehrerInnen dürfen die Materialien in **Ihrem eigenen Unterricht** verwenden: ▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen. ▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben. ▪ Es ist **nicht erlaubt**, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben. ▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

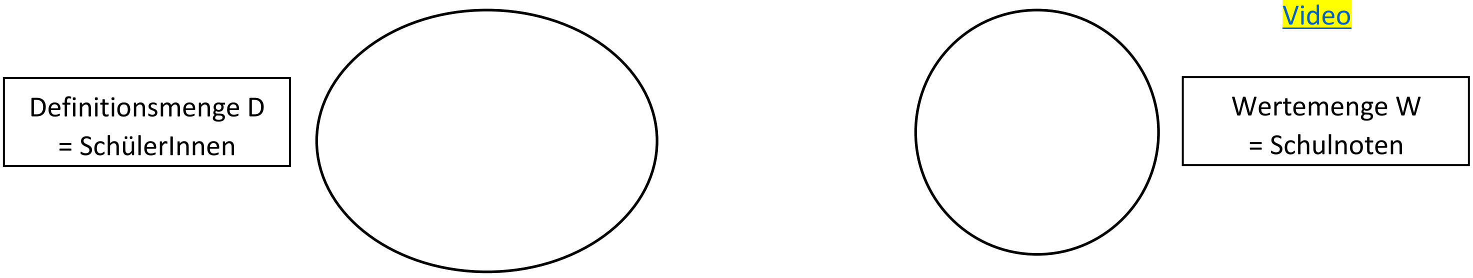
Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

FA1 Funktionen – Grundlagen

Video

1. Definition einer Funktion

Beispiel: Ein Mathematiklehrer verteilt nach einer Schularbeit seinen 7 SchülerInnen S1, S2, S3, S4, S5, S6 und S7 eine Note zwischen 1 und 5.



Jede Schülerin bzw. **jeder Schüler** darf nur **eine Note** erhalten! Es können jedoch **mehrere SchülerInnen dieselbe Note** erhalten. Dies ist zugleich die wichtigste Eigenschaft einer Funktion:

Definition (Funktion)

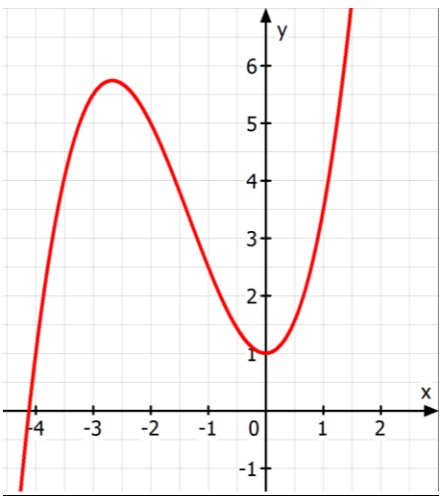
Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung, die jedem Wert aus der **Definitionsmenge D** (Stellen, Argumente) **genau einen Wert** aus der **Wertemenge W** (Funktionswerte) zuordnet.

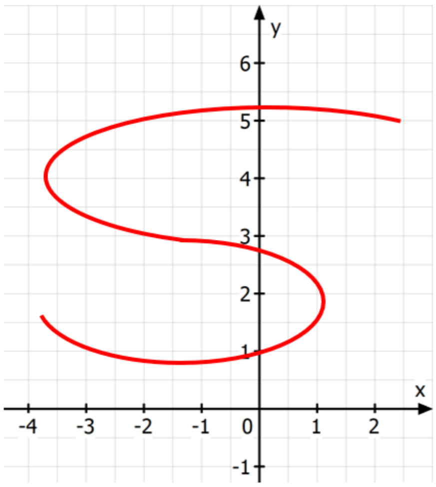
Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung.

Zusammenfassung:

1. **Jedem Element der Definitionsmenge (=Stelle, Argument)** (x) darf **NUR EIN Element der Wertemenge (=FUNKTIONSWERT)** (y,f(x)) zugeordnet werden.
2. ABER Ein **Element der Wertemenge** (y, f(x)) kann **mehreren Elementen der Definitionsmenge** (x) zugeordnet werden.
   (vgl. das Musterbeispiel der Schülerinnen (x, Definitionsmenge) und der Noten (y, Wertemenge).

Bsp. 1) Welcher der folgenden Graphen stellt eine Funktion dar?





2. Darstellung einer Funktion

In der Mathematik bestehen die Definitions- und Wertemenge in der Regel aus Zahlen (meist aus den reellen Zahlen). Somit weist die Funktion f jeder Zahl x einer Definitionsmenge eine andere Zahl y einer Wertemenge zu.

Video

a. Mengendiagramm

Die Elemente der Definitionsmenge werden durch die Funktion mit Elementen der Wertemenge verbunden. Jedes Element der Definitionsmenge muss genau ein Element der Wertemenge erhalten.

Burschen (Definitionsmenge) **Lieblingsfarbe (Wertemenge)**

b. Wertetabelle

- Mit Hilfe einer Wertetabelle können Punkte einer Funktion ermittelt werden. Damit kann der Funktionsgraph gezeichnet werden.
- In der ersten Spalten stehen x-Werte, in der zweiten die y-Werte (=Funktionswerte).
- Die **Einheiten** der Größen sollten gegebenfalls angegeben sein. (bei anwendungsorientierten Aufgaben)

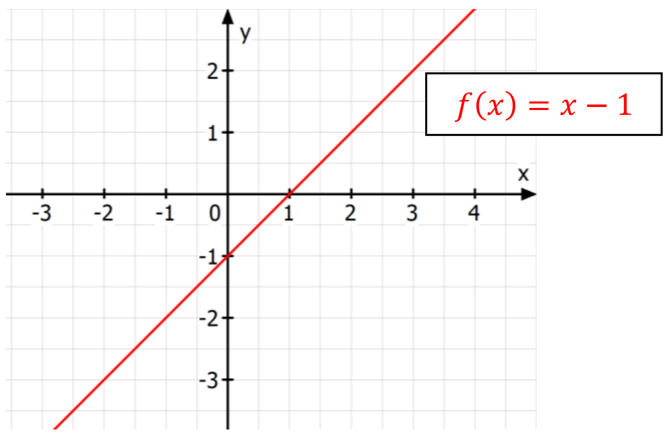
x	$f(x) = x - 1$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

c. Graph

Um den Graphen einer Funktion zu erhalten, werden Wertepaare in ein Koordinatensystem eingezeichnet:

- Die **x-Werte** werden auf der **waagrechten Achse** (Abszisse) aufgetragen.
- Die **y-Werte** wird auf der **senkrechten Achse** (Ordinate) aufgetragen.
- Die Beschriftung der Achsen ist bei jedem Graphen sehr wichtig. Es muss ersichtlich sein, welche Werte auf den einzelnen Achsen und in welchen Einheiten sie aufgetragen werden.

Die x- und y-Werte aus der Wertetabelle können in einem Koordinatensystem als Punkte mit den Koordinaten (x, y) angegeben werden. Das entstehende Gebilde nennt man dann **Graph der Funktion**.



Bemerkung: Je nach **Funktionstyp** kann der Graph der Funktion z.B. eine Gerade oder auch eine Kurve sein (s.u.).

d. <u>Funktionsgleichung</u>

Die Schreibweise f(x) (gesprochen: „f von x“) drückt aus, dass die Größe f von der Größe x abhängt.

$$f(x) = x - 1 \quad < - - \text{Funktionsgleichung!!!}$$

Die Berechnung vom Umfang eines Quadrats kann auch mit Hilfe einer Funktionsgleichung angegeben werden:

$$u(s) = 4 \cdot s$$

- s… gibt die Seitenlänge eines Quadrats an (in cm)
- u(s)… gibt den Umfang eines Quadrats an (in cm)

<u>Weitere Beispiele für Funktionsgleichungen</u>: $f(x) = x^2$; $f(x) = 3x^2 + 2x - x - 1$; $u(s) = 4 \cdot s$

Bsp. 2) Welche Wertetabelle stellt eine Funktion dar?

x	$f(x)$
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

O JA O NEIN

x	$f(x)$
0	2
1	3
1	4
2	4
3	3
4	2
5	1

O JA O NEIN

x	$f(x)$
-6	3
-4	3
-2	3
0	3
2	3
4	3
6	3

O JA O NEIN

x	$f(x)$
3	0
3	1
3	1
3	2
3	3
3	4
3	5

O JA O NEIN

x	$f(x)$
1	1
1	1
2	1
2	1
3	1
3	1
5	1

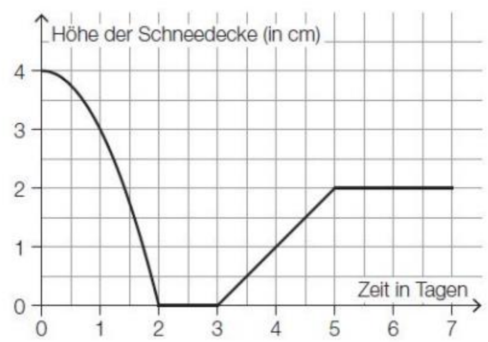
O JA O NEIN

x	$f(x)$
1	14
10	9
13	14
17	23
22	20
28	29
33	14

O JA O NEIN

Höhe der Schneedecke (c) - 2_FT001, FA1.1 FA2.2, Offenes Antwortformat Halboffenes Antwortformat

c) Nachstehend ist modellhaft die Entwicklung der Höhe der Schneedecke in Zentimetern innerhalb einer Woche in einer bestimmten Stadt abgebildet.



Gerhard behauptet, dass es sich beim Verlauf der Höhe der Schneedecke nicht um den Graphen einer Funktion handelt.

1) Begründen Sie, warum seine Behauptung <u>nicht</u> richtig ist.

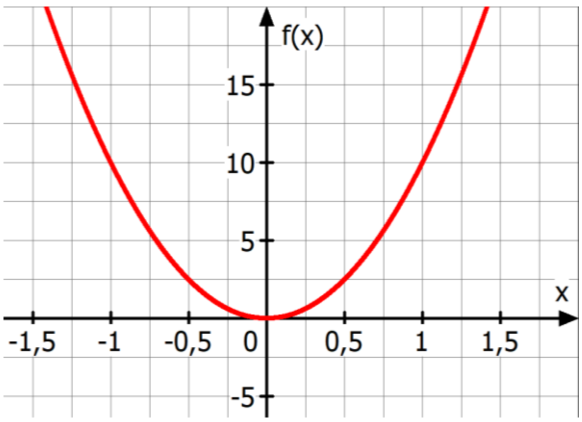
3. Bezeichnungen bei Funktionen

- Die Elemente der Definitionsmenge D einer Funktion nennt man **Argumente** oder **Stellen** einer Funktion.
- Die Elemente der Wertemenge W nennt man **Funktionswerte** einer Funktion.
- $f(x)$ ist der **Funktionswert** der Funktion f **an der Stelle** x.
- Der **Graph** der Funktion f besteht aus den **Punkten** $(x|f(x))$.

SCAN MICH

Video

Bsp. 3) Ermittle die Lösung graphisch.



$f(0,5) =$

$f(-1) =$

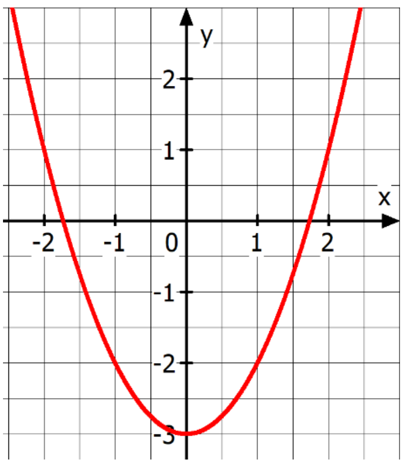
An welchen Stellen hat die Funktion den Funktionswert $f(x) = 15$?

Gib die Koordinaten des Punktes an der Stelle $x = 0,5$ an.

Unterschied Stelle (Argument) – Punkt

- Punkte bestehen aus einer x- und y- Koordinate $P = (x, y)$
- Eine Stelle (Ein Argument) ist jedoch nur der zugehörige x-Wert des Punktes P.

Bsp.: *Der Punkt* $P = (3|4)$ *besitzt die Stelle* $x = 3$.



Bsp. 4) Beantworte die Fragen. Bei den Aufgaben (a) und (d) zeichne zusätzlich die graphische Bestimmung ein.

a. $f(-2) =$

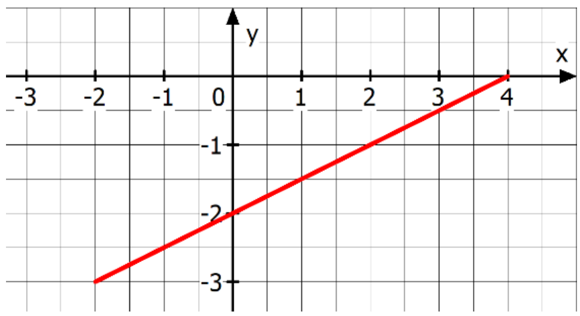
b. $f(1) =$

c. Wie lautet der Funktionswert an der Stelle $x = -1$:

d. An welcher Stelle/n hat die Funktion den Funktionswert $f(x) = -3$?

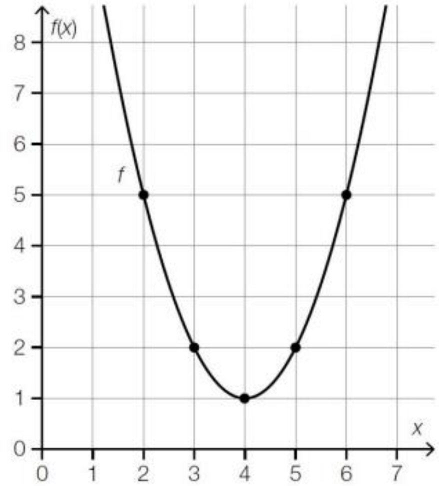
e. An welcher Stelle/n hat die Funktion den Funktionswert $f(x) = 1$?

Bsp. 5) Gib die **Definitions**- und **Wertemenge** der Funktion an.



Wertepaare* - 1_884, FA1.4, Lückentext

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der quadratischen Funktion f.
Die gekennzeichneten Punkte des Graphen haben ganzzahlige Koordinaten.



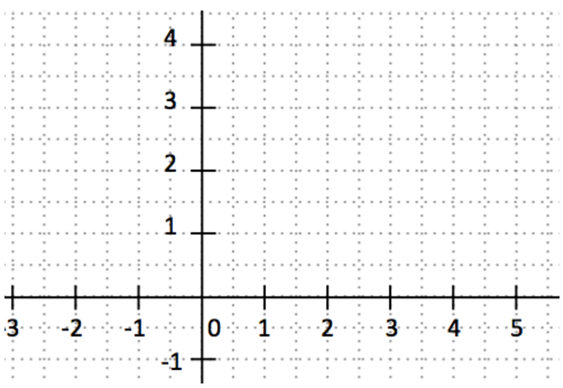
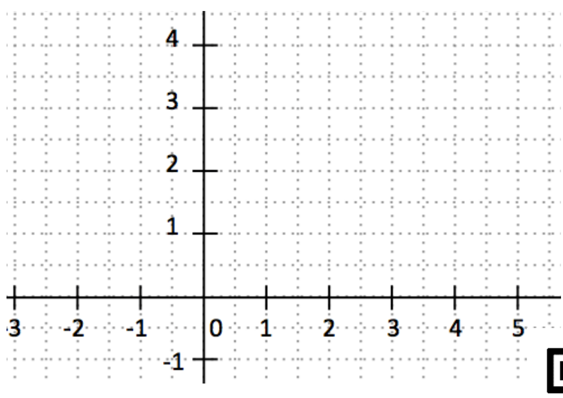
Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Für ______①______ gilt $f(x) \leq 5$; für $x \in [3; 5]$ gilt ______②______.

①	
$x \in [1; 5]$	☐
$x \in [2; 6]$	☐
$x \in [3; 7]$	☐

②	
$f(x) \in [1; 2]$	☐
$f(x) \in [0; 1]$	☐
$f(x) \in [2; 5]$	☐

Bsp. 6) Skizziere einen **beliebigen Graphen** der Funktion f, für den folgende **Bedingungen** gelten:

▪ $D_f = [-2; 5]$ ▪ $W_f = [-1; 3]$ ▪ $f(-1) = -1$ ▪ $f(3) = 3$ ▪ $f(5) = 2$ 	▪ $D_f = [-2; 3]$ ▪ $W_f = [1; 3]$ ▪ $f(-1) = 2$ ▪ $f(2) = 1$ ▪ $f(3) = 2$ 

4. PUNKTE AUF EINEM FUNKTIONSGRAPHEN

<u>Überprüfung</u>: Liegt ein Punkt auf einer Funktion?

Setze die **x-Koordinate** des Punktes in die **Funktionsgleichung** ein. Stimmt der erhaltene **Funktionswert** mit der **y-Koordinate** des Punktes überein, so liegt der **Punkt** auf dem **Funktionsgraphen**!!! Video

$A=(5\|\mathbf{3}),\ \ f(x)=2x-7$ Liegt der Punkt A auf dem Funktionsgraphen? $A=(5\|3)\rightarrow x-Koordinate: x=5$ $f(5)=2\cdot 5-7=10-7=\mathbf{3}$ $f(5)=\mathbf{3}\ \&\ A=(5\|\mathbf{3})$ ➔ Der Punkt A liegt auf dem Graphen von $f(x)$.	$A=(2\|\mathbf{3}),\ \ f(x)=x^2+2x-7$ Liegt der Punkt A auf dem Funktionsgraphen? $A=(2\|3)\rightarrow x-Koordinate: x=2$ $f(2)=2^2+2\cdot 2-7=4+4-7=1$ $f(2)=\mathbf{1}\ \&\ A=(2\|\mathbf{3})\rightarrow 1\neq 3$ ➔ Der Punkt A liegt **NICHT** auf dem Graphen von $f(x)$.

Bsp. 7) Bestimme, ob der **gegebene Punkt** auf dem Funktionsgraphen der Funktion liegt.

$A=(2\|8), f(x)=x^2+3x-2$	$A=(0\|4), f(x)=5x+4$	$A=(-1\|-1), f(x)=3x-3$
$A=(-3\|5), f(x)=x^2+3x+4$	$A=(6\|-9), f(x)=-x^2-5x+1$	$A=(-2\|10), f(x)=x^2-4x-2$

<u>Beliebige Punkte auf einem Funktionsgraphen bestimmen</u>

Möchtest du zu einer gegebenen Funktion beliebige Punkte des Funktionsgraphen bestimmen, so musst du nur x-Werte in den Funktionsgraphen einsetzen. Der erhaltene Funktionswert entspricht der zugehörigen y-Koordinate des Punktes. (vgl. Wertetabelle)

$\mathrm{f(x)=3x+7}$ **<u>Bestimme drei beliebige Punkte auf dem Funktionsgraphen:</u>** $x=\mathbf{1}\rightarrow f(1)=3\cdot 1+7=\mathbf{10}\rightarrow \boldsymbol{A}=(\mathbf{1}\|\mathbf{10})$ $x=\mathbf{-4}\rightarrow f(-4)=3\cdot(-4)+7=-12+7=\mathbf{-5}\rightarrow \boldsymbol{B}=(\mathbf{-4}\|\mathbf{-5})$ $x=\mathbf{3}\rightarrow f(3)=3\cdot 3+7=\mathbf{16}\rightarrow \boldsymbol{C}=(\mathbf{3}\|\mathbf{16})$	$\mathrm{f(x)=-x^2+x-1}$ **<u>Bestimme drei beliebige Punkte auf dem Funktionsgraphen:</u>** $x=\mathbf{1}\rightarrow f(1)=-1^2+1-1=-1+1-1=\mathbf{-1}\rightarrow \boldsymbol{A}=(\mathbf{1}\|\mathbf{-1})$ $x=\mathbf{-4}\rightarrow f(-4)=-(-4)^2-4-1=$ $=-16-4-1=\mathbf{-21}\rightarrow \boldsymbol{B}=(\mathbf{-4}\|\mathbf{-21})$ $x=\mathbf{3}\rightarrow f(3)=-3^2+3-1=-9+3-1=\mathbf{-7}\rightarrow \boldsymbol{C}=(\mathbf{3}\|\mathbf{-7})$

Bsp. 8) Bestimme je zwei beliebige Punkte auf dem Funktionsgraphen. Wähle immer verschiedene Argumente (=x-Werte)

$f(x)=x^2+3x-2$	$f(x)=5x+4$
$f(x)=5x^2-16$	$f(x)=-x^2-5x+1$

<u>Interpretieren der Funktionssprache</u>

INTERPRETIEREN Video

SCAN MICH

Interpretieren heißt in der Mathematik, die **Bedeutung** eines mathematischen Ausdrucks (Zahl, Koordinate, Term, Gleichung, …) im geschilderten **Sachzusammenhang** (Kontext) zu **beschreiben**. Bei dieser Beschreibung sollte man **Alltagssprache** verwenden und soweit wie möglich auf **mathematische Formulieren verzichten**.

Bsp. 9) $Z(x)$ bezeichnet die Zeit in Stunden, die x Personen für eine bestimmte Arbeit benötige. Interpretiere folgende Ausdrücke im Kontext.

Ausdruck	Interpretation
$Z(15) = 30$	
$Z(4)$	
$Z(11) < Z(5)$	
$Z(6) = \frac{1}{2} \cdot Z(3)$	
$Z(1) = Z(3) + 4$	

Bsp. 10) $s(t)$ beschreibt den Weg s (in m), den eine Person in t Minuten zurücklegt. Interpretiere den Ausdruck im Kontext.

Ausdruck	Interpretation
$s(3) = 150$	
$s(7) = s(6) + 50$	
$s(2t) = 2s(t)$	
$s(100) - s(90) = 300$	

Bsp. 11) s(t) beschreibt die Strecke (in km), die ein Auto in t Stunden zurücklegt. Übersetze folgende Aussagen in die Funktionen-Sprache.

Ausdruck	Interpretation
$s(5) = 100$	Nach fünf Stunden hat das Auto 100 km zurückgelegt.
	Nach sechs Stunden ist das Auto um 250 km mehr gefahren als nach vier Stunden.
	Nach vier Stunden ist das Auto dreimal soweit gefahren, wie nach einer Stunde.
	Das Auto legt jede Stunde 35 km zurück.
	Das Auto hat nach acht Stunden Fahrzeit im Durchschnitt 30km pro Stund

Nullstellen einer Funktion

Ist an einer Stelle x der Funktionswert $f(x)$ gleich 0, so nennt man x eine **Nullstelle** der Funktion f.

Video

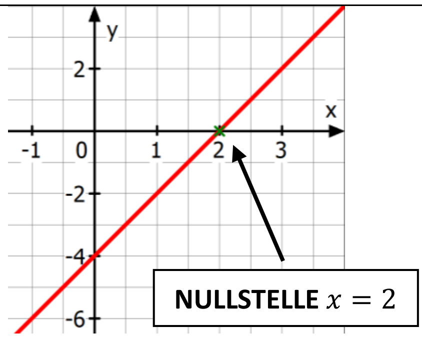
$$f(x) = 0$$

Der Graph schneidet an dieser Stelle die waagrechte Achse (Abszisse).

Willst du die Nullstellen einer Funktion bestimmen, musst du die Gleichung $f(x) = 0$ lösen.

Beispiel: $f(x) = 2x - 4$

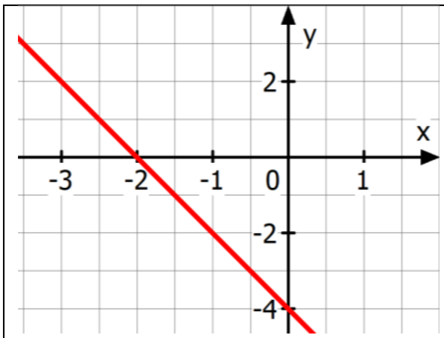
$$f(x) = 0$$
$$2x - 4 = 0 \quad | + 4$$
$$2x = 4 \quad | : 2$$
$$x = 2$$
$$\rightarrow x = 2 \text{ ist eine } \boldsymbol{Nullstelle}$$

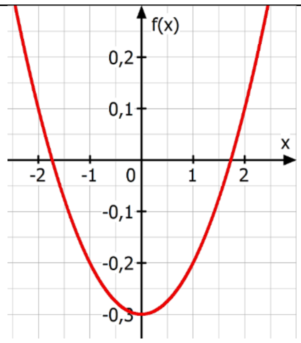


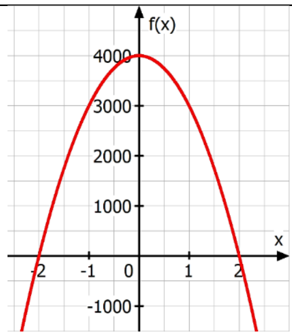
Bsp. 12) Bestimme rechnerisch die Nullstellen der Funktion f.

a. $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$	**b.** $f(x) = -4x$	**c.** $f(x) = x^2 - x - 12$

Bsp. 13) Bestimme **graphisch** die Nullstelle/n der Funktion f.







Bsp. 14) Interpretiere die Bedeutung der angegebenen **Nullstelle** im jeweiligen Kontext.

a. $h(t)$ gibt die Höhe h (in m) eines senkrecht hinauf geworfenen Steines t Sekunden nach dem Abwurf an. $h(8) = 0$	**b.** $W(J)$ gibt das Wirtschaftswachstum W im Jahr J an. $W(2014) = 0$

Berechnungen mit einer Funktionsgleichung

Video

Es gibt stets **zwei Möglichkeiten** (IMMER!!), wie du mit einer Funktion **Berechnungen** durchführen kannst.

Möglichkeit 1: Argument (=Stelle) gegeben -> Funktionswert gesucht

$$f(x) = x^2 - 5$$

Frage: Wie lautet der Funktionswert an der Stelle $x = 2$?

Wenn ein **Argument** gegeben & der **zugehörige Funktionswert** gesucht ist, musst du das Argument in die Funktionsgleichung einsetzen und berechnen:

$$f(2) = 2^2 - 5 = 4 - 5 = \mathbf{-1}$$

Bemerkung: Wenn du zu einem Argument den Funktionswert berechnet hast, kannst du in weiterer Folge die Koordinaten des Punktes bestimmen:

$$f(2) = -1 \quad \rightarrow \quad P = (\mathbf{2} | \mathbf{-1})$$

x-Koordinate **y-Koordinate**

Möglichkeit 2: Funktionswert gegeben -> Stelle/Argument gesucht

Ist ein Funktionswert gegeben, so musst du diesen Wert STATT deiner Funktion einsetzen. In weiterer Folge musst du die Gleichung lösen, um deine Lösung zu erhalten!!

Bemerkung:

- Bei einer linearen Funktion musst du eine lineare Gleichung lösen!
- Bei einer quadratischen Funktion erhältst du eine quadratische Gleichung!

Fragestellung: Bei welcher/n Stelle/n hat die Funktion einen Funktionswert von $f(x) = \mathbf{10}$?

$f(x) = 2x - 4$ $\mathbf{10} = 2x - 4 \quad \vert +4$ $14 = 2x \quad \vert :2$ $7 = x$ An der Stelle $x = 7$ hat die Funktion den Funktionswert 10. Es gilt: $f(7) = 10$	$f(x) = 2x^2 + 4x + 4$ $\mathbf{10} = 2x^2 + 4x + 4 \quad \vert -10$ $0 = 2x^2 + 4x - 6$ $2x^2 + 4x - 6 = 0$ **Große Lösungsformel**: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\rightarrow x_1 = -3 \quad x_2 = 1$ An den Stellen $x_1 = -3 \ und \ x_2 = 1$ hat die Funktion den Funktionswert 10.

Bsp. 15) Berechne zu der Funktion jeweils den Funktionswert an der Stelle $x = -4, x = 1 \ und \ x = 10$.

$f(x) = -5x + 20$	$f(x) = -x^2 - 2x - 6$

Bsp. 16) Berechne das Argument/die Argumente, bei der/denen der gewünscht Funktionswert auftritt.

$f(x) = \frac{1}{3}x + 6$ **gesucht**: $f(x) = -1?$	$f(x) = -x^2 + 2x + 4$ **gesucht**: $f(x) = 1?$

<table>
<tr><td colspan="2">Anwendungsorientiertes Beispiel
WH: Es gibt IMMER zwei Möglichkeiten, um Berechnungen mit einer Funktionsgleichung durchzuführen!</td></tr>
<tr><td colspan="2">$h(t) = -0{,}5 \cdot t + 10$ beschreibt die Höhe einer Kerze, die mit zunehmenden Abbrennen immer kleiner wird. Zu Beginn ist die Kerze 10 cm hoch, da $h(0) = 10$ ist. Pro Minute wird die Kerze um 0,5 cm kleiner.</td></tr>
<tr><td>Möglichkeit 1: Argument („x-Wert“) gegeben
-> zugehöriger Funktionswert gesucht (EINSETZEN!)</td><td>Möglichkeit 2: Funktionswert gegeben
-> zugehörige/s Argument/e gesucht, bei denen der Funktionswert eintritt (Wert statt $f(x), N(t), \ldots$ einsetzen)</td></tr>
<tr><td>ARGUMENTE = Zeitpunkte (in diesem Beispiel)
▪ Wie hoch ist die Kerze nach 5 Minuten?
Argument $t = 5$ -> zugehöriger Funktionswert $h(5)$ gesucht
$h(5) = -0{,}5 \cdot 5 + 10 = -2{,}5 + 10 = 7{,}5\ cm$

Ist ein Argument gegeben, so musst du dieses Argument in die Funktionsgleichung einsetzen, um den zugehörigen Funktionswert zu erhalten 😊</td><td>FUNKTIONSWERTE = Höhe der Kerze
▪ Wann erreicht die Kerze eine Höhe von 3 cm?
Funktionswert $h(t) = 3$ -> Argument/Zeitpunkt gesucht!!!
$h(t) = -0{,}5 \cdot t + 10$
$3 = -0{,}5 \cdot t + 10 \quad | -10$
$-7 = -0{,}5 \cdot t \quad | : (-0{,}5)$
$14 = t \rightarrow nach\ 14\ Minuten$
Ist ein Funktionswert gegeben, so musst du diesen Wert statt der Funktion f(x), N(t), … einsetzen und die entstehende Gleichung nach dem Argument auflösen. 😊</td></tr>
</table>

Bsp. 17) Das Gewicht nach der Geburt von Moritz kann mit Hilfe der Funktion $N(t) = 3000 + 300 \cdot t$ angegeben werden. Die Zeit t gibt dabei die Wochen nach der Geburt an. $N(t)$ gibt das Gewicht in Gramm nach t Wochen an.

a. Moritz ist bei seiner Taufe 9 Wochen alt. Welches Gewicht hat er?
b. Wann erreicht Moritz ein Gewicht von 6,3 kg?

Bsp. 18) Bei einem großen Schwimmteich ist am Boden bei der Teichfolie ein Loch entstanden. Ursprünglich waren im Schwimmteich 100 000 Liter Wasser. Pro Minuten rinnen nun 50 Liter Wasser ab. Dieses Modell kann mit Hilfe der Funktionsgleichung $N(t) = 100\,000 - 50 \cdot t$ angegeben werden, wobei N(t) das Wasservolumen nach t Minuten angibt.

a. Nach wie vielen Minuten bzw. Stunden sind nur mehr 15% vom ursprünglichen Wasservolumen im Badeteich?
b. Wie viele Liter Wasser sind nach 2 Stunden noch im Teich?
c. Wann ist der Teich komplett ausgeronnen? (Tipp: Wann sind 0 Liter im Teich)

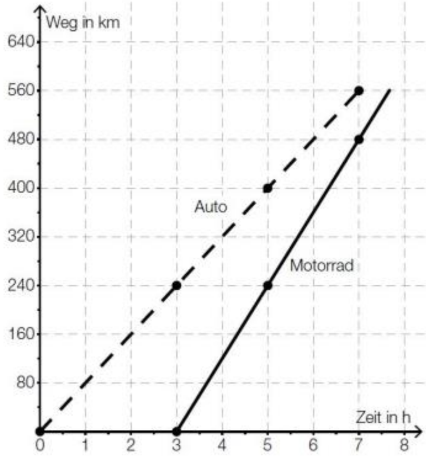
Bsp. 19) Ein Bogenschütze schießt einen Pfeil senkrecht in die Höhe. Die Höhe h (in Meter) des Pfeils in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) wird beschrieben durch die Funktionsgleichung:

$$h(t) = -t^2 + t + 2$$

a. Löse die Gleichung $h(t) = 0$ und erkläre die Bedeutung der Lösungen.
b. Nach welcher Zeit hat der Pfeil wieder die Abschusshöhe ($h = 2m$) erreicht?
c. Wie hoch fliegt der Pfeil nach 1,5 Sekunden?

Daten aus einem Diagramm ablesen* - 1_511, FA1.4, 2 aus 5

Ein Motorradfahrer fährt dieselbe Strecke (560 km) wie ein Autofahrer. Die beiden Bewegungen werden im nachstehenden Zeit-Weg-Diagramm modellhaft als geradlinig angenommen. Die hervorgehobenen Punkte haben ganzzahlige Koordinaten.



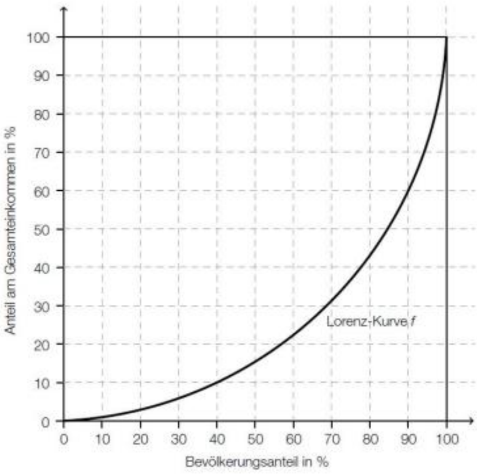
Der Motorradfahrer fährt drei Stunden nach der Abfahrt des Autofahrers los.	☐
Das Motorrad hat eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 100 km/h.	☐
Wenn der Autofahrer sein Ziel erreicht, ist das Motorrad davon noch 120 km entfernt.	☐
Die Durchschnittsgeschwindigkeit des Autos ist um 40 km/h niedriger als jene des Motorrads.	☐
Die Gesamtfahrzeit des Motorradfahrers ist für diese Strecke größer als jene des Autofahrers.	☐

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die eine korrekte Interpretation des Diagramms darstellen!

Lorenzkurve* - 1_414, FA1.4, 2 aus 5

Die in der unten stehenden Abbildung dargestellte Lorenz-Kurve kann als Graph einer Funktion *f* verstanden werden, die gewissen Bevölkerungsanteilen deren jeweiligen Anteil am Gesamteinkommen zuordnet.

Dieser Lorenz-Kurve kann man z. B. entnehmen, dass die einkommensschwächsten 80 % der Bevölkerung über ca. 43 % des Gesamteinkommens verfügen. Das bedeutet zugleich, dass die einkommensstärksten 20 % der Bevölkerung über ca. 57 % des Gesamteinkommens verfügen.



Quelle: http://www.lai.fu-berlin.de/e-learning/projekte/vwl_basiswissen/Umverteilung/Gini_Koeffizient/index.html [21.01.2015] (adaptiert).

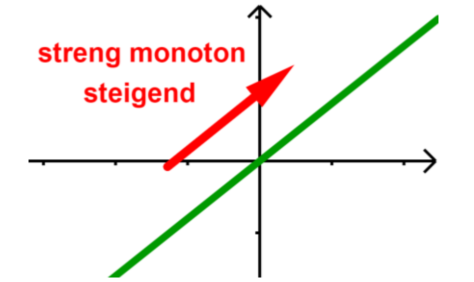
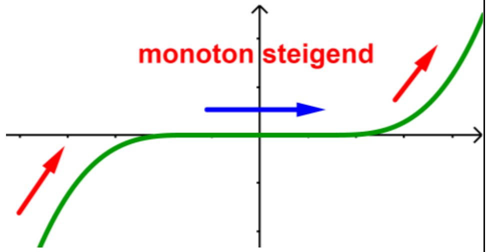
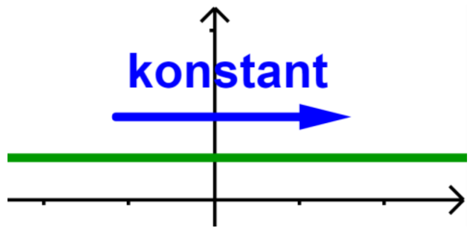
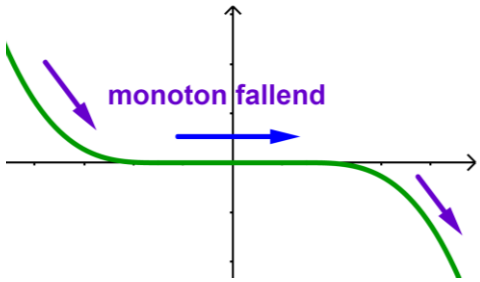
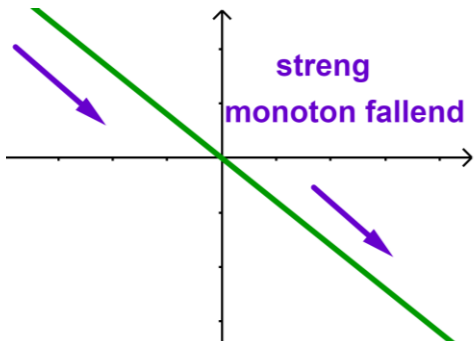
Kreuzen Sie die beiden für die oben dargestellte Lorenz-Kurve zutreffenden Aussagen an!

Die einkommensstärksten 10 % der Bevölkerung verfügen über ca. 60 % des Gesamteinkommens.	☐
Die einkommensstärksten 40 % der Bevölkerung verfügen über ca. 90 % des Gesamteinkommens.	☐
Die einkommensschwächsten 40 % der Bevölkerung verfügen über ca. 10 % des Gesamteinkommens.	☐
Die einkommensschwächsten 60 % der Bevölkerung verfügen über ca. 90 % des Gesamteinkommens.	☐
Die einkommensschwächsten 90 % der Bevölkerung verfügen über ca. 60 % des Gesamteinkommens.	☐

Monotonie einer Funktion:

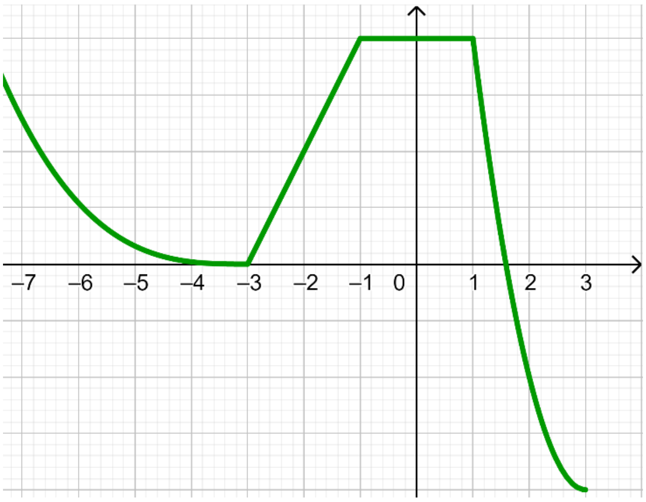
Video

Das Monotonieverhalten einer Funktion gibt an, ob der Graph **steigt, fällt oder gleich bleibt**, wobei immer von **links** nach **rechts** geschaut wird.

Eigenschaft	Erklärung	Formale Definition	Graphik
streng monoton steigend	Der Graph geht stets bergauf. Die Funktionswerte werden kontinuierlich größer!	Ist $x_1 < x_2$, dann gilt: $f(x_1) < f(x_2)$	
monoton steigend	Die Funktionswerte werden grundsätzlich immer größer – es darf aber auch Phasen geben, in denen die Funktion konstant verläuft.	Ist $x_1 < x_2$, dann gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$	
konstant	Der Graph ist waagrecht bzw. parallel zur x-Achse. Die Funktionswerte bleiben gleich.	Ist $x_1 < x_2$, dann gilt: $f(x_1) = f(x_2)$	
monoton fallend	Die Funktionswerte werden grundsätzlich immer kleiner – es darf aber auch Phasen geben, in denen die Funktion konstant verläuft.	Ist $x_1 < x_2$, dann gilt: $f(x_1) \geq f(x_2)$	
streng monoton fallend	Der Graph geht immer bergab. Die Funktionswerte werden stets kleiner!	Ist $x_1 < x_2$, dann gilt: $f(x_1) > f(x_2)$	

Bemerkung: Ist eine Funktion weder (streng) monoton steigend bzw. fallend, dann sagt man die Funktion ist **NICHT** monoton.

Bsp. 20) Bestimme das **Monotonieverhalten** der Funktion im gegebenen Intervall.



a. $[-6;-4]$:

b. $[1;3]$:

c. $[0;2]$:

d. $[-1;0{,}5]$:

e. $[-4;2]$:

f. $[-3;0]$:

g. $[-3;-1]$:

Bsp. 21) Bestimme das Monotonieverhalten der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Verwende dazu GeoGebra.

a. $f(x) = x^2 - 2$	**b.** $f(x) = x^3 + 3x^2$	**c.** $f(x) = x^4 - 2x^2$

Bsp. 22) **Begründe**, ob die Aussage richtig oder falsch ist.

Eine monoton steigende Funktion kann auch streng monoton steigend sein.	
Gilt in einem Intervall $[a;b]$ auch $f(b) > f(a)$, so ist die Funktion streng monoton steigend.	
Jede streng monoton steigende Funktion ist auch monoton steigend.	
Eine Funktion ist streng monoton fallend, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt: $f(x_2) < f(x_1)$	
Jede monoton fallende Funktion ist auch streng monoton fallend.	

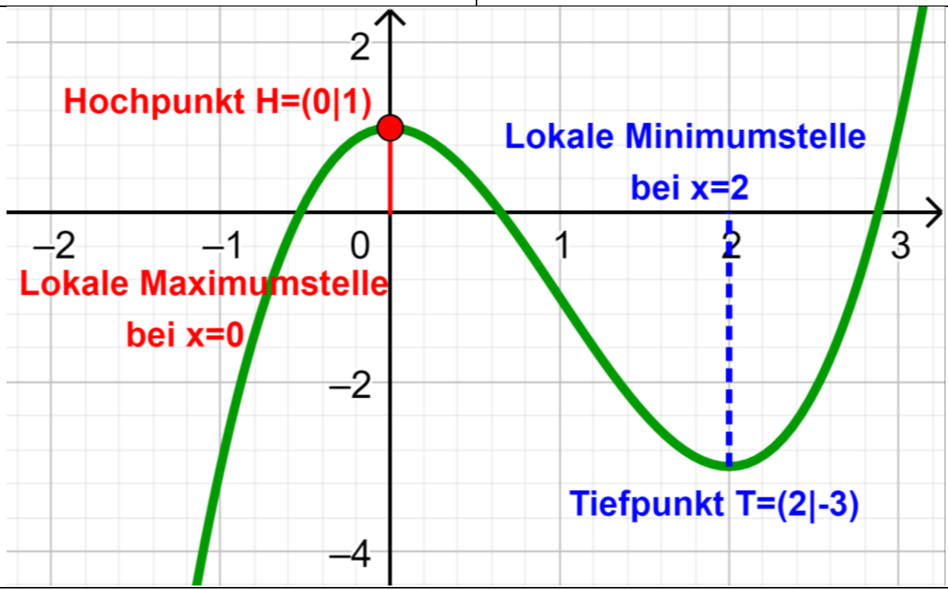
Video

Extremstellen von Funktionen: (Bemerkung: STELLE $\neq$ PUNKT)

Lokale Extremstellen

Bei lokalen Extremstellen findet stets ein **Monotoniewechsel** statt!!!

Lokale Minimumstelle	Lokale Maximumstelle
▪ **Monotoniewechsel**: fallend -> steigend ▪ Bemerkung: Die Minimumstelle ist nur diejenige **Stelle** (x-Wert), bei der dieses Minimum eintritt. Den zugehörigen Punkt nennt man **Extrempunkt** bzw. **Tiefpunkt**.	▪ **Monotoniewechsel**: steigend -> fallend ▪ Bemerkung: Die Maximumstelle ist nur diejenige **Stelle** (x-Wert), bei der dieses Maximum eintritt. Den zugehörigen Punkt nennt man **Extrempunkt** bzw. **Hochpunkt**.

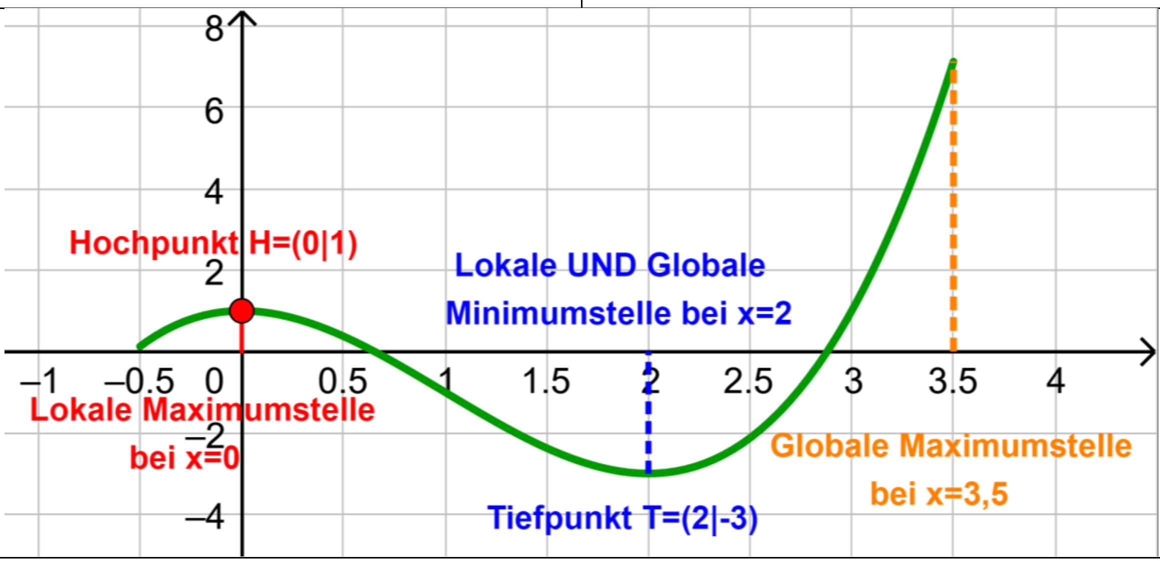


Globale Minimum- und Maximumstellen

Globale Minimum- bzw. Maximumstellen geben diejenige Stellen an, bei denen die Funktion den **kleinsten** bzw. **größten Funktionswert** in der Definitionsmenge **animmt**.

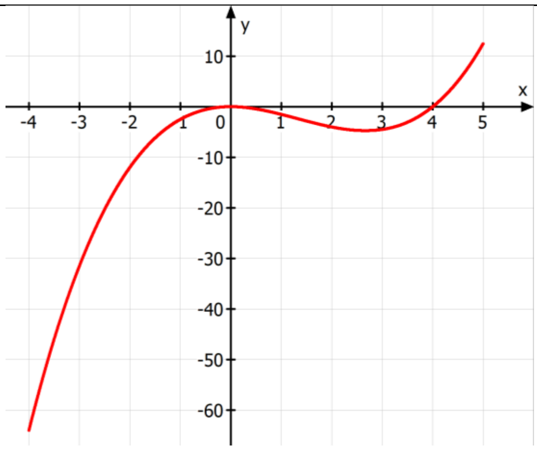
Bemerkung: Globale Minimum- bzw. Maximumstellen **können, aber müssen nicht zwingend auch lokale Extremstellen** sein, da es bei einer lokalen Extremstelle **stets zu einem Monotoniewechsel** kommen muss.

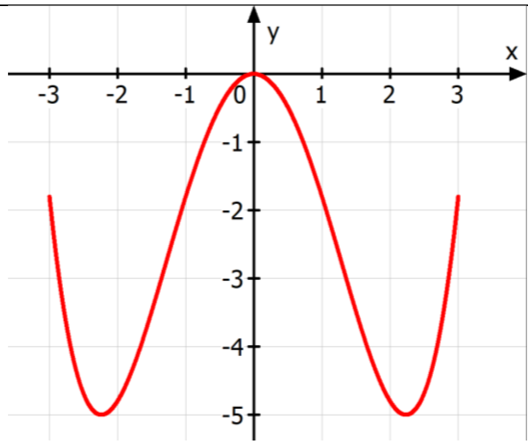
Globale Minimumstelle	Globale Maximumstelle
= diejenige Stelle/n, bei denen die Funktion den kleinsten Funktionswert annimmt.	= diejenige Stelle/n, bei denen die Funktion den größten Funktionswert annimmt.

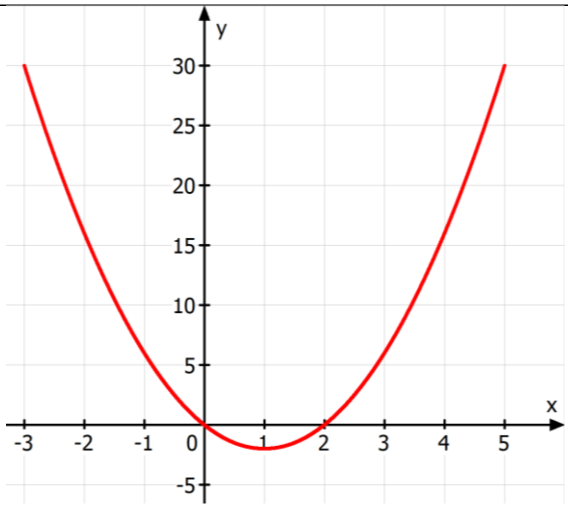


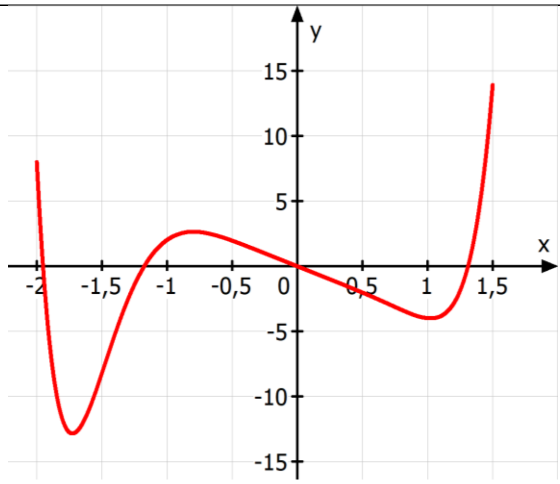
Bsp. 23) Gegeben ist der Graph einer Funktion in einem bestimmten Intervall. Bestimme…

i. die Definitions- und Wertemenge
ii. das Monotonieverhalten,
iii. alle lokalen Extremstellen (inkl. Extrempunkte: Hochpunkt/Tiefpunkt)
iv. alle globalen Extremstellen

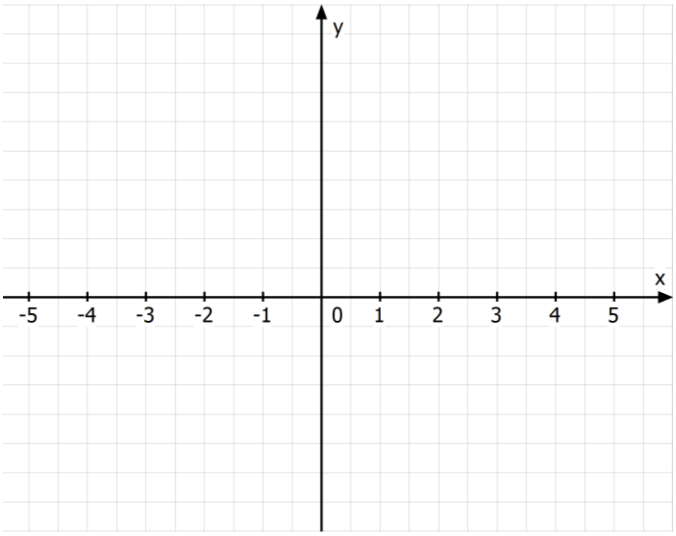
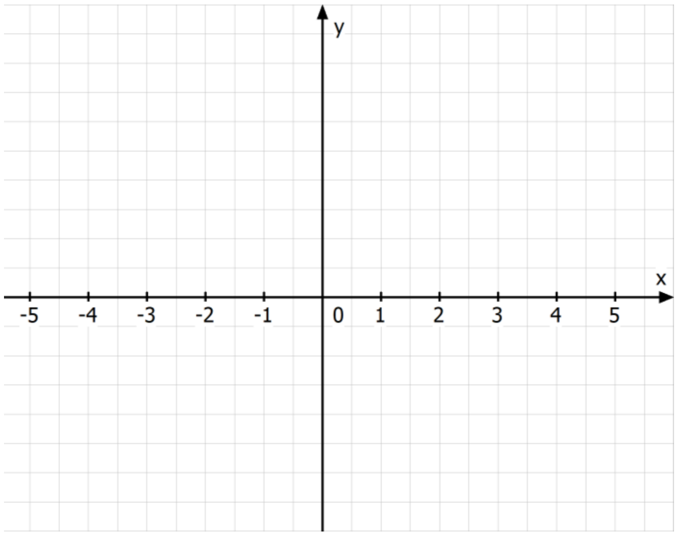








Bsp. 24) Skizziere einen möglichen Graphen mit den gegebenen Eigenschaften im Intervall $[-5; 5]$. Skaliere die y-Achse passend.

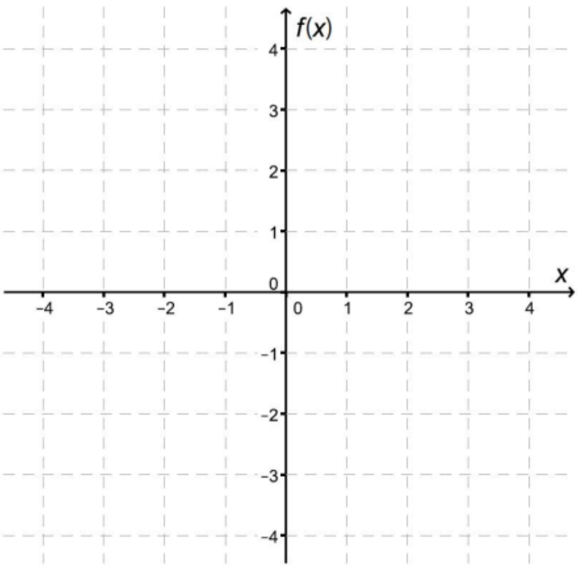
▪ verläuft durch den Punkt $P = (1\|1)$ ▪ Lokale und Globale Minimumstelle bei $x = -3$. ▪ Hochpunkt bei $(0\|2)$ 	▪ Im Intervall $[-5; -2]$: streng monoton wachsend ▪ Hochpunkt bei $(-2\|100)$ ▪ Verläuft durch den Punkt $(-0{,}5\|0)$ ▪ Lokale Minimumstelle bei $x = 1$. ▪ Globales Maximum bei $x = 5$ 

Den Graphen einer Polynomfunktion skizzieren* - 1_413, FA1.5, Konstruktionsformat

Eine Polynomfunktion f hat folgende Eigenschaften:

- Die Funktion ist für $x \leq 0$ streng monoton steigend.
- Die Funktion ist im Intervall [0; 3] streng monoton fallend.
- Die Funktion ist für $x \geq 3$ streng monoton steigend.
- Der Punkt $P = (0|1)$ ist ein lokales Maximum (Hochpunkt).
- Die Stelle 3 ist eine Nullstelle.

Erstellen Sie anhand der gegebenen Eigenschaften eine Skizze eines möglichen Funktionsgraphen von f im Intervall [–2; 4]!



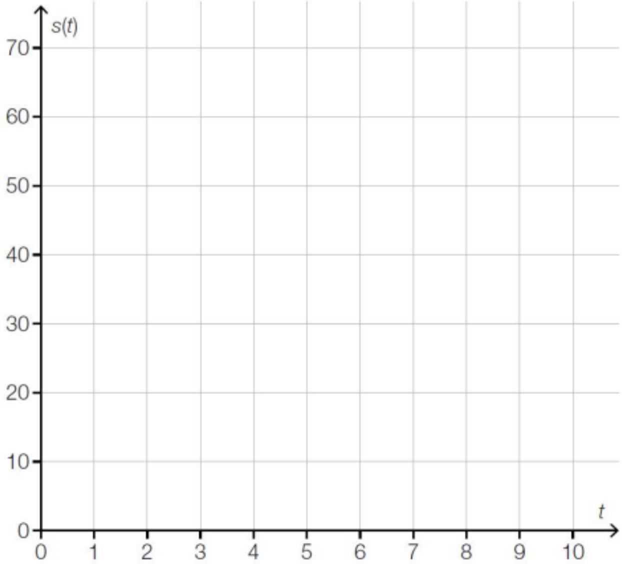
Bewegung* - 1_439, FA1.5, Konstruktionsformat

Ein Körper wird entlang einer Geraden bewegt.
Die Entfernungen des Körpers (in Metern) vom Ausgangspunkt seiner Bewegung nach t Sekunden sind in der nachstehenden Tabelle angeführt.

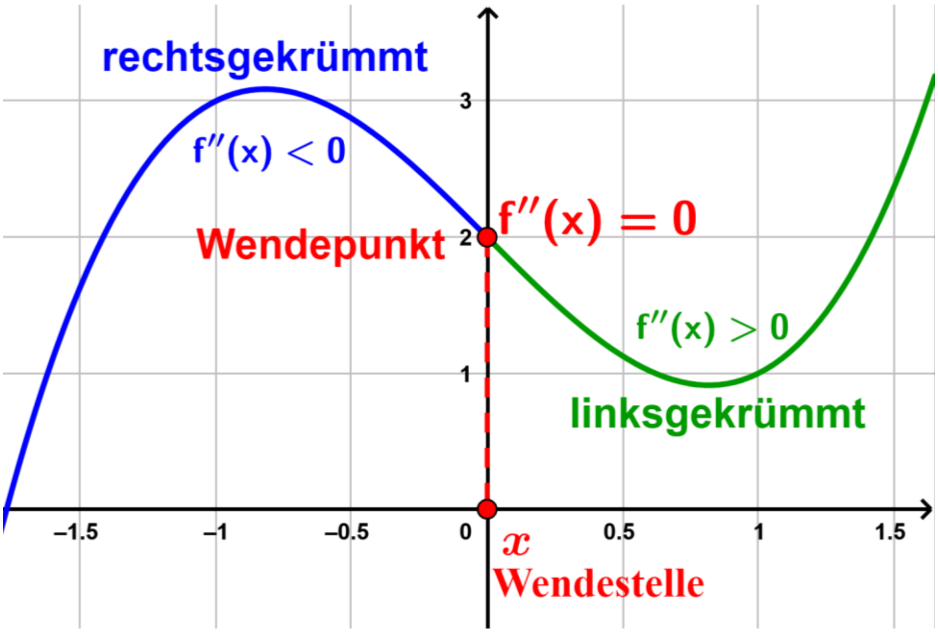
Zeit (in Sekunden)	zurückgelegter Weg (in Metern)
0	0
3	20
6	50
10	70

Der Bewegungsablauf des Körpers weist folgende Eigenschaften auf:
- (positive) Beschleunigung im Zeitintervall [0; 3) aus dem Stillstand bei $t = 0$
- konstante Geschwindigkeit im Zeitintervall [3; 6]
- Bremsen (negative Beschleunigung) im Zeitintervall (6; 10] bis zum Stillstand bei $t = 10$

Zeichnen Sie den Graphen einer möglichen Zeit-Weg-Funktion s, die den beschriebenen Sachverhalt modelliert, in das nachstehende Koordinatensystem!



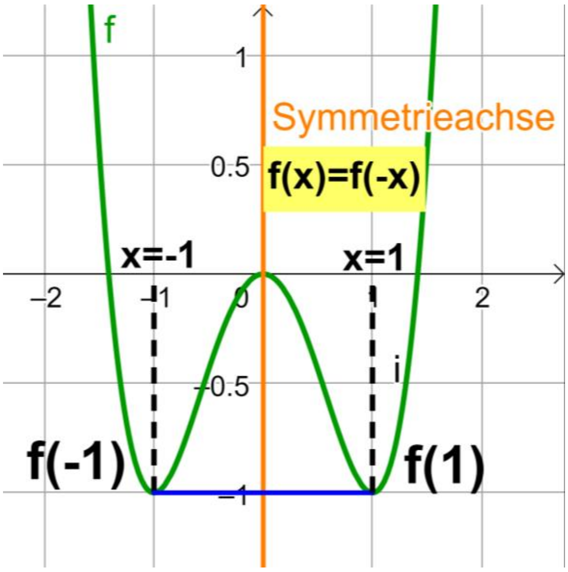
Krümmung einer Funktion

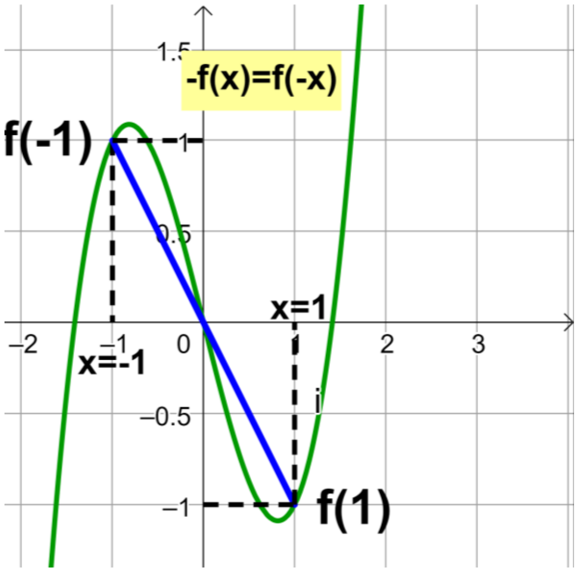


Symmetrie

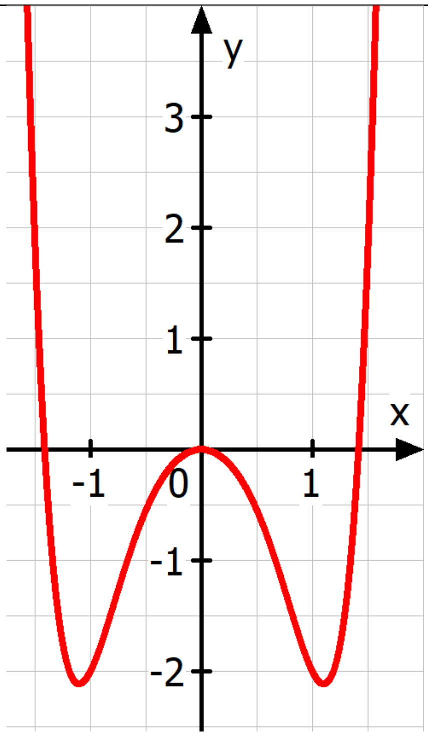
Video

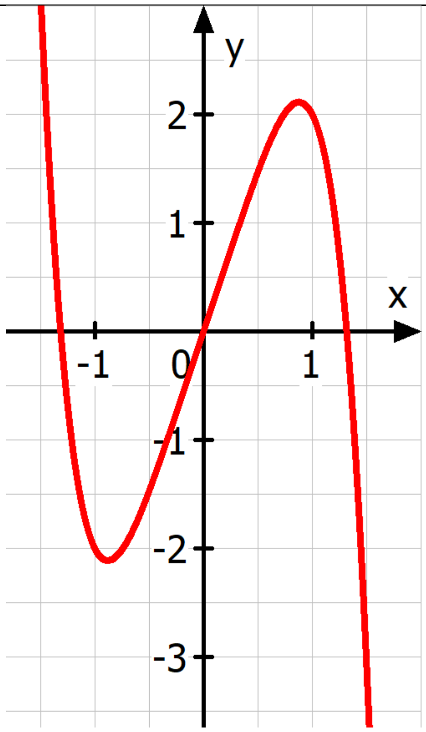
Gerade Funktionen Graph ist **symmetrisch** bezüglich der **y-Achse**	**Ungerade Funktionen** Graph ist **punktsymmetrisch** bezüglich des **Ursprungs**
Es gilt: $f(x) = f(-x)$	Es gilt: $f(-x) = -f(x)$

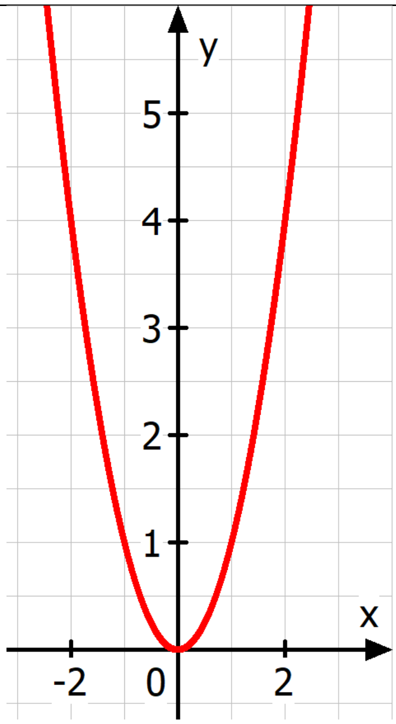




Bsp. 26) Gib aufgrund des Graphen von f an, ob die Funktion gerade oder ungerade ist.







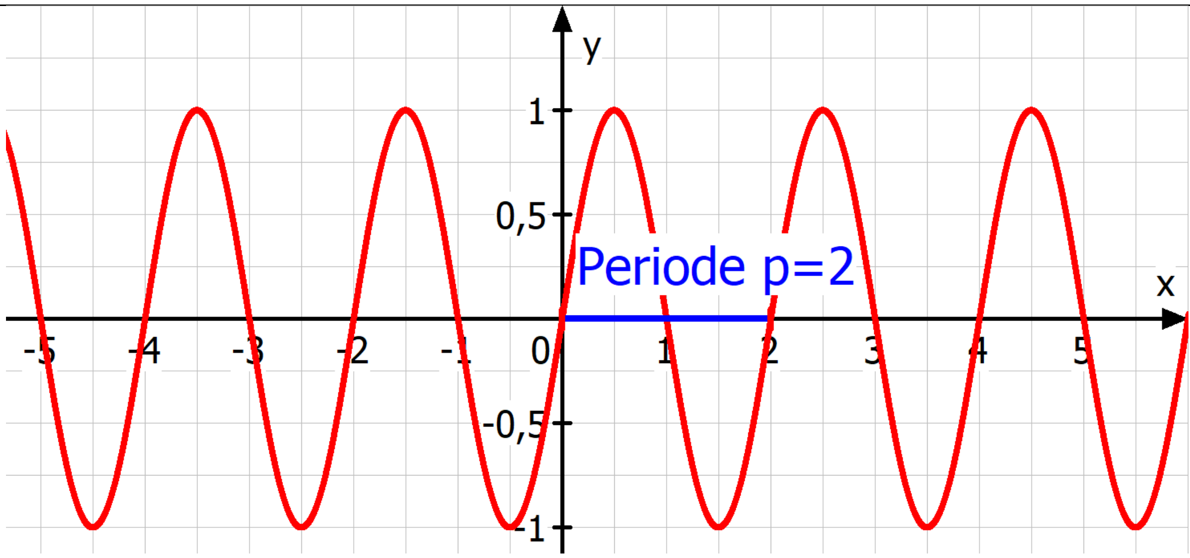
Periodizität

Video

Gilt für eine reelle Funktion f

$$\boldsymbol{f(x) = f(x+p)}$$

für alle x aus der Definitionsmenge und $p > 0$, dann nennt man f eine periodische Funktion mit Periode p.

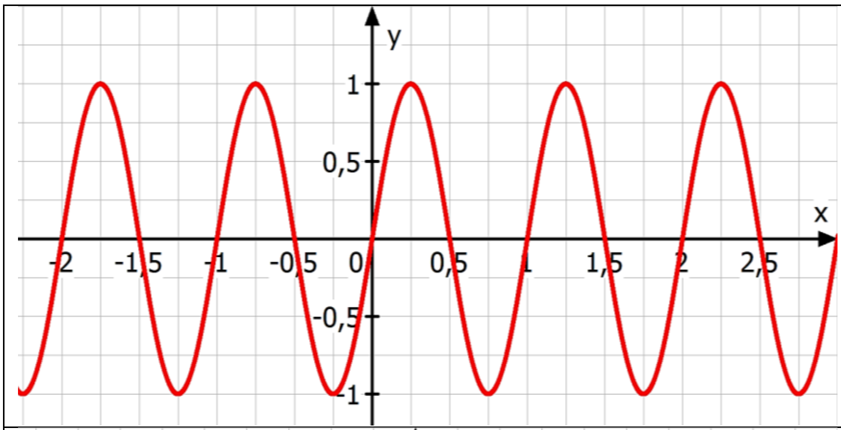


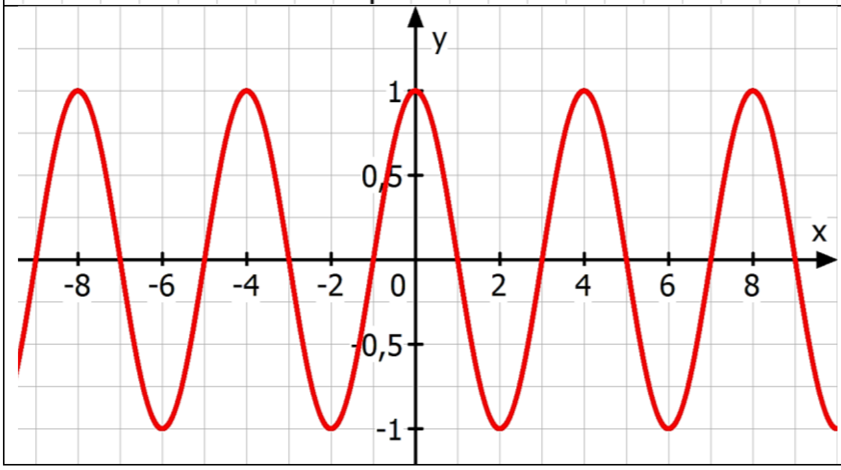
$$f(x) = f(x+\mathbf{2})$$

$$f(0) = f(2) = f(4) = f(10) = f(-2) = \cdots$$

$$f(1) = f(-1) = f(3) = f(5) = f(11) = \cdots$$

Bsp. 27) Gib die Symmetrie (Gerade/Ungerade Funktion) und die Periodizität des Funktionsgraphen an.





Eigenschaften reeller Funktionen* - 1_1185, FA1.5, Zuordnungsformat

Nachstehend sind Eigenschaften einer reellen Funktion f angegeben.

Ordnen Sie den vier Eigenschaften jeweils die zutreffende Aussage aus A bis F zu.

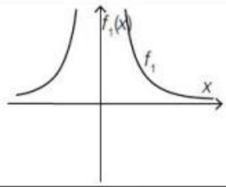
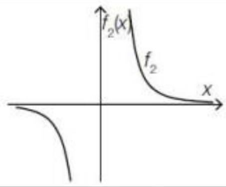
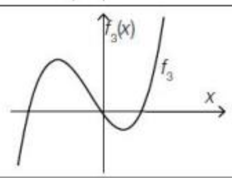
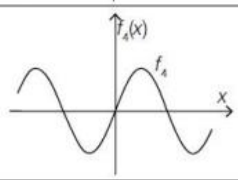
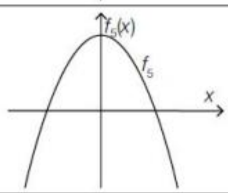
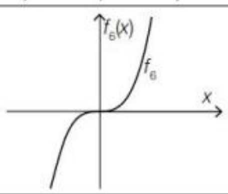
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) = f(-x)$.	
Für ein bestimmtes $m \in \mathbb{R}^+$ gilt: $f(x + m) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	
Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) > f(x_2)$.	
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) \neq 0$.	

A	f ist streng monoton steigend.
B	Der Graph von f ist symmetrisch zur senkrechten Achse.
C	Der Graph von f hat eine Asymptote.
D	f ist streng monoton fallend.
E	f ist periodisch.
F	Der Graph von f hat keinen Schnittpunkt mit der x-Achse.

Eigenschaften von Funktionsgraphen* - 1_668, FA1.5, Zuordnungsformat

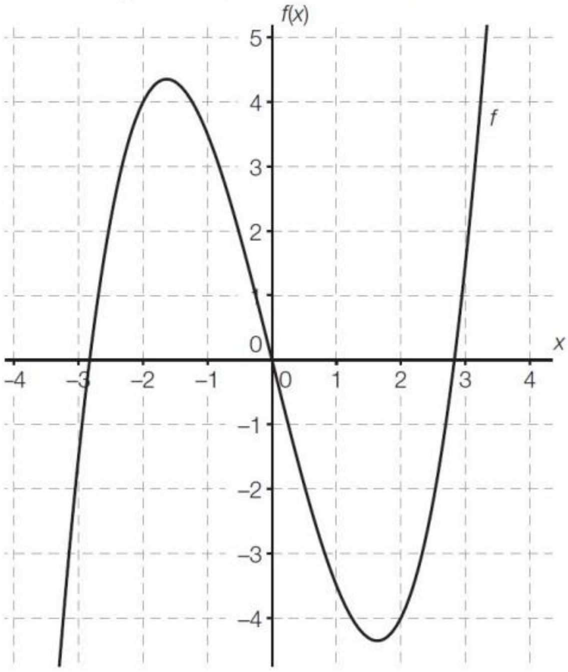
Nachstehend sind Eigenschaften von Funktionen angeführt sowie charakteristische Ausschnitte von Funktionsgraphen abgebildet.

Die Funktion ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich monoton steigend.	
Die Funktion ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich negativ gekrümmt (rechtsgekrümmt).	
Die Funktion ist auf dem Intervall $(-\infty; 0)$ positiv gekrümmt (linksgekrümmt).	
Die Funktion ist auf dem Intervall $(-\infty; 0)$ monoton fallend.	

A	
B	
C	
D	
E	
F	

Funktionseigenschaften erkennen* - 1_487, FA1.5, 2 aus 5

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion f dritten Grades.



Kreuzen Sie die beiden auf f zutreffenden Aussagen an.

Die Funktion f ist im Intervall (1; 3) monoton steigend.	☐
Die Funktion f hat im Intervall (1; 2) eine lokale Maximumstelle.	☐
Die Funktion f ändert im Intervall (–1; 1) das Krümmungsverhalten.	☐
Der Funktionsgraph von f ist symmetrisch bezüglich der senkrechten Achse.	☐
Die Funktion f ändert im Intervall (–3; 0) das Monotonieverhalten.	☐

Krümmungsverhalten einer Polynomfunktion* - 1_558, FA1.5, 1 aus 6

Der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades hat im Punkt $T = (-3|1)$ ein lokales Minimum, in $H = (-1|3)$ ein lokales Maximum und in $W = (-2|2)$ einen Wendepunkt.

In welchem Intervall ist diese Funktion linksgekrümmt (positiv gekrümmt)?
Kreuzen Sie das zutreffende Intervall an!

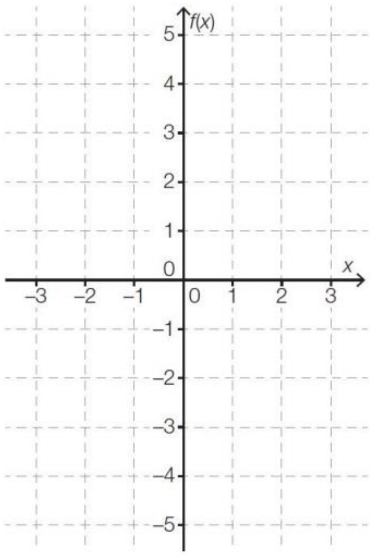
$(-\infty; 2)$	☐
$(-\infty; -2)$	☐
$(-3; -1)$	☐
$(-2; 2)$	☐
$(-2; \infty)$	☐
$(3; \infty)$	☐

Graph einer Polynomfunktion* - 1_788, FA1.5, Konstruktionsformat

Eine Polynomfunktion $f\colon [-3; 3] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ hat folgende Eigenschaften:

- Der Graph von f ist symmetrisch bezüglich der senkrechten Achse.
- Die Funktion f hat im Punkt $(2|1)$ ein lokales Minimum.
- Der Graph von f schneidet die senkrechte Achse im Punkt $(0|3)$.

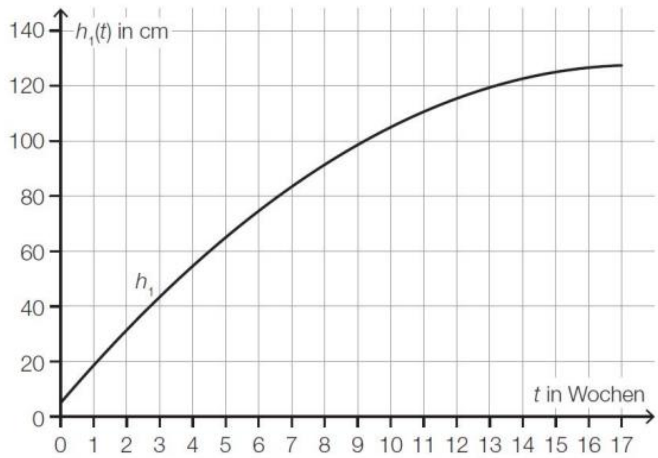
Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen einer solchen Funktion f im Intervall $[-3; 3]$ ein.



Wachstum einer Pflanze (d) - 2_004, FA1.5, Offenes Antwortformat

Das Wachstum einer Pflanze wurde über einen Zeitraum von 17 Wochen beobachtet und ihre Höhe gemessen. Die Höhe dieser Pflanze kann in Abhängigkeit von der Zeit t durch eine Funktion h mit $h(t) = \frac{1}{24} \cdot (-t^3 + 27 \cdot t^2 + 120)$ modelliert werden (t in Wochen seit Beobachtungsbeginn, $h(t)$ in cm).

d) Im selben Zeitraum wurde das Wachstum einer anderen Pflanze beobachtet und modelliert. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der entsprechenden Funktion h_1.



1) Interpretieren Sie das Krümmungsverhalten von h_1 im Intervall $[0; 17]$ im Hinblick auf das Wachstum dieser Pflanze.

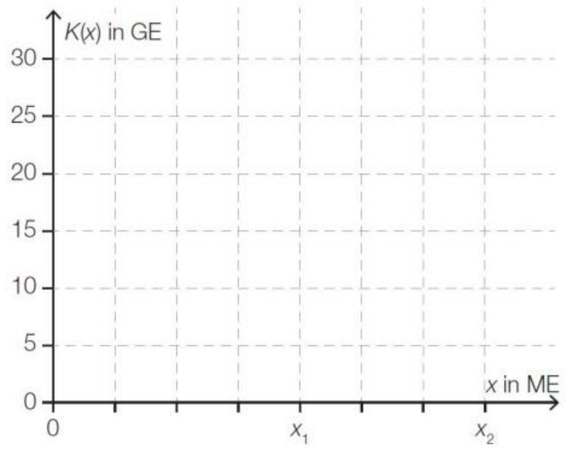
Kostenfunktion* - 1_764, FA1.5, Konstruktionsformat

Die Gesamtkosten, die bei der Herstellung eines Produkts anfallen, können mithilfe einer differenzierbaren Kostenfunktion K modelliert werden. Dabei ordnet K der Produktionsmenge x die Kosten $K(x)$ zu (x in Mengeneinheiten (ME), $K(x)$ in Geldeinheiten (GE)).

Für eine Kostenfunktion $K: [0; x_2] \to \mathbb{R}$ und x_1 mit $0 < x_1 < x_2$ gelten nachstehende Bedingungen:

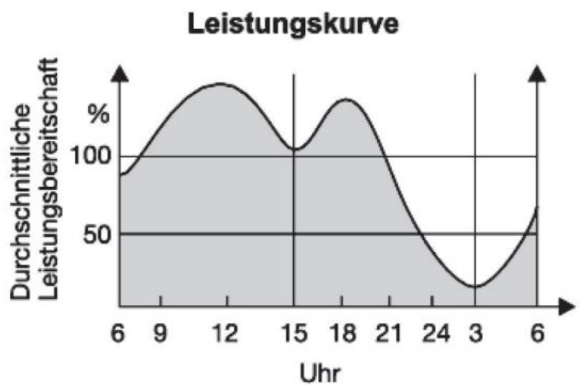
- K ist im Intervall $[0; x_2]$ streng monoton steigend.
- Die Fixkosten betragen 10 GE.
- Die Kostenfunktion hat im Intervall $[0; x_1)$ einen degressiven Verlauf, d. h., die Kosten steigen bei zunehmender Produktionsmenge immer schwächer.
- Bei der Produktionsmenge x_1 liegt die Kostenkehre. Die Kostenkehre von K ist diejenige Stelle, ab der die Kosten immer stärker steigen.

Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Verlauf des Graphen einer solchen Kostenfunktion K.



Leistungskurve (a) - 2_094, FA1.5, Offenes Antwortformat

Die *Leistungskurve*, auch *Arbeitskurve* genannt, ist die Darstellung der Arbeitsleistung einer Arbeitnehmerin/eines Arbeitnehmers in Abhängigkeit von der Tageszeit unter Berücksichtigung seiner Durchschnittsleistung (100 Prozent). Auf einer Webseite findet man folgende Grafik:



Quelle: http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Archiv/85252/leistungskurve-v9.html [30.05.2014].

a) 1) Lesen Sie ab, in welchen Zeitintervallen die Leistungsbereitschaft abnimmt.

Funktionen in mehreren Variablen

Video

Bsp. 28) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x,y) = \frac{3x^2+5}{2y}$. Gib eine sinnvolle **Definitionsmenge** an und berechne die gesuchten **Funktionswerte**.

Definitionsmenge:

$f(-1;3) =$	$f(2;4) =$	$f(-5;1) =$

Bsp. 29) Gegeben ist die Funktion $f(x,y,z) = \frac{x \cdot y^2}{z}$

a. Wie verändert sich f, wenn man x verdoppelt?
b. Wie verändert sich f, wenn man y verdoppelt?
c. Wie verändert sich f, wenn man z verdoppelt?
d. Wie verändert sich f, wenn man y vervierfacht?
e. Welche Art von Funktion ist $f(x)$ und wie kann man den Graphen beschreiben? Ist x zu $f(x)$ direkt oder indirekt proportional (oder keines von beidem)?
f. Welche Art von Funktion ist $f(y)$ und wie kann man den Graphen beschreiben? Ist y zu $f(y)$ direkt oder indirekt proportional (oder keines von beidem)?
g. Welche Art von Funktion ist $f(z)$ und wie kann man den Graphen beschreiben? Ist z zu $f(z)$ direkt oder indirekt proportional (oder keines von beidem)?

Bsp. 30) Gegeben ist die Funktion $T(a,b,c) = \frac{a^2 \cdot b^3}{c^2}$

a. Wie verändert sich T, wenn a verdoppelt wird?
b. Wie verändert sich T, wenn b verdoppelt und c verdreifacht wird?
c. Wie verändert sich T, wenn a halbiert, b verdoppelt und c durch 4 geteilt wird?
d. Wie verändert sich T, wenn a verdoppelt, b halbiert und c verdoppelt wird?

Bsp. 31) Gegeben ist die Funktion $T(a,b,c,d) = \frac{ab^4}{c^3 d}$

a. Wie verändert sich T, wenn a verdoppelt, b verdoppelt und c verdoppelt wird?
b. Wie verändert sich T, wenn b verdoppelt und d verdreifacht wird?
c. Wie verändert sich T, wenn a halbiert, b verdoppelt und d durch 4 geteilt wird?

Elektrischer Widerstand* - 1_533, FA1.2, 2 aus 5

Der elektrische Widerstand *R* eines zylinderförmigen Leiters mit dem Radius *r* und der Länge *l* kann mithilfe der Formel $R = \varrho \cdot \frac{l}{r^2 \cdot \pi}$ berechnet werden. Dabei ist die Größe ϱ vom Material und von der Temperatur des Leiters abhängig.

Kreuzen Sie die beiden Gleichungen an, die eine lineare Funktion bestimmen.

$R(l) = \varrho \cdot \frac{l}{r^2 \cdot \pi}$ mit ϱ, r konstant	☐
$l(\varrho) = \frac{R}{\varrho} \cdot r^2 \cdot \pi$ mit R, r konstant	☐
$R(\varrho) = \varrho \cdot \frac{l}{r^2 \cdot \pi}$ mit l, r konstant	☐
$R(r) = \varrho \cdot \frac{l}{r^2 \cdot \pi}$ mit ϱ, l konstant	☐
$l(r) = \frac{R}{\varrho} \cdot r^2 \cdot \pi$ mit R, ϱ konstant	☐

Funktionale Zusammenhänge* - 1_741, FA1.2, 2 aus 5

Gegeben ist die Gleichung $w = \frac{y \cdot z^2}{2 \cdot x}$ mit $w, x, y, z \in \mathbb{R}^+$.

Die gegebene Gleichung beschreibt funktionale Zusammenhänge zwischen zwei Variablen, wenn die beiden anderen Variablen als konstant angenommen werden.

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

Betrachtet man z in Abhängigkeit von x, so ist $z\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \mapsto z(x)$ eine Exponentialfunktion.	☐
Betrachtet man w in Abhängigkeit von z, so ist $w\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, z \mapsto w(z)$ eine quadratische Funktion.	☐
Betrachtet man w in Abhängigkeit von x, so ist $w\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \mapsto w(x)$ eine lineare Funktion.	☐
Betrachtet man y in Abhängigkeit von z, so ist $y\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, z \mapsto y(z)$ eine Polynomfunktion vom Grad 2.	☐
Betrachtet man x in Abhängigkeit von y, so ist $x\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, y \mapsto x(y)$ eine lineare Funktion.	☐

Funktionen zuordnen* - 1_692, FA1.2, 2 aus 5

Gegeben ist die Formel $F = \frac{a^2 \cdot b}{c^n} + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $c \neq 0$, $n \neq 0$.

Nimmt man an, dass eine der Größen a, b, c, d oder n variabel ist und die anderen Größen konstant sind, so kann F als Funktion in Abhängigkeit von der variablen Größe interpretiert werden.

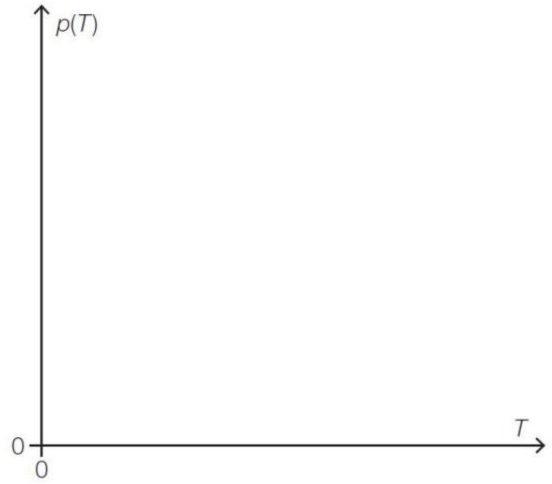
Welche der unten angegebenen Zuordnungen beschreiben (mit geeignetem Definitions- und Wertebereich) eine lineare Funktion?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Zuordnungen an!

$a \mapsto \frac{a^2 \cdot b}{c^n} + d$	☐
$b \mapsto \frac{a^2 \cdot b}{c^n} + d$	☐
$c \mapsto \frac{a^2 \cdot b}{c^n} + d$	☐
$d \mapsto \frac{a^2 \cdot b}{c^n} + d$	☐
$n \mapsto \frac{a^2 \cdot b}{c^n} + d$	☐

Ideales Gas* - 1_836, FA1.2, Konstruktionsformat

Die Gleichung $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ beschreibt modellhaft den Zusammenhang zwischen dem Druck p, dem Volumen V, der Stoffmenge n und der absoluten Temperatur T eines idealen Gases, wobei R eine Konstante ist ($V, n, R \in \mathbb{R}^+$ und $p, T \in \mathbb{R}_0^+$).

Die Funktion p modelliert in Abhängigkeit von der Temperatur T den Druck $p(T)$, wenn die anderen in der Gleichung vorkommenden Größen konstant bleiben.
Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen einer solchen Funktion p.



Stefan-Boltzmann-Gesetz* - 1_596, FA1.2, Lückentext

Die Leuchtkraft L eines Sterns wird durch folgende Formel beschrieben:

$L = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot T^4 \cdot \sigma$

Dabei ist R der Sternradius und T die Oberflächentemperatur des Sterns; σ ist eine Konstante (die sogenannte Stefan-Boltzmann-Konstante).
Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Für verschiedene Sterne mit gleichem, bekanntem Sternradius R ist die Leuchtkraft L eine Funktion _____①_____; es handelt sich dabei um eine _____②_____.

①	
des Sternradius R	☐
der Oberflächentemperatur T	☐
der Konstanten σ	☐

②	
lineare Funktion	☐
Potenzfunktion	☐
Exponentialfunktion	☐

Quadratische Pyramide* - 1_620, FA1.8, 1 aus 6

Die Oberfläche einer regelmäßigen quadratischen Pyramide kann als Funktion O in Abhängigkeit von der Länge der Grundkante a und der Höhe der Seitenfläche h_1 aufgefasst werden.
Es gilt: $O(a, h_1) = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_1$, wobei $a \in \mathbb{R}^+$ und $h_1 > \frac{a}{2}$.
Gegeben sind sechs Aussagen zur Oberfläche von regelmäßigen quadratischen Pyramiden.
Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an!

Ist h_1 konstant, dann ist die Oberfläche direkt proportional zu a.	☐
Ist a konstant, dann ist die Oberfläche direkt proportional zu h_1.	☐
Für $a = 1$ cm ist die Oberfläche sicher größer als 2 cm².	☐
Für $a = 1$ cm ist die Oberfläche sicher kleiner als 10 cm².	☐
Werden sowohl a als auch h_1 verdoppelt, so wird die Oberfläche verdoppelt.	☐
Ist $h_1 = a^2$, dann kann die Oberfläche durch eine Exponentialfunktion in Abhängigkeit von a beschrieben werden.	☐

Schwingung einer Saite* - 1_717, FA1.8, Offenes Antwortformat

Die Frequenz f der Grundschwingung einer Saite eines Musikinstruments kann mithilfe der nachstehenden Formel berechnet werden.

$$f = \frac{1}{2 \cdot l} \cdot \sqrt{\frac{F}{\varrho \cdot A}}$$

l … Länge der Saite
A … Querschnittsfläche der Saite
ϱ … Dichte des Materials der Saite
F … Kraft, mit der die Saite gespannt ist

Geben Sie an, wie die Länge l einer Saite zu ändern ist, wenn die Saite mit einer doppelt so hohen Frequenz schwingen soll und die anderen Größen (F, ϱ, A) dabei konstant gehalten werden.

Volumen eines Drehzylinders* - 1_645, FA1.8, Halboffenes Antwortformat

Das Volumen eines Drehzylinders kann als Funktion V der beiden Größen h und r aufgefasst werden. Dabei ist h die Höhe des Zylinders und r der Radius der Grundfläche.
Verdoppelt man den Radius r und die Höhe h eines Zylinders, so erhält man einen Zylinder, dessen Volumen x-mal so groß wie jenes des ursprünglichen Zylinders ist.
Geben Sie x an!

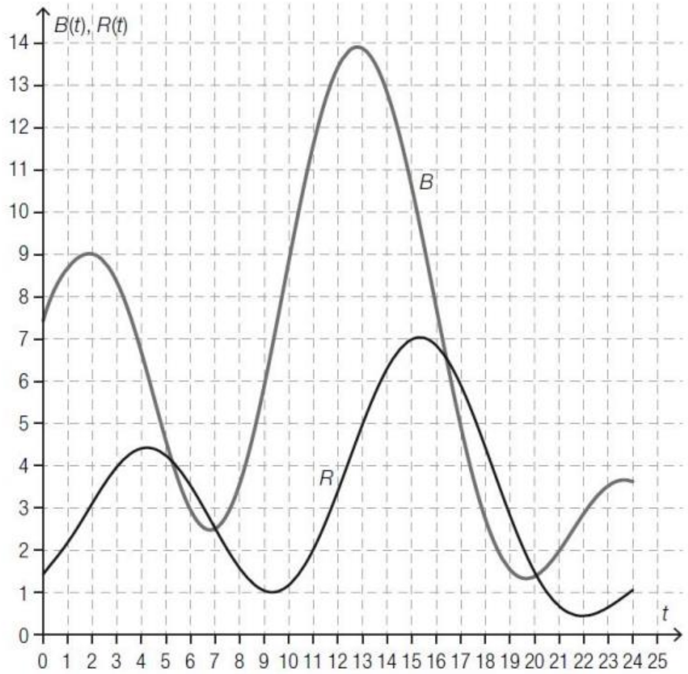
$x =$ ______________________________

Schnittpunkte von Funktionen

Funktionen gleich setzen, z.B. $f(x) = g(x)$

Räuber-Beute-Modell* - 1_557, FA1.6, Offenes Antwortformat

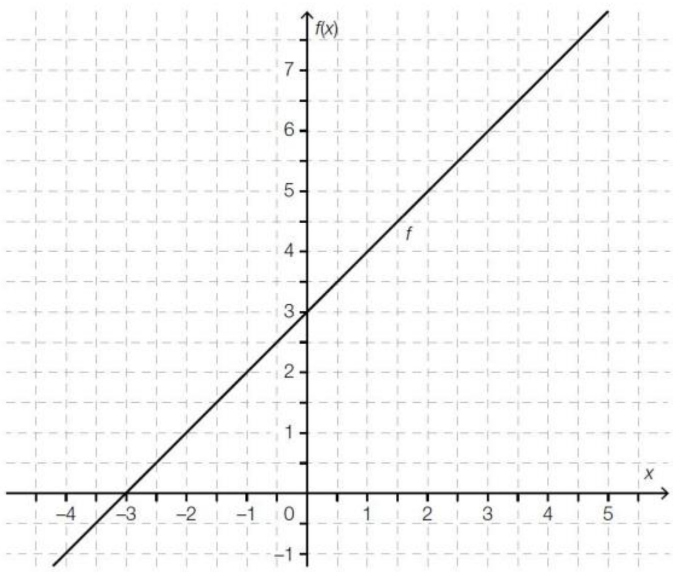
Das Räuber-Beute-Modell zeigt vereinfacht Populationsschwankungen einer Räuberpopulation (z. B. der Anzahl von Kanadischen Luchsen) und einer Beutepopulation (z. B. der Anzahl von Schneeschuhhasen). Die in der unten stehenden Grafik abgebildeten Funktionen R und B beschreiben modellhaft die Anzahl der Räuber $R(t)$ bzw. die Anzahl der Beutetiere $B(t)$ für einen beobachteten Zeitraum von 24 Jahren ($B(t)$, $R(t)$ in 10 000 Individuen, t in Jahren).



Geben Sie alle Zeitintervalle im dargestellten Beobachtungszeitraum an, in denen sowohl die Räuberpopulation als auch die Beutepopulation abnimmt!

Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen* - 1_391, FA1.6, Offenes Antwortformat

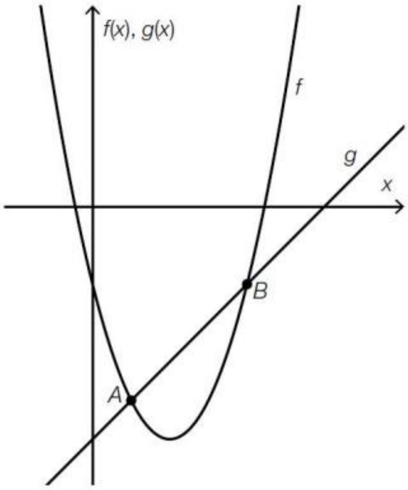
Gegeben sind der Graph einer Funktion f und die Funktion g mit der Gleichung $g(x) = -x + 5$.



Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Graphen der Funktionen f und g!

Schnittpunkte* - 1_597, FA1.6, Offenes Antwortformat

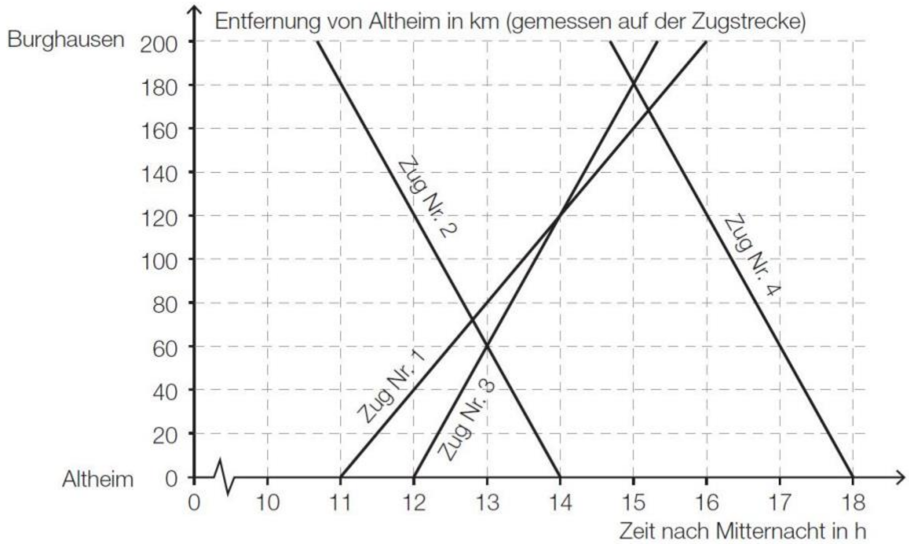
In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2 - 4 \cdot x - 2$ und der Graph der Funktion g mit $g(x) = x - 6$ dargestellt sowie deren Schnittpunkte A und B gekennzeichnet.



Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b der quadratischen Gleichung $x^2 + a \cdot x + b = 0$ so, dass die beiden Lösungen dieser Gleichung die x-Koordinaten der Schnittpunkte A und B sind!

Eisenbahn (a) - 2_069, FA1.6, Offenes Antwortformat

In der nachstehenden Abbildung ist ein sogenannter Bildfahrplan für Züge zwischen Altheim und Burghausen dargestellt. Die Züge fahren dabei – vereinfacht betrachtet – mit konstanter Geschwindigkeit.



a) Zug Nr. 3 fährt um 12:00 Uhr in Altheim ab.
Zug Nr. 4 fährt um 14:40 Uhr in Burghausen ab.
Auf der Fahrt zu ihren Zielbahnhöfen begegnen die beiden Züge einander.

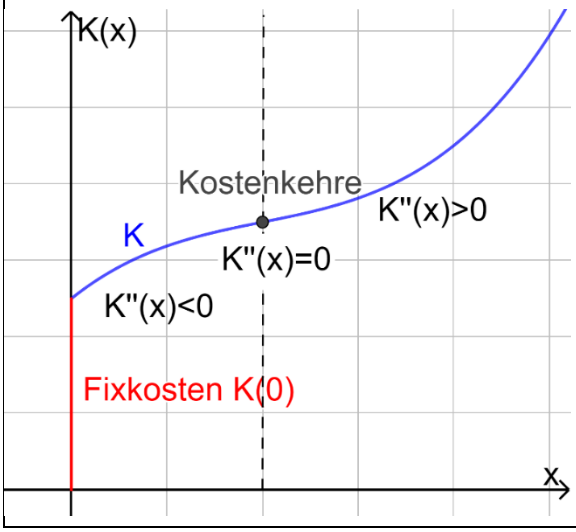
1) Lesen Sie aus dem obigen Bildfahrplan ab, wann und wie weit von Burghausen entfernt die beiden Züge einander begegnen.

Kurzzusammenfassung Kosten- und Preisrechnung

- **Kostenfunktion** $K(x)$ … ordnet jeder Stückzahl die damit verbundenen Kosten zu!
- **Erlösfunktion** $E(x)$ … ordnet jeder Stückzahl den damit verbundenen Erlös zu!
- **Gewinnfunktion** $G(x) = E(x) - K(x)$ … ordnet jeder Stückzahl den damit verbundenen Gewinn zu!

Kostenfunktion

In den meisten Fällen (vor allem im **Alltag**) ist die Kostenfunktion eine Polynomfunktion dritten Grades. Wenn folgende Eigenschaften gelten, spricht man von einer **ertragsgesetzlichen Kostenfunktion**:



Typischer Verlauf einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion

- „S-förmig“
- Streng monoton steigend

Erklärung: Bei einer Produktion von 0 Stück fallen Fixkosten an (Kosten für Maschinen, Geräte, Arbeiter, etc.).

Werden Stücke produziert, so steigen die Kosten an.
Zu Beginn gibt es einen bestimmten Anstieg, dann sinken die Kosten, da es zu Vorteilen aufgrund der Massen-/Mengenproduktion kommt (bis zur Kostenkehre). Ab der Kostenkehre kommt es zu einer Überlastung (z.B. Firma, hohe Überstunden, zusätzliche Geräte, …). Die Gesamtkosten steigen stark an.

Preisfunktion p(x)

Video

Eine **lineare Preisfunktion** hat zwei wichtige Eigenschaften:

- **Höchstpreis p_h**: Jener Preis, bei dem kein Stück mehr verkauft werden kann, d.h.

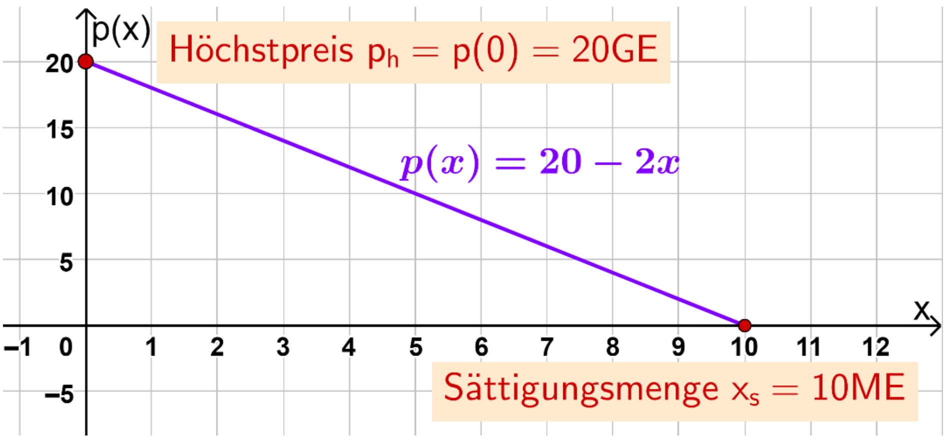
$$p_h = p(0)$$

Funktionswert der Preisfunktion bei $x = 0$

- **Sättigungsmenge x_s**: Jene Menge, bei dem der Markt gesättigt ist und damit nicht mehr verkauft werden kann, d.h.

$$p(x_s) = 0$$

Nullstelle der Preisfunktion



$$p(x) = 20 - 2x$$

Berechnung Höchstpreis:

$$p(0) = 20 - 2 \cdot 0 = 20\ GE$$

Berechnung Sättigungsmenge:

$$p(x) = 0 \iff 20 - 2x = 0 \mid -20$$

$$-2x = -20 \mid :(-2)$$

$$x = 10\ ME$$

Erlösfunktion $E(x)$:

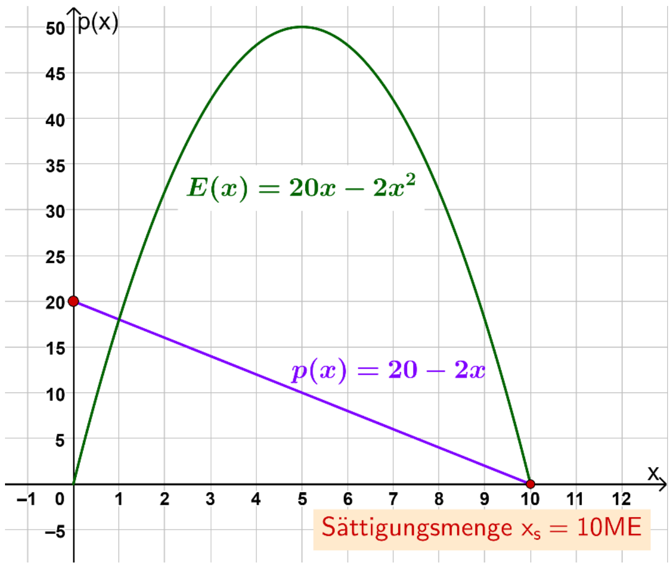
Die Erlösfunktion $E(x)$ ordnet jeder Stückzahl x den damit verbundenen Erlös zu. Die Erlösfunktion wird mit folgender Formel berechnet:

$$E(x) = p(x) \cdot x$$

$$Erlös = Preis\ pro\ Stück \cdot Anzahl\ der\ Stückzahl$$

- Ist die **Preisfunktion linear**, so ist die **Erlösfunktion** eine **Parabel** mit **zwei Nullstellen** (Eine Nullstelle im Ursprung, die andere bei der Sättigungsmenge, da kein Erlös mehr möglich ist).

Beispiel: $p(x) = 20 - 2x \ \rightarrow E(x) = p(x) \cdot x = (20 - 2x) \cdot x = 20x - 2x^2$



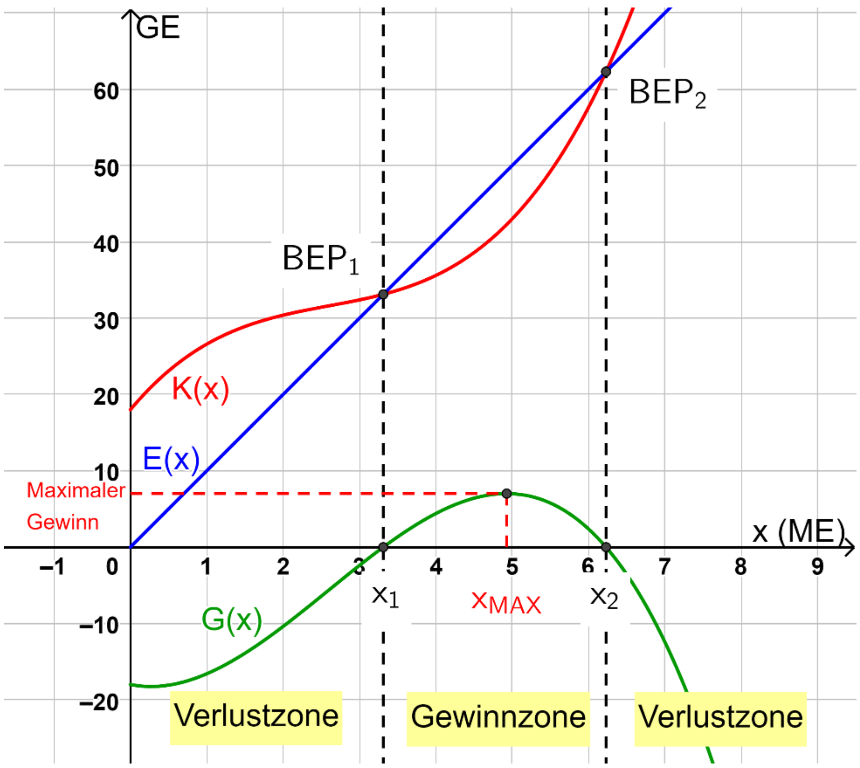
Gewinnfunktion

Die **Gewinnfunktion G(x)** ergibt sich aus dem Erlös und den Kosten:

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

$G(x)$ gibt den **Gewinn** bzw. **Verlust** bei x produzierten & verkauften Stück an!

- $G(x) > 0 \rightarrow$ Gewinn (Erlös > Kosten)
- $G(x) = 0 \ \rightarrow$ weder Gewinn noch Verlust (Erlös = Kosten)
- $G(x) < 0 \rightarrow$ Verlust (Kosten > Erlös)



Begriffe:

- **Verlustzone**: Bereich/e, in denen Verlust erzielt wird: $G(x) < 0$

- **Gewinnzone**: jenes Intervall bzw. Bereich, in dem Gewinn erzielt wird: $G(x) > 0$

- Der **break-even-point 1** ist jener Punkt, bei dem der Gewinn das erste Mal nicht mehr negativ ist (=1. Nullstelle der Gewinnfunktion). Generell gilt bei einem break-even-point, dass weder Gewinn noch Verlust erwirtschaftet wird (Erlös = Kosten). Bei dieser Veranschaulichung gibt es zwei Punkte: $BEP_1\ und\ BEP_2$.

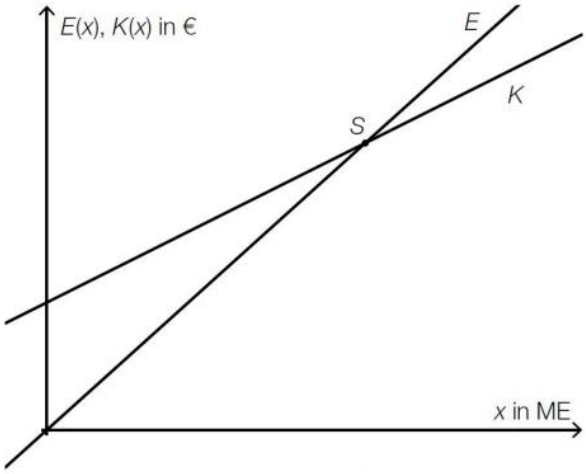
Berechnung der break-even-points: $G(x) = 0$ oder $E(x) = K(x)$

- Die Gewinngrenzen x_1 und x_2 sind jene Stellen, an denen der Gewinn 0 ist (Stellen der break-even-points). x_1 nennt man die untere bzw. x_2 die obere Gewinngrenze. Die beiden Gewinngrenzen sind die Grenzen für die Gewinnzone. Es gilt für die Gewinnzone: $(x_1; x_2)$

Berechnung der Gewinngrenzen: $G(x) = 0$

Schnittpunkt* - 1_535, FA1.6, Offenes Antwortformat

Die Funktion E gibt den Erlös $E(x)$ und die Funktion K die Kosten $K(x)$ jeweils in Euro bezogen auf die Produktionsmenge x an. Die Produktionsmenge x wird in Mengeneinheiten (ME) angegeben. Im folgenden Koordinatensystem sind die Graphen beider Funktionen dargestellt:



Interpretieren Sie die beiden Koordinaten des Schnittpunkts S der beiden Funktionsgraphen im gegebenen Zusammenhang!

Kosten und Erlös* - 1_669, FA1.6, Offenes Antwortformat

Für ein Produkt sind die Kostenfunktion K mit $K(x) = 2 \cdot x + 4\,000$ und die Erlösfunktion E mit $E(x) = 10 \cdot x$ bekannt, wobei x die Anzahl der produzierten Mengeneinheiten ist und alle produzierten Mengeneinheiten verkauft werden. Kosten und Erlös werden jeweils in Euro angegeben.
Der Schnittpunkt der beiden Funktionsgraphen ist $S = (500|5\,000)$.
Interpretieren Sie die Koordinaten 500 und 5 000 des Schnittpunkts S im gegebenen Kontext!

Gewinnfunktion (a) - 2_009, FA1.6, Offenes Antwortformat

In einem bestimmten Unternehmen werden die Entwicklungen der Kosten K und des Erlöses E in Abhängigkeit von der produzierten Menge x eines bestimmten Produkts beobachtet.
Die Erlösfunktion E mit $E(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 1{,}5 \cdot x$ und die Kostenfunktion K mit $K(x) = 0{,}3 \cdot x + 5{,}4$ beschreiben modellhaft diese Entwicklungen (x in Mengeneinheiten ME und $E(x)$, $K(x)$ in Geldeinheiten GE). Alle produzierten Mengeneinheiten werden vom Unternehmen verkauft.

a) 1) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Funktionsgraphen von E und K.

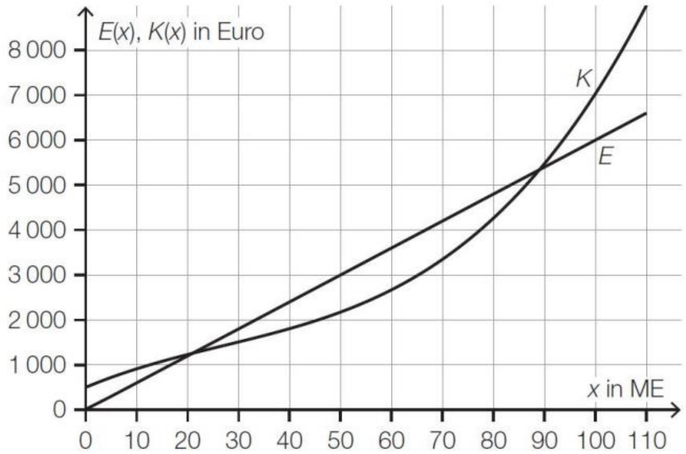
2) Interpretieren Sie die Koordinaten dieser Schnittpunkte im Hinblick auf den Gewinn des Unternehmens.

Kostenfunktion* (c) - 2_052, AN3.3 FA1.6, Offenes Antwortformat

Ein Hersteller interessiert sich für die monatlich anfallenden Kosten bei der Produktion eines bestimmten Produkts. Die Produktionskosten für dieses Produkt lassen sich in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x (in Mengeneinheiten, ME) durch eine Polynomfunktion dritten Grades K mit $K(x) = 8 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 - 7{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 0{,}2405 \cdot x + 42$ modellieren ($K(x)$ in Geldeinheiten, GE).

Produktionskosten (a) - 2_016, FA1.6 FA1.7, Offenes Antwortformat

Die unten stehende Abbildung zeigt die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E eines bestimmten Betriebes. Mit x wird die Anzahl der produzierten und verkauften Mengeneinheiten (ME) pro Tag eines bestimmten Produkts bezeichnet. Pro Tag können höchstens 110 ME produziert werden.



a) 1) Ermitteln Sie anhand der obigen Abbildung den Gewinnbereich.

2) Erklären Sie anhand der Funktionsgraphen, warum sich durch eine Senkung des Verkaufspreises der Gewinnbereich verkleinert.

Kostenfunktion* (c) - 2_052, AN3.3 FA1.6, Offenes Antwortformat

Ein Hersteller interessiert sich für die monatlich anfallenden Kosten bei der Produktion eines bestimmten Produkts. Die Produktionskosten für dieses Produkt lassen sich in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x (in Mengeneinheiten, ME) durch eine Polynomfunktion dritten Grades K mit $K(x) = 8 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 - 7{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 0{,}2405 \cdot x + 42$ modellieren ($K(x)$ in Geldeinheiten, GE).

c) Für den Verkaufspreis p kann der Erlös in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x durch eine lineare Funktion E mit $E(x) = p \cdot x$ beschrieben werden ($E(x)$ in GE, x in ME, p in GE/ME). Dabei wird vorausgesetzt, dass gleich viele Mengeneinheiten verkauft wie produziert werden.

1) Bestimmen Sie p so, dass der maximale Gewinn bei einem Verkauf von 600 ME erzielt wird.

Die maximal mögliche Produktionsmenge beträgt 650 ME.

2) Bestimmen Sie den Gewinnbereich (also denjenigen Produktionsbereich, in dem der Hersteller Gewinn erzielt).

Kosten, Erlös und Gewinn* - 1_486, FA1.7, Konstruktionsformat

Die Funktion E beschreibt den Erlös (in €) beim Absatz von x Mengeneinheiten eines Produkts. Die Funktion G beschreibt den dabei erzielten Gewinn in €. Dieser ist definiert als Differenz „Erlös – Kosten".
Ergänzen Sie die nachstehende Abbildung durch den Graphen der zugehörigen Kostenfunktion K!
Nehmen Sie dabei K als linear an! (Die Lösung der Aufgabe beruht auf der Annahme, dass alle produzierten Mengeneinheiten des Produkts verkauft werden.)