Grundkompetenz AN4 Summation und Integral

Beispiele aus Maturaterminen 2023-24 (AHS, BHS, Kompensationsprüfungen AHS)

TYP-1:

Grenzkosten und Gesamtkosten

Die Grenzkosten für die Produktion eines bestimmten Produkts werden durch die Funktion K' modelliert. Es gilt:

$$K'(x) = \frac{1}{100} \cdot \left(x^3 - \frac{x^2}{2} + 3 \cdot x + 4\right)$$

x ... Produktionsmenge in Stück
$K'(x)$ ... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in Euro pro Stück

Die Gesamtkosten werden in Euro angegeben.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie denjenigen Betrag, um den die Gesamtkosten steigen, wenn man von diesem Produkt 110 Stück statt 100 Stück produziert.

Wert eines bestimmten Integrals

Die Funktion g ist eine Stammfunktion der Polynomfunktion f. Von der Funktion g sind einige Wertepaare gegeben:

x	$g(x)$
–2	3
–1	0
0	–1
1	0
2	3
3	8
4	15

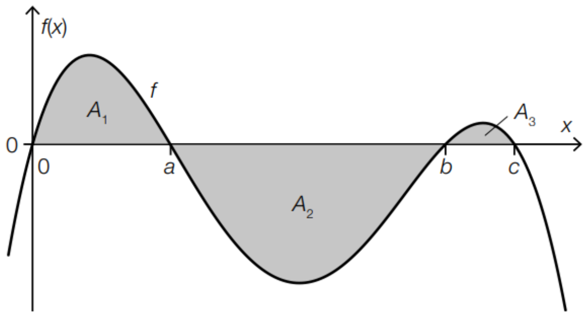
Aufgabenstellung:

Geben Sie den Wert des nachstehenden Integrals an.

$\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x =$ ______________________________

Integral und Flächeninhalt

Die unten stehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f, der die x-Achse an den Stellen 0, a, b und c schneidet.
Der Graph von f schließt mit der x-Achse drei Bereiche mit den Flächeninhalten $A_1 = 17$, $A_2 = 50$ sowie $A_3 = 2$ ein.



Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Ausdrücken jeweils den zugehörigen Wert aus A bis F zu.

$\int_0^c f(x)\,dx$	
$\int_0^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$	
$\int_0^a f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$	
$\int_a^c f(x)\,dx + 100$	

A	–31
B	69
C	–33
D	52
E	67
F	152

Produktionskosten

Die monatlichen Fixkosten eines Betriebs für die Produktion von Erfrischungsgetränken betragen € 200.000.
Die Funktion K beschreibt modellhaft die monatlichen Gesamtkosten für diese Produktion (in Euro) in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x.
Die Grenzkosten für diese Produktion werden durch die Funktion K' beschrieben.

$K'(x) = 0{,}003 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 3\,500$

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten
$K'(x)$ ... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in Euro pro Mengeneinheit

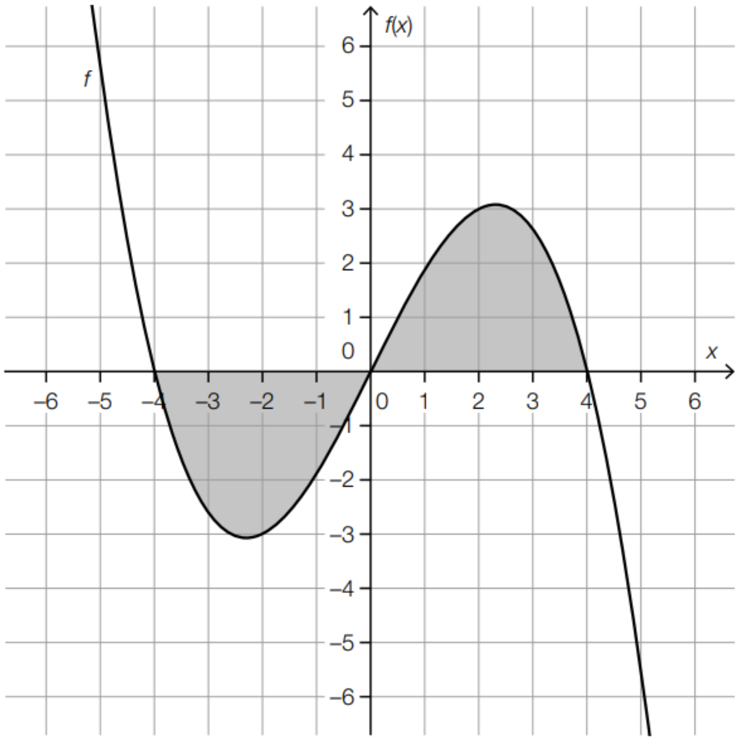
Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Funktionsgleichung von K auf.

$K(x) =$ ______________________________

Flächeninhalt

Nachstehend ist der Graph der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit ganzzahligen Nullstellen dargestellt.



Die Flächeninhalte der beiden grau markierten Bereiche sind gleich groß.

Aufgabenstellung:

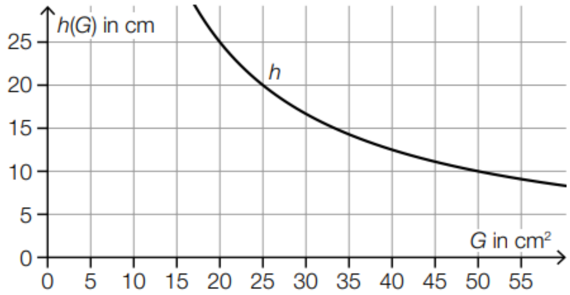
Kreuzen Sie die beiden Ausdrücke an, mit denen der Flächeninhalt des gesamten grau markierten Bereichs berechnet werden kann. *[2 aus 5]*

$2 \cdot \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-4}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$2 \cdot \int_{-4}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_{-4}^0 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$\left\vert \int_{-4}^4 f(x)\,\mathrm{d}x \right\vert$	☐

Behälter

Es werden zylindrische Behälter, die alle das gleiche Volumen V_0 haben, produziert.

Die Funktion h beschreibt die Höhe eines solchen Behälters in Abhängigkeit vom Inhalt G seiner Grundfläche (G in cm², $h(G)$ in cm). Der Graph der Funktion h ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Aufgabenstellung:

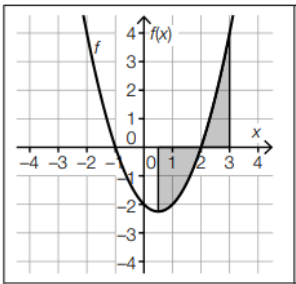
Berechnen Sie V_0.

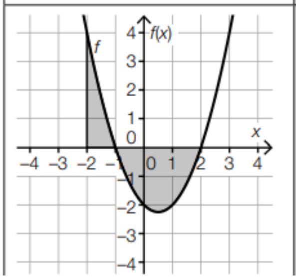
Bestimmte Integrale

Die vier unten stehenden Abbildungen zeigen jeweils den Graphen der quadratischen Funktion f. Der Graph von f schneidet die x-Achse an den Stellen $x = -1$ und $x = 2$. Die lokale Minimumstelle von f liegt bei $x = 0{,}5$.

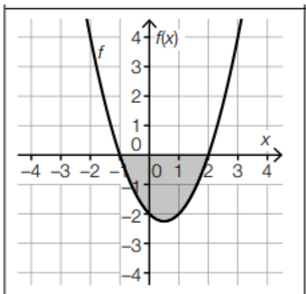
Aufgabenstellung:

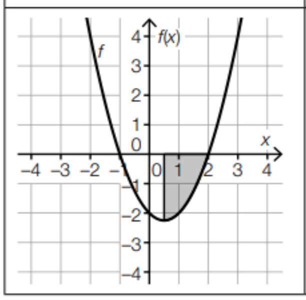
Ordnen Sie den grau markierten Flächen in den vier Abbildungen jeweils den entsprechenden Ausdruck zur Berechnung ihres Flächeninhalts aus A bis F zu.





A	$-\int_{0,5}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$
B	$-\int_{0,5}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$
C	$\int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$
D	$\int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$
E	$\int_{-2}^{0,5} f(x)\,\mathrm{d}x$
F	$-2 \cdot \int_{0,5}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$





Pilzsporen

Pilze vermehren sich mithilfe von Sporen.

Bei einem Experiment bedecken zum Zeitpunkt $t = 0$ die Sporen eines bestimmten Pilzes eine Fläche mit einem Inhalt von 5 µm².

Die Funktion f modelliert die Geschwindigkeit, mit der sich die bedeckte Fläche vergrößert, in Abhängigkeit von der Zeit t.

t ... Zeit in h
$f(t)$ ... Geschwindigkeit, mit der sich die bedeckte Fläche vergrößert, zum Zeitpunkt t in µm²/h

Aufgabenstellung:

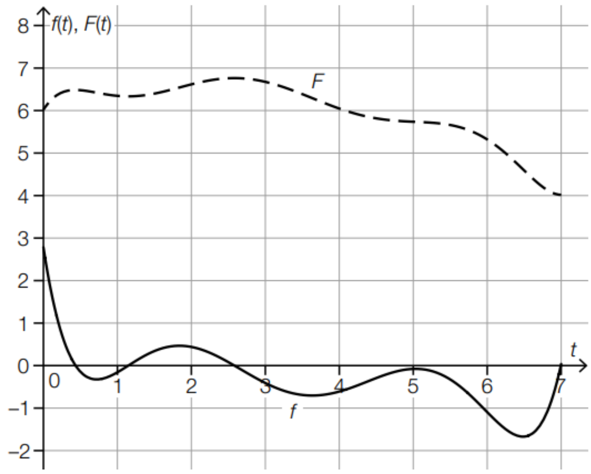
Interpretieren Sie $5 + \int_0^3 f(t)\,dt$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Gartenteich

Die Funktion f beschreibt modellhaft die momentane Änderungsrate des Wasserstands eines bestimmten Gartenteichs in Abhängigkeit von der Zeit t.

t ... Zeit in Tagen
$f(t)$ ... momentane Änderungsrate des Wasserstands zum Zeitpunkt t in mm/Tag

Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f.



Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Das Integral $\int_0^7 f(t)\,dt$ hat den Wert ___①___ und beschreibt die ___②___ des Wasserstands im Zeitintervall [0; 7].

①	
2	☐
–2	☐
0	☐

②	
mittlere Änderungsrate	☐
relative Änderung	☐
absolute Änderung	☐

BHS – Beispiele:

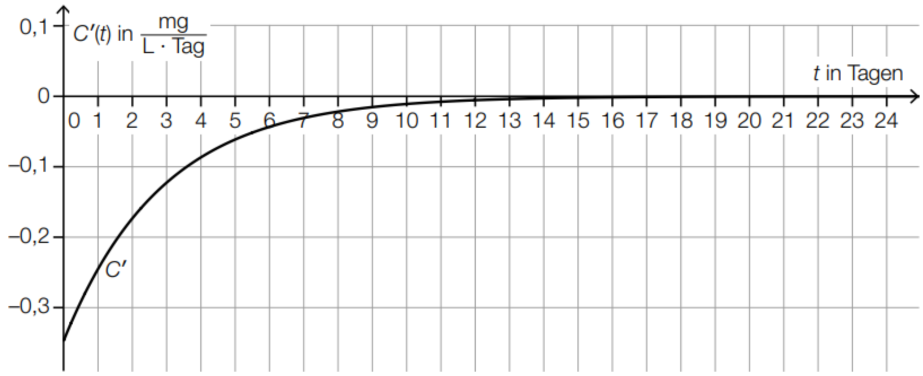
https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=AM

Pflanzenschutzmittel:

c) Die zeitliche Entwicklung der Konzentration eines bestimmten Pflanzenschutzmittels im Boden kann näherungsweise durch die Funktion C beschrieben werden.

t ... Zeit nach dem Anwenden des Pflanzenschutzmittels in Tagen
$C(t)$ ... Konzentration des Pflanzenschutzmittels im Boden zur Zeit t in mg/L
$C'(t)$ ... momentane Änderungsrate der Konzentration des Pflanzenschutzmittels im Boden zur Zeit t in $\frac{\text{mg}}{\text{L} \cdot \text{Tag}}$

Die nachstehende Abbildung zeigt die momentane Änderungsrate der Konzentration dieses Pflanzenschutzmittels im Boden.



1) Veranschaulichen Sie $\int_0^2 C'(t)\,dt$ in der obigen Abbildung. *[0/1 P.]*

Es gilt: $\int_0^2 C'(t)\,dt = -0{,}5$ mg/L

2) Interpretieren Sie das Ergebnis $-0{,}5$ mg/L im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Kompensation AHS

https://www.mathago.at/kompensationspruefung-loesungen/

Oktober 2023, Prüfung 1: Sportartikel

Sportartikel

a) Für einen bestimmten Sportartikel ist die Ableitungsfunktion K' der Kostenfunktion K gegeben.

$K'(x) = 3 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 20$

x ... Anzahl der produzierten ME
$K'(x)$ ... 1. Ableitung der Kostenfunktion K bei x ME in GE/ME

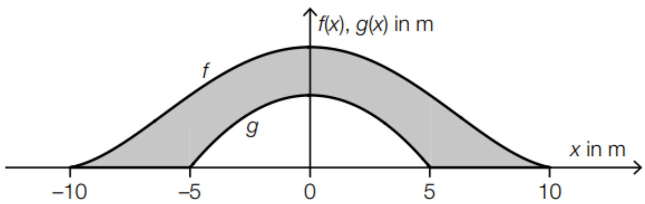
Die Fixkosten betragen 4 200 GE.

1) Stellen Sie eine Gleichung der Kostenfunktion K auf.

Juni 2022, Prüfung 6: Brücke

Brücke

In einem Park wird eine Brücke über einen Fluss gebaut. Diese Brücke ist in der unten stehenden Abbildung in der Ansicht von der Seite modellhaft dargestellt.
Die obere Begrenzungslinie kann im Intervall [–10; 10] durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden, die untere Begrenzungslinie kann im Intervall [–5; 5] durch den Graphen der Funktion g beschrieben werden.



b) 1) Stellen Sie mithilfe von f und g eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche auf.

$A =$ ______________________________