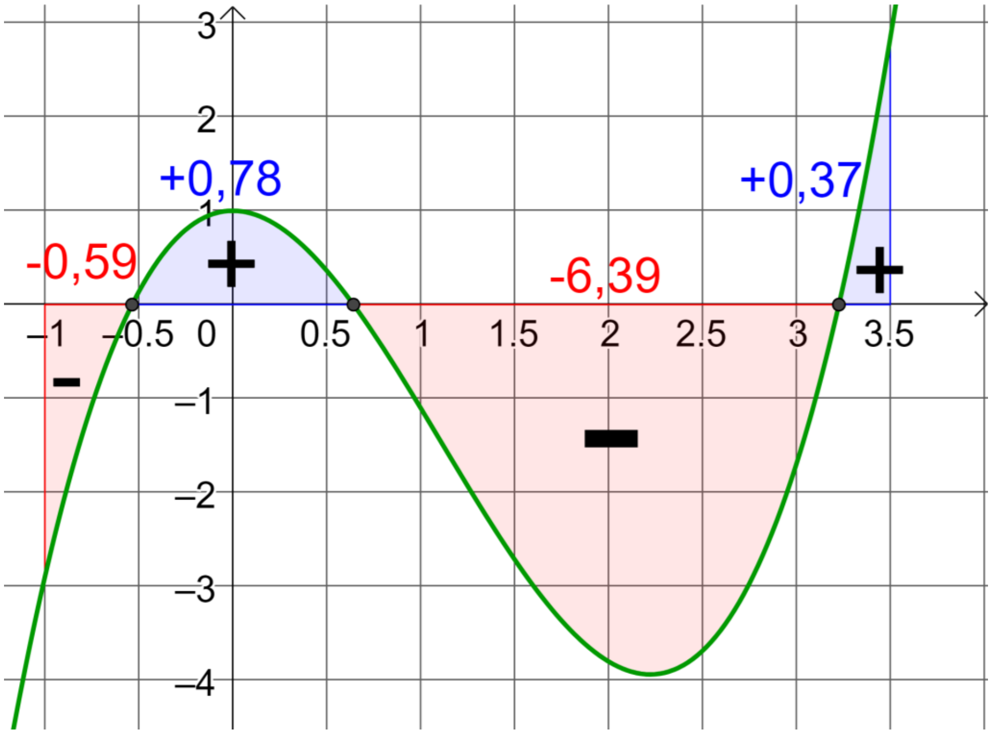
AN4 Summation und Integral

Maturaskript AHS (28 Seiten)

Grundkompetenzen:

- **AN4.1** den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können
- **AN4.2** einfache Regeln des Integrierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, $\int k \cdot f(x)\,dx$, $\int f(k \cdot x)dx$, bestimmte Integrale von Polynomfunktionen ermitteln können
- **AN4.3** das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können



Prof. πegischer

Zusätzlich:

Erklärvideos (gratis!) zur visuellen Veranschaulichung.

QR-Codes im SKRIPT!

Maturaaufgaben aus dem Matura-Aufgabenpool

Allgemeine Informationen zum Maturaskript

Im Maturaskript werden die zu erlernenden Inhalte (falls vorhanden) durch einen **Theorieblock** eingeführt. Im Anschluss sollen **Beispielaufgaben (**Aufgaben von **Prof. Tegischer** bzw. **Maturaaufgaben** aus dem Aufgabenpool**)** gelöst werden, um das Erlernte zu festigen.

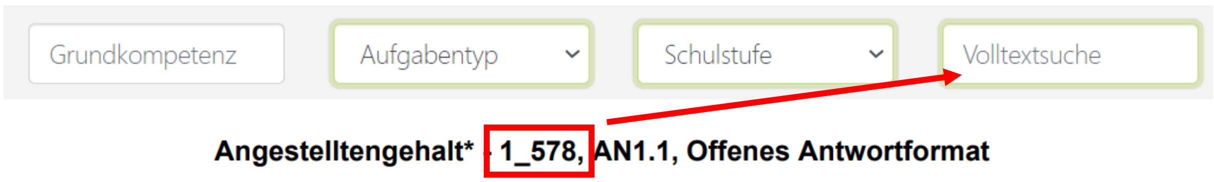
Information: *Bei manchen Grundkompetenzen gibt es ausschließlich Maturaaufgaben, da es von meiner Seite dazu noch keine Ausarbeitungen gibt.*

Zur visuellen Veranschaulichung und für weitere Informationen werden selbst erstellte **YouTube-Videos** angeboten. Im Skript sind die Videos mit einem QR-Code versehen, der direkt zum Video führt. In der PDF-Datei kommt man per Klick auf den Link auch zur Erklärung. (Info*: bei manchen Grundkompetenzen gibt es keine Videos von Prof. Tegischer*)

- Die **Musterlösungen** zu den von mir erstellten Aufgaben (Bsp.1, Bsp. 2, …) sind entweder im Downloadpaket dabei oder auf meiner Homepage unter folgendem Link abrufbar (Mitgliedschaft!): https://prof-tegischer.com/ahs-reifepruefung-mathematik/
- Die Musterlösungen der Maturaaufgaben findet ihr direkt auf der Homepage des Aufgabenpools:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=M

2) Gib im Feld „**Volltextsuche**" die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.



Quellennachweis:

- Alle **Theorieteile** wurden von mir geschrieben. **Aufgaben** mit der Kennzeichnung Bsp. 1, Bsp.2, usw. wurden von mir erstellt. **Aufgaben** mit Titel + Nummer (z.B. 1_578) sind Aufgaben aus dem Aufgabenpool. Vielen Dank an dieser Stelle an das **Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF)** für die Erlaubnis zur Verwendung der Maturabeispiele.
- Alle **Graphiken** wurden von mir mit den Programmen „**MatheGrafix PRO**" und „**GeoGebra**" erstellt. Die **QR-Codes** in den Skripten wurden mit „**QR-Code-Generator**" erstellt.

Lizenzbedingungen:

Ich freue mich, wenn LehrerInnen die Unterlagen im eigenen Unterricht einsetzen oder wenn SchülerInnen mit den Materialien lernen. Dennoch gibt es Regeln, an die sich alle Personen halten müssen, die mit Materialien von Prof. Tegischer arbeiten:

Allgemeine Regeln	**Weitere Regeln für Lehrpersonen**
▪ Sie dürfen die Materialien für eigene Zwecke zur Erarbeitung von Inhalten nutzen. ▪ Sie dürfen die Materialien herunterladen, ausdrucken und zur Nutzung im eigenen Bereich anwenden. Es ist nicht erlaubt, die Materialien zu vervielfältigen, um anderen Personen einen Zugang zu ermöglichen. ▪ Sie dürfen mein Materialen **NICHT** gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben. Graphiken dürfen nicht ohne Zustimmung herauskopiert werden. ▪ Die Materialien dürfen nicht verändert und als eigene ausgegeben werden. ▪ Bei einem **Missbrauch** erlischt das Nutzungsrecht an den Inhalten und es muss mit einer Schadenersatzforderung gerechnet werden.	**WICHTIGSTE REGEL:** LehrerInnen dürfen die Materialien in **Ihrem eigenen Unterricht** verwenden: ▪ Es ist erlaubt, Kopien zu erstellen und diese den SchülerInnen auszuteilen. ▪ LehrerInnen dürfen Unterlagen in eLearning-Kursen ihren eigenen Schülerinnen und Schülern bereitstellen sofern der Kurs mit einem Kennwort geschützt ist und nur die eigenen Schülerinnen und Schüler (keine weiteren Lehrkräfte) darauf Zugriff haben. ▪ Es ist **nicht erlaubt**, die Materialien mit Ihren KollegInnen zu teilen. Es ist nicht erlaubt, die Unterlagen an Orten zu speichern, an denen auch andere Lehrpersonen oder Personen Zugriff haben. ▪ LehrerInnen müssen den SchülerInnen mitteilen, dass sie die Materialien nicht gewerblich nutzen, über das Internet verbreiten oder an Dritte weitergeben dürfen.

Haben Sie Fragen, Wünsche oder Anregungen zu meinen Unterrichtsmaterialien, können Sie mich gerne auf **Instagram** (**prof. tegischer**) oder per **Mail** kontaktieren (info@prof-tegischer.com). Auf meiner Homepage prof-tegischer.com finden Sie weitere Informationen zu meinen Materialien.

AN4 – Bestimmtes Integral, Flächeninhalt

Video

1. Bestimmtes Integral

In diesem Kapitel lernt ihr, wie ihr den Flächeninhalt zwischen x-Achse und Funktionsgraph berechnen könnt.

a. Ober- und Untersummen

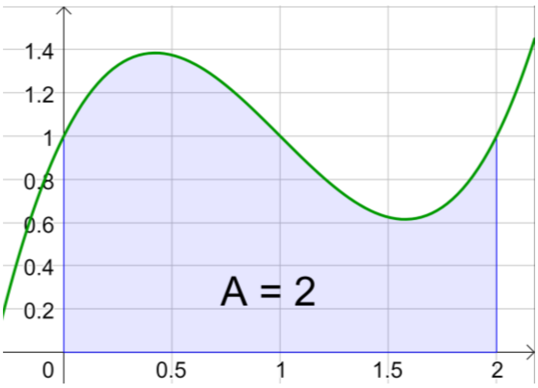
Mit Hilfe von Ober- und Untersummen wird die **Fläche unter** einer **Kurve** im Intervall $[a; b]$ annähernd berechnet. Dabei betrachtet man eine stetige Funktion, die keine negativen Funktionswerte besitzt. Das Intervall $[a; b]$ wird in n gleich breite Teile unterteilt. Die Rechtecksbreite beträgt stets $\frac{b-a}{n}$.

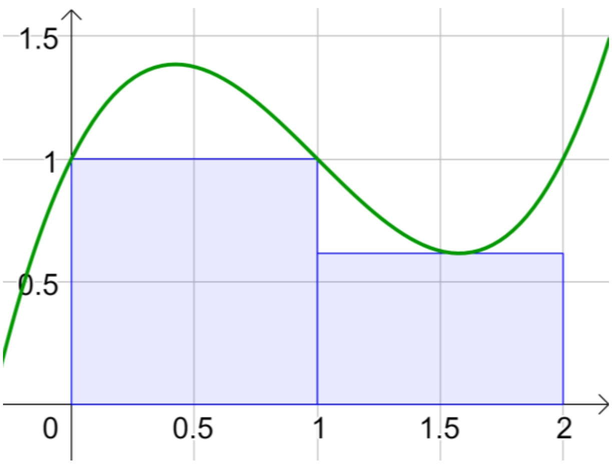
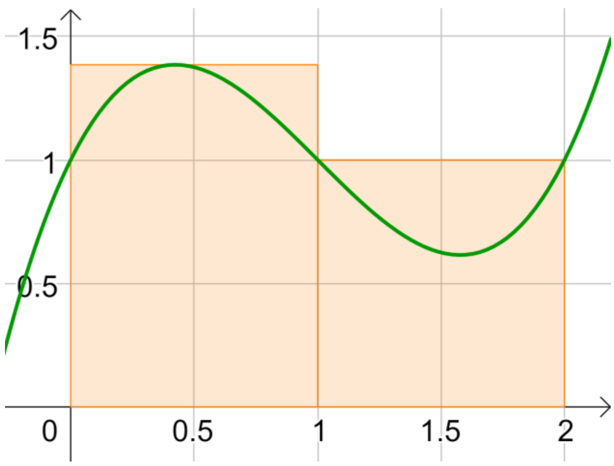
- Bei den **Untersummen** wird das Rechteck stets unter dem Funktionsgraph eingezeichnet (kleinster Funktionswert in jedem Teilbereich gibt die Höhe des Rechtecks an).
- Bei den **Obersummen** wird das Rechteck über der Kurve eingezeichnet (größter Funktionswert in jedem Teilbereich gibt die Höhe des Rechtecks an).

$$Untersummen \leq Tatsächliche\ Fläche \leq Obersummen$$

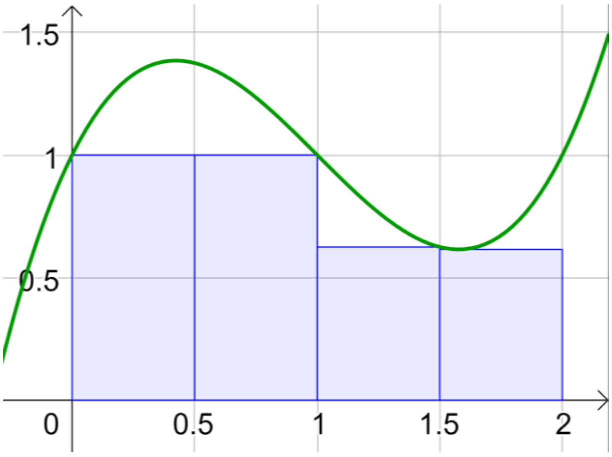
Je mehr Rechtecke eingezeichnet werden (= je größer n), desto genauer ist die Annäherung.

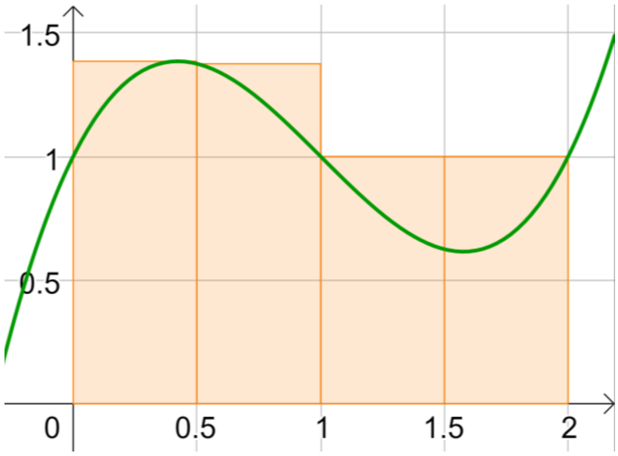
Beispiel: Nähere den Flächeninhalt der gegebenen Funktion im Intervall $[0; 2]$ mit Ober- und Untersummen an:



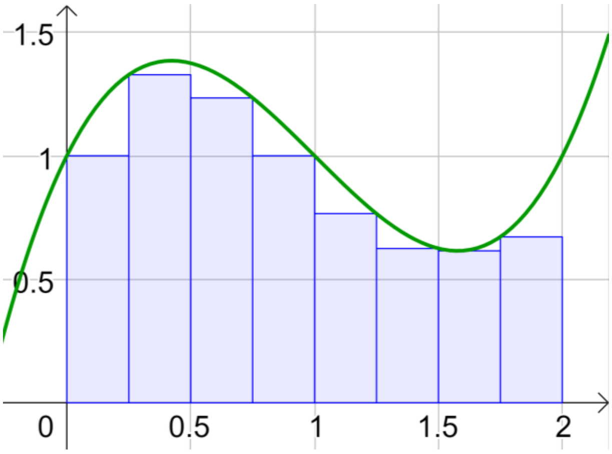
	Untersumme	Obersumme
Die Fläche eines Rechtecks wird mit **Rechtecksbreite** $\left(\frac{b-a}{n}\right)$ mal **Rechteckshöhe** (kleinster bzw. größter Funktionswert) berechnet.		
$n = 2$ Breite: $\frac{2}{2} = 1$	 Fläche = $1{,}61\ E^2$	 Fläche = $2{,}38\ E^2$

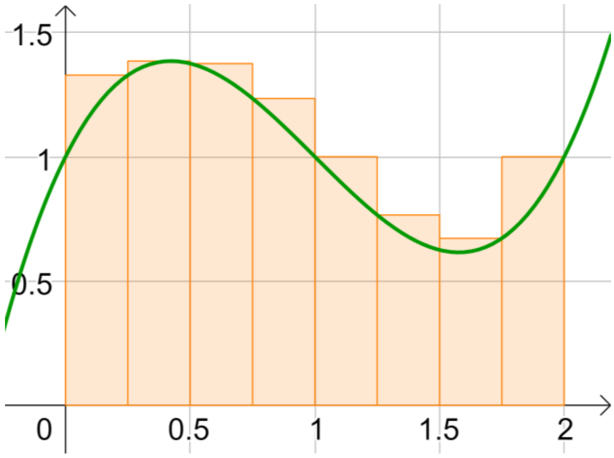
<table>
<tr>
<td>$n = 4$

Breite:
$\frac{2}{4} = 0{,}5$</td>
<td>

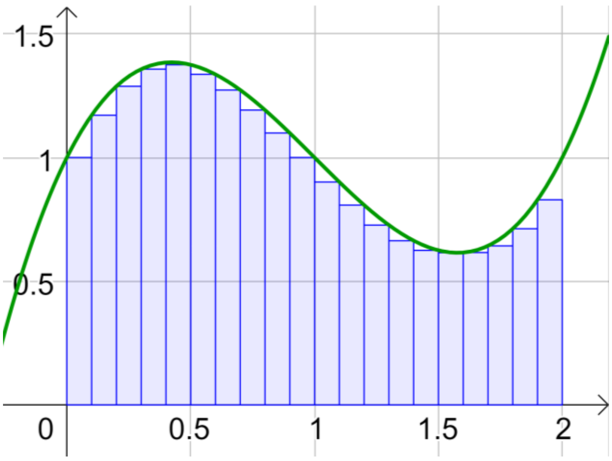
Fläche = $1{,}62\ \mathrm{E}^2$</td>
<td>

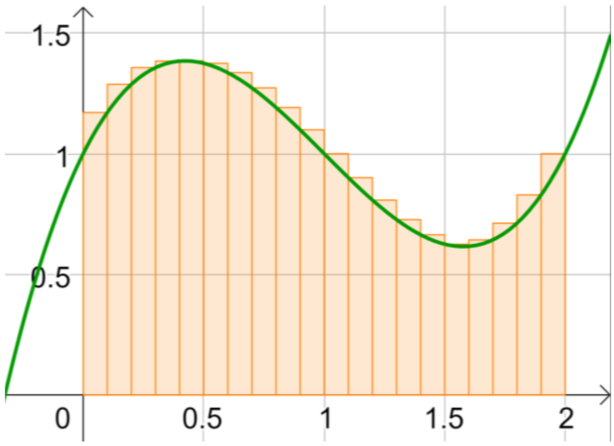
Fläche = $2{,}38\ \mathrm{E}^2$</td>
</tr>
<tr>
<td>$n = 8$

Breite:
$\frac{2}{8} = 0{,}25$</td>
<td>

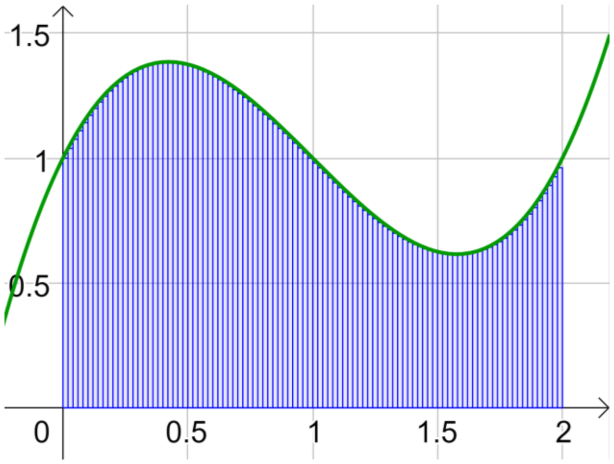
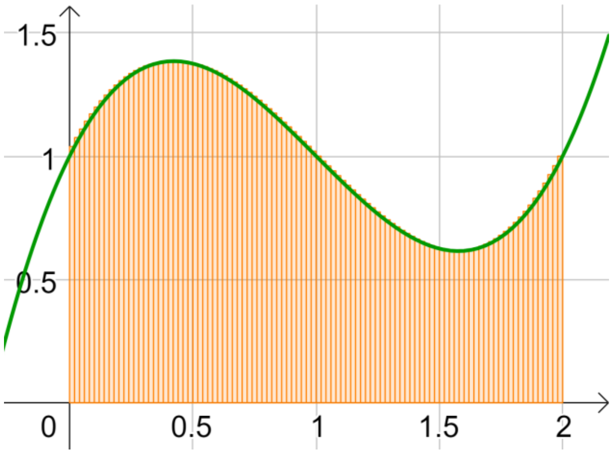
Fläche = $1{,}81\ \mathrm{E}^2$</td>
<td>

Fläche = $2{,}19\ \mathrm{E}^2$</td>
</tr>
<tr>
<td>$n = 20$

Breite:
$\frac{2}{20} = 0{,}1$</td>
<td>

Fläche = $1{,}92\ \mathrm{E}^2$</td>
<td>

Fläche = $2{,}08\ \mathrm{E}^2$</td>
</tr>
</table>

$n = 100$ Breite: $\frac{2}{100} = 0{,}02$	 Fläche = $1{,}98\ \mathrm{E}^2$	 Fläche = $2{,}02\ \mathrm{E}^2$

Formale Definition:

Ist f eine stetige Funktion mit positiven Funktionswerten im Intervall $[a; b]$ und wird die Funktion im Intervall $[a; b]$ in n gleich große Teilintervalle zerlegt, so definiert man:

- $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ... Breite jedes gleich großen Teilintervalls
- $m_1, m_2, \ldots, m_n$ Minimumstellen in jedem Teilintervall (Stelle, an dem die Funktion in einem Teilintervall den kleinsten Funktionswert besitzt)
- $M_1, M_2, \ldots, M_n$ Maximumstellen in jedem Teilintervall (Stelle, an dem die Funktion in einem Teilintervall den größten Funktionswert besitzt)

Untersumme: $U_n = \Delta x \cdot f(m_1) + \Delta x \cdot f(m_2) + \cdots + \Delta x \cdot f(m_n) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(m_i)$

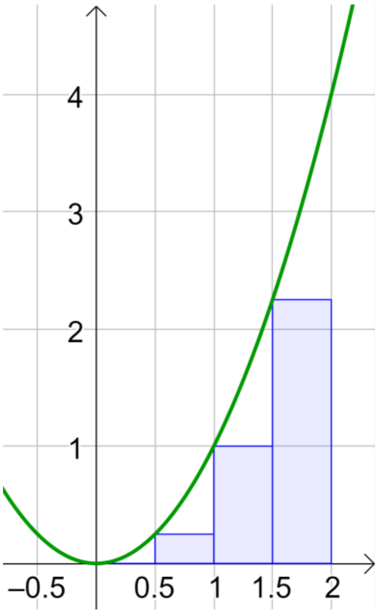
Obersumme: $O_n = \Delta x \cdot f(M_1) + \Delta x \cdot f(M_2) + \cdots + \Delta x \cdot f(M_n) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(M_i)$

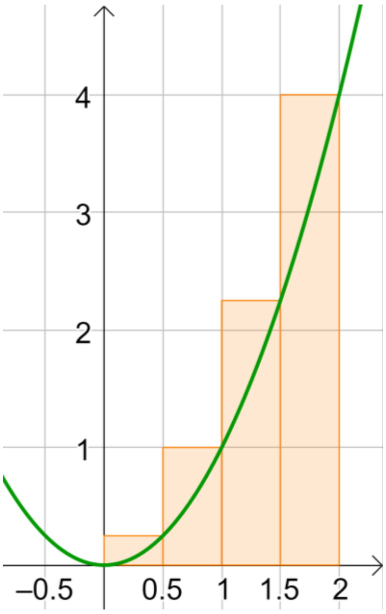
Bemerkungen:

- Je mehr Rechtecksflächen eingezeichnet werden, umso besser wird die tatsächliche Fläche angenähert. Daher gilt:

$$U_1 \leq U_2 \leq U_3 \leq \ldots \leq Fläche \leq \ldots \leq O_3 \leq O_2 \leq O_1$$

- Bei streng monoton wachsenden Funktionen befinden sich die Minimumstellen am linken Rand, sowie die **Maximumstellen** am **rechten Rand** des Teilintervalls.



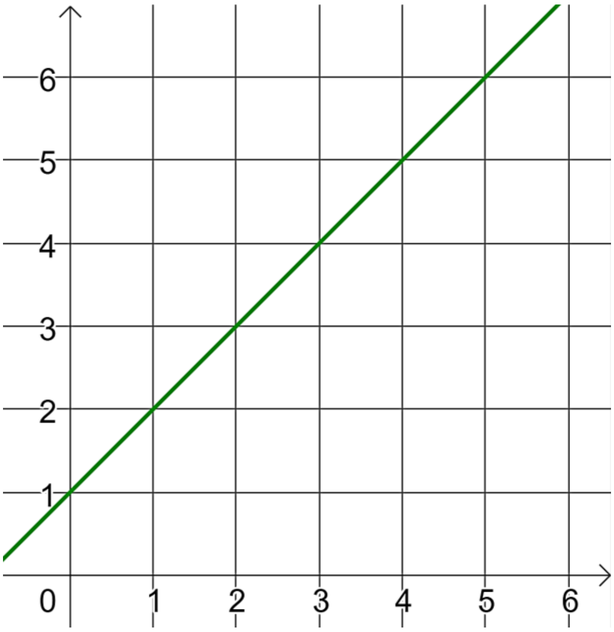


[Video]

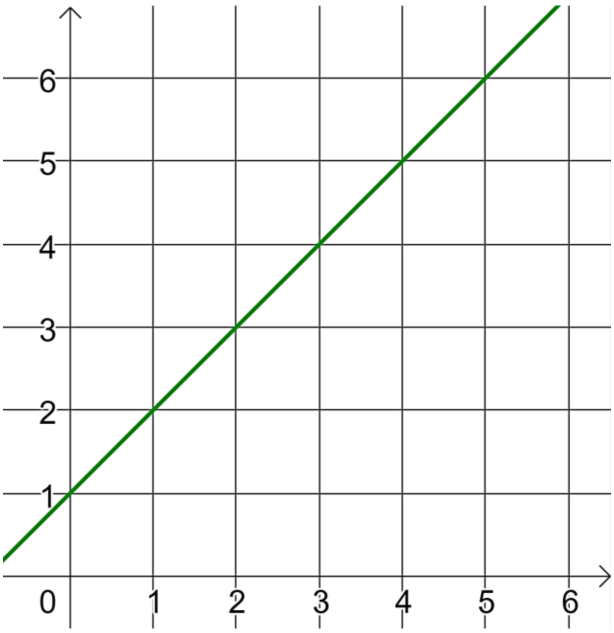
Bsp. 1) Gegeben ist der Graph einer Funktion f. Bestimme näherungsweise die Unter- und Obersumme im gegebenen Intervall durch Unterteilung in n gleich große Teilintervalle.
Gib eine untere bzw. obere Schranke für den tatsächlichen Flächeninhalt an.

a. $[1;5]$ $n=4$

Untersumme:

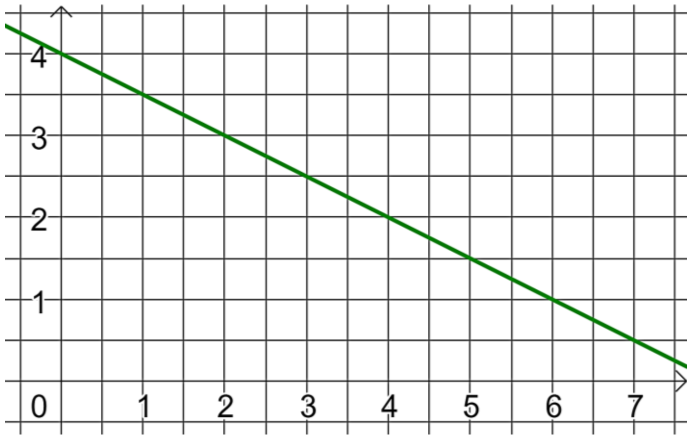


Obersumme:

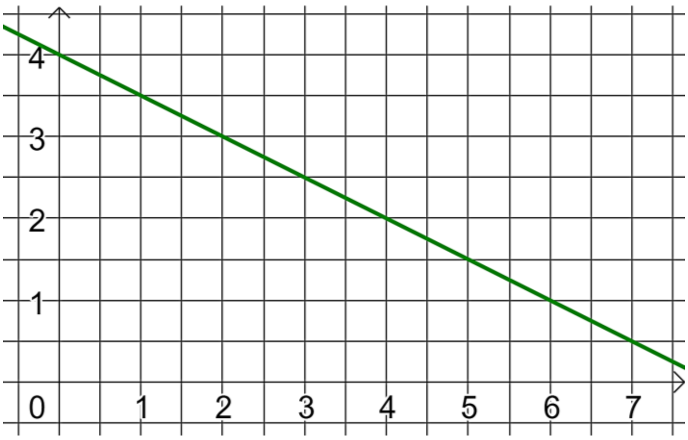


b. $[0;7]$ $n=7$

Untersumme:



Obersumme:



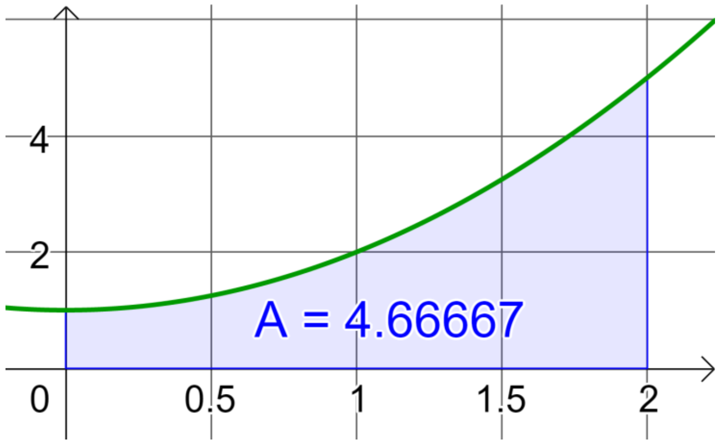
b. Bestimmtes Integral

Video

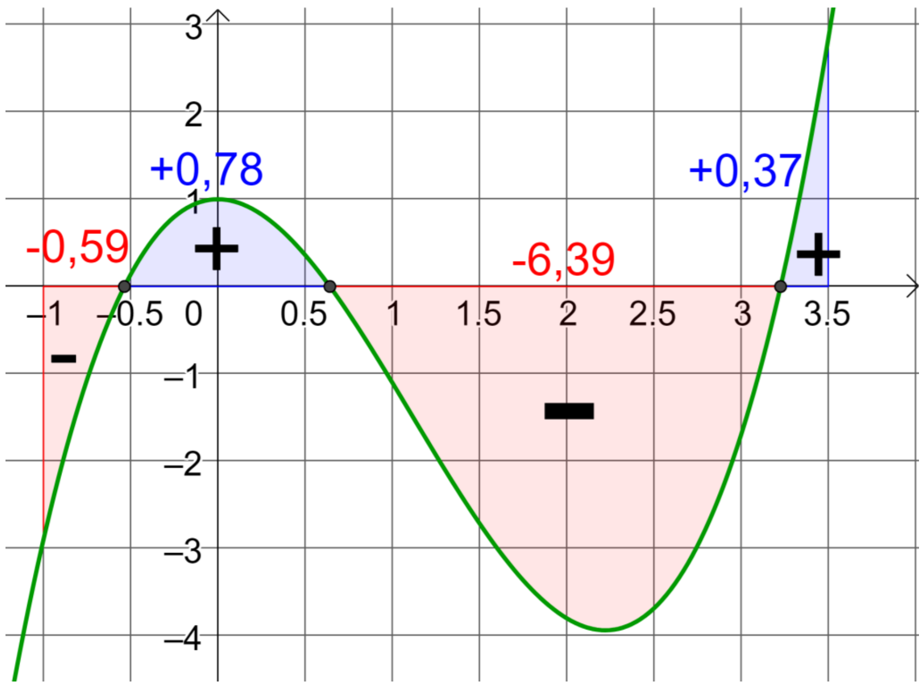
Ist f eine stetige Funktion auf einem Intervall $[a;b]$, dann beschreibt das **bestimmte** Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ die **orientierte Fläche** zwischen der Kurve von $f(x)$ und der x-Achse zwischen den Grenzen a und b.

- a wird untere, bzw. b wird obere Grenze genannt.
- Sprechweise: „Integral von f zwischen den Grenzen a und b“
- Es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} O_n = \int_a^b f(x)\,dx$
  Unterteilt man das Intervall $[a;b]$ in unendlich viele Rechtecke, so entspricht das bestimmte Integral der Unter- bzw. Obersumme.
- D.h. das bestimmte Integral ist das Ergebnis aus unendlich vielen Summen (Differenzen). Daher ist das Integralzeichen $\int$ entstanden, als Abkürzung für das Wort „Summe“ bzw. den Buchstaben „S“.

Hat die Funktion $f(x)$ im Intervall [a;b] nur **positive Funktionswerte**, so entspricht das bestimmte Integral dem **tatsächlichen Flächeninhalt** zwischen Graph und x-Achse.



Treten jedoch auch **negative Funktionswerte** auf, so besteht das bestimmte Integral aus **Summen/Differenzen** von **Flächeninhalten**. (=orientierte Fläche).



$$\int_{-1}^{3,5} f(x)\,dx = \mathbf{-0,59 + 0,78 - 6,39 + 0,37} = -5{,}83$$

Das bestimmte Integral kann daher wie bei diesem Beispiel auch negative Werte annehmen. Dann entspricht das bestimmte Integral nicht mehr dem tatsächlichen Flächeninhalt. Der Flächeninhalt zwischen x-Achse und Funktionsgraph ist:

$$A = 0{,}59 + 0{,}78 + 6{,}39 + 0{,}37 = 8{,}13\ E^2$$

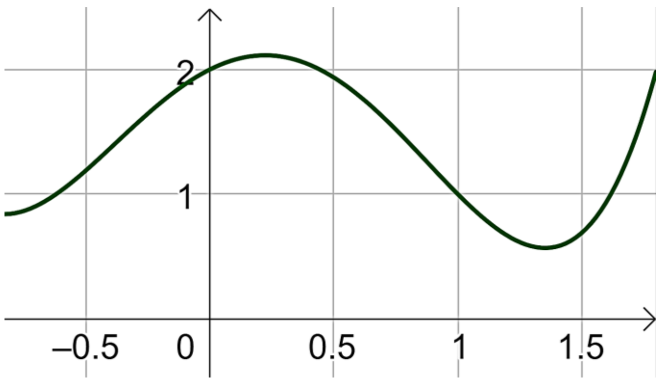
Definition – Orientierte Fläche:

- Liegt der Funktionsgraph oberhalb der x-Achse, so ist das bestimmte Integral positiv.
- Liegt der Funktionsgraph unterhalb der x-Achse, so ist das bestimmte Integral negativ.

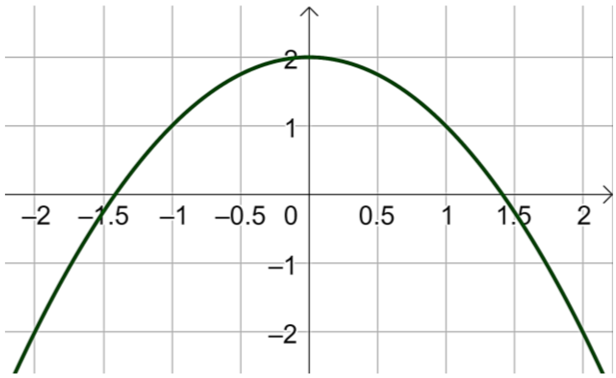
Möchte man den tatsächlichen Flächeninhalt berechnen, müssen positive und negative Teile separat betrachtet und addiert werden (später mehr dazu).

Bsp. 2) Gegeben ist der Graph einer Funktion f. Stelle das bestimmte Integral graphisch dar.

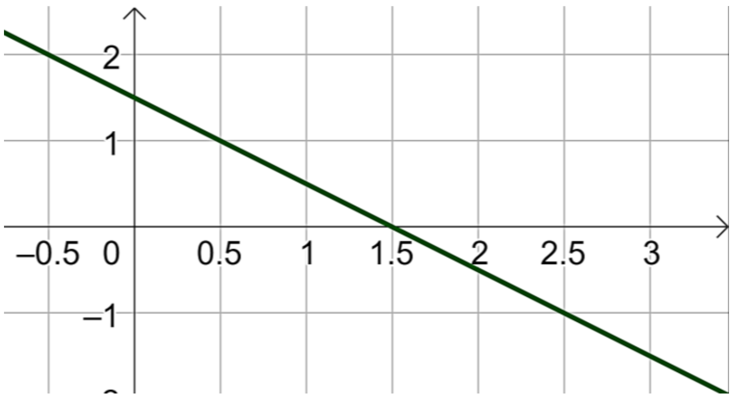
$a.\ \int_{-0,5}^{1,5} f(x)\,dx$



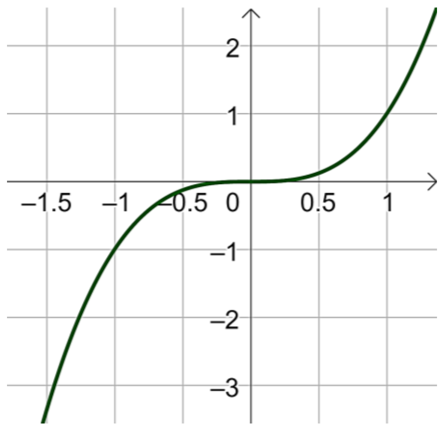
$b.\ \int_{-2}^{2} f(x)\,dx$



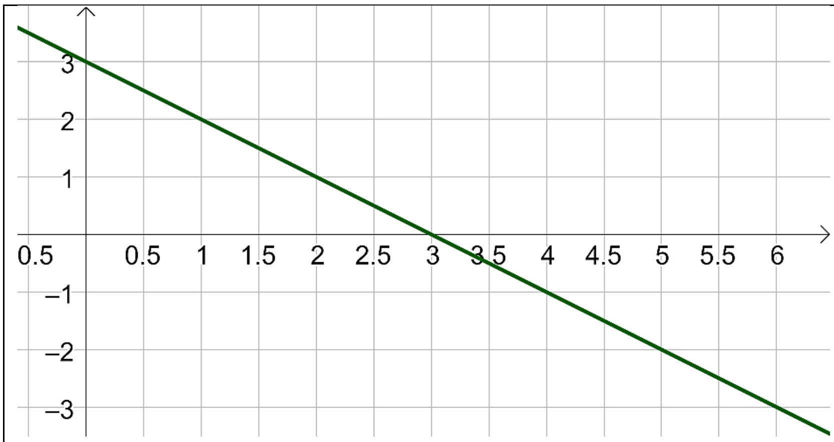
$c.\ \int_{0}^{3} f(x)\,dx$



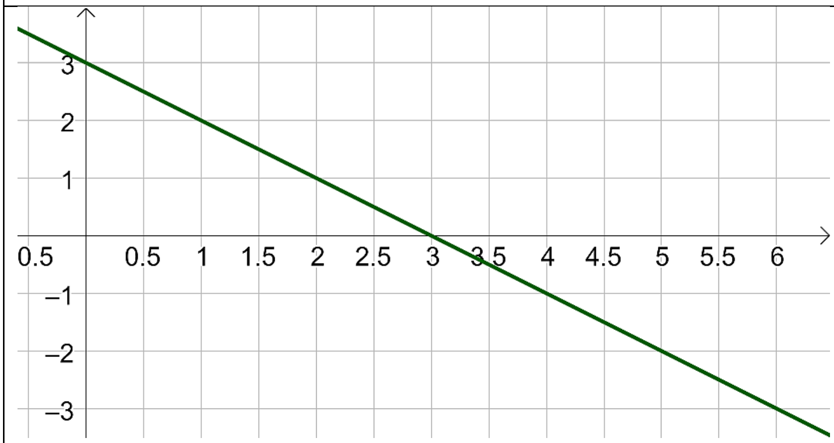
$d.\ \int_{-1,5}^{1} f(x)\,dx$



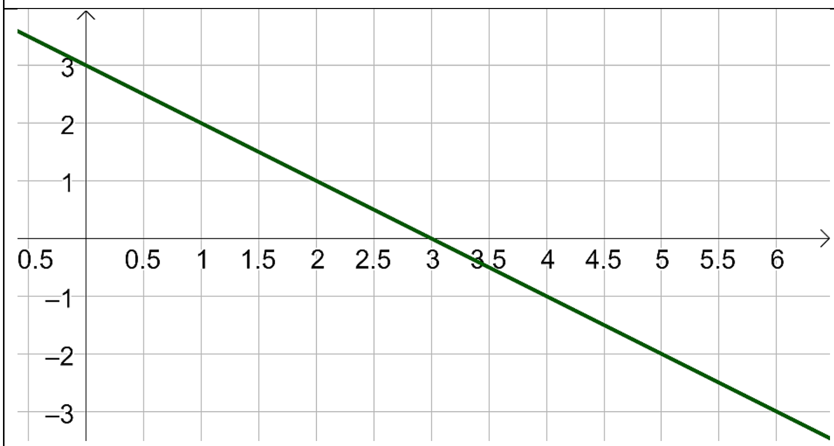
Bsp. 3) Markiere das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$. Berechne den Wert ohne Verwendung von Technologie. Was fällt dir auf?



$\int_0^2 f(x)\,dx$

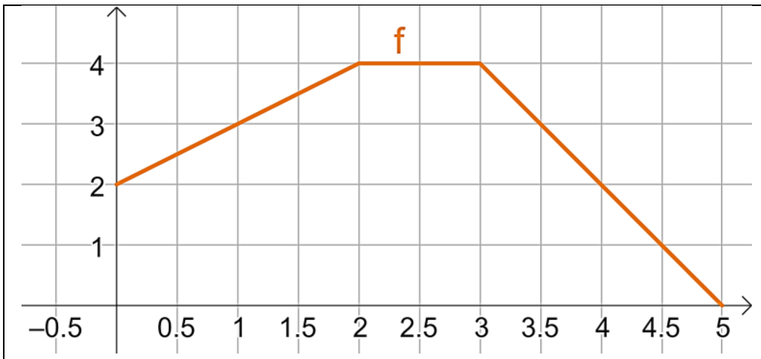


$\int_3^5 f(x)\,dx$

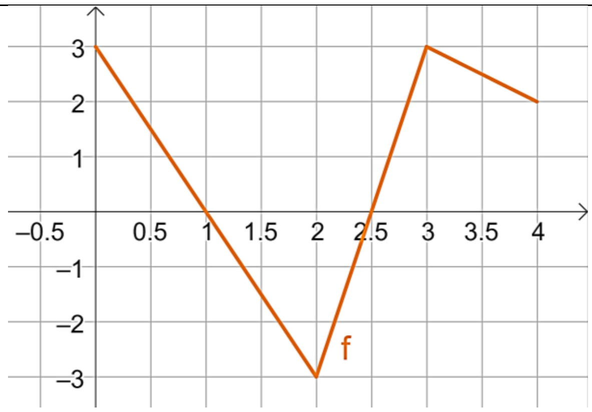


$\int_0^6 f(x)\,dx$

Bsp. 4) Gegeben ist der Graph einer Funktion f. Stelle das bestimmte Integral graphisch dar und berechne es.



$\int_0^5 f(x)\,dx =$



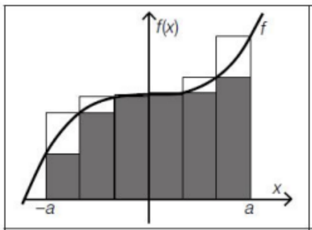
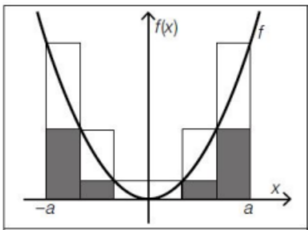
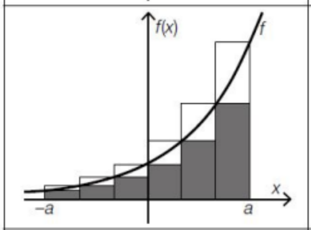
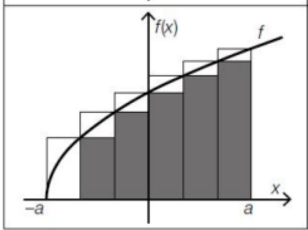
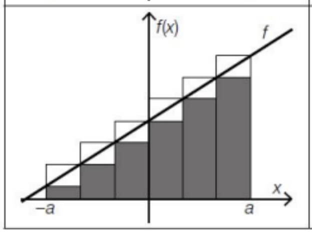
$\int_0^4 f(x)\,dx =$

Untersumme und Obersumme* - 1_678, AN4.1, 2 aus 5

In den nachstehenden Abbildungen sind jeweils der Graph einer Funktion *f* sowie eine Untersumme *U* (= Summe der Flächeninhalte der dunkel markierten, gleich breiten Rechtecke) und eine Obersumme *O* (= Summe der Flächeninhalte der dunkel und hell markierten, gleich breiten Rechtecke) im Intervall [–*a*; *a*] dargestellt.

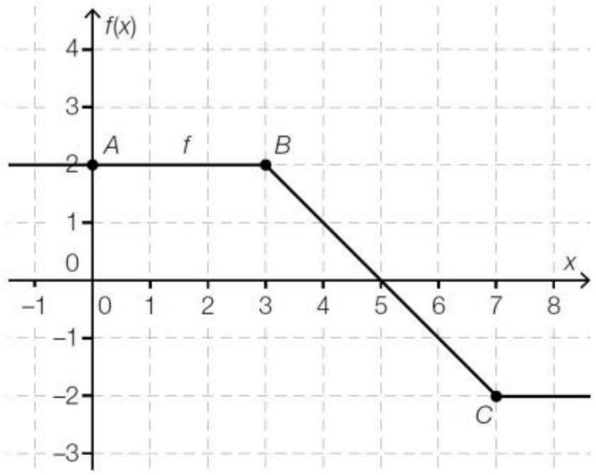
Für zwei Funktionen, deren Graph nachstehend abgebildet ist, gilt bei konstanter Rechteckbreite im Intervall [–*a*; *a*] die Beziehung $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \frac{O+U}{2}$.

Kreuzen Sie die beiden Abbildungen an, bei denen die gegebene Beziehung erfüllt ist!

	☐		☐
	☐		☐
	☐		

Bestimmtes Integral* - 1_654, AN4.2, Halboffenes Antwortformat

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer abschnittsweise linearen Funktion f dargestellt. Die Koordinaten der Punkte A, B und C des Graphen der Funktion sind ganzzahlig.

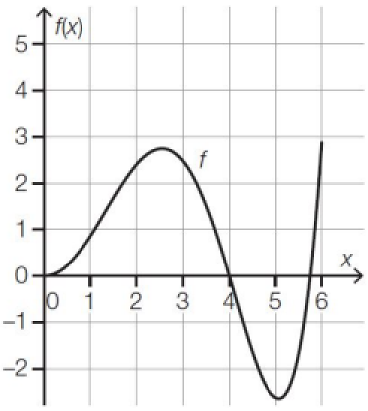


Ermitteln Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^7 f(x)\,dx$!

$\int_0^7 f(x)\,dx =$ ______________________________

Aussagen über bestimmte Integrale* - 1_871, AN4.3, 2 aus 5

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion f im Intervall [0; 6] dargestellt.

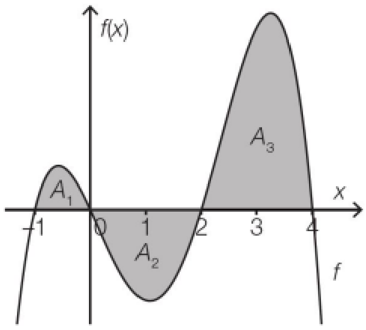


Unten stehend sind einige Aussagen über bestimmte Integrale der Funktion f gegeben. Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

$\int_0^4 f(x)\,dx > \int_0^5 f(x)\,dx$	☐
$\int_3^4 f(x)\,dx > \int_4^5 f(x)\,dx$	☐
$\int_0^6 f(x)\,dx > \int_0^4 f(x)\,dx$	☐
$\int_0^4 f(x)\,dx = 0$	☐
$\int_4^6 f(x)\,dx > 0$	☐

Bestimmte Integrale* - 1_751, AN4.3, 2 aus 5

Nachstehend ist der Graph einer Polynomfunktion *f* mit den Nullstellen $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ und $x_4 = 4$ dargestellt.
Für die mit A_1, A_2 und A_3 gekennzeichneten Flächeninhalte gilt:
$A_1 = 0{,}4$, $A_2 = 1{,}5$ und $A_3 = 3{,}2$.

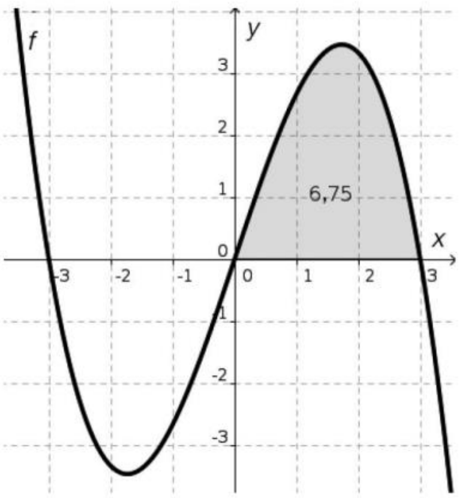


Kreuzen Sie die beiden Gleichungen an, die wahre Aussagen sind.

$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 1{,}9$	☐
$\int_{0}^{4} f(x)\,dx = 1{,}7$	☐
$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = 5{,}1$	☐
$\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 1{,}5$	☐
$\int_{2}^{4} f(x)\,dx = 3{,}2$	☐

Integral* - 1_380, AN4.3, 2 aus 5

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer punktsymmetrischen Funktion *f* (das bedeutet: $f(-x) = -f(x)$) dargestellt. Die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion *f* und der *x*-Achse im Intervall [0; 3] ist grau unterlegt. Ihre Maßzahl beträgt 6,75.



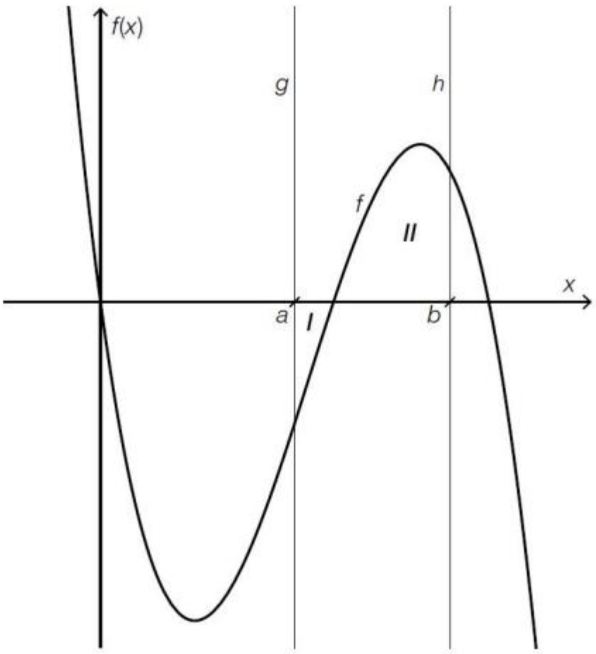
$\int_{0}^{3} f(x)\,dx = 6{,}75$	☐
$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 13{,}5$	☐
$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = -13{,}5$	☐
$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 0$	☐
$\int_{-3}^{0} f(x)\,dx = 6{,}75$	☐

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an!

Flächeninhalte* - 1_703, AN4.3, Halboffenes Antwortformat

Die unten stehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und zwei markierte Flächenstücke.

Der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Gerade g mit der Gleichung $x = a$ schließen das Flächenstück ***I*** mit dem Inhalt A_1 ein.
Der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Gerade h mit der Gleichung $x = b$ schließen das Flächenstück ***II*** mit dem Inhalt A_2 ein.

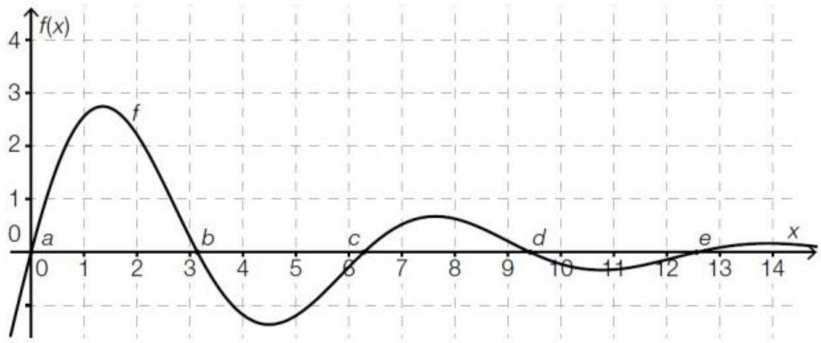


Geben Sie das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mithilfe der Flächeninhalte A_1 und A_2 an!

$\int_a^b f(x)\,dx =$ ______________________________

Bestimmtes Integral* - 1_606, AN4.2, 2 aus 5

Der Graph einer Funktion f schneidet die x-Achse in einem gewissen Bereich an den Stellen a, b, c, d und e.

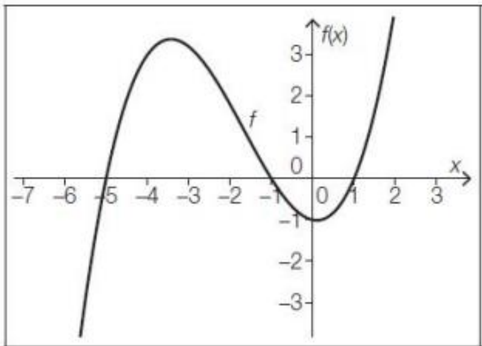
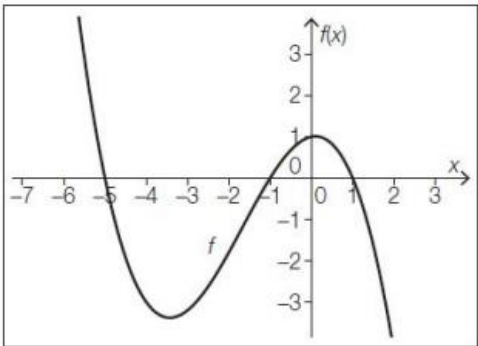
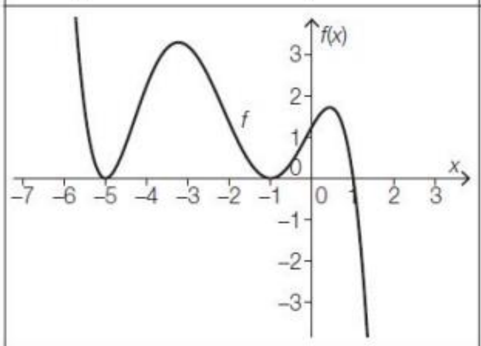
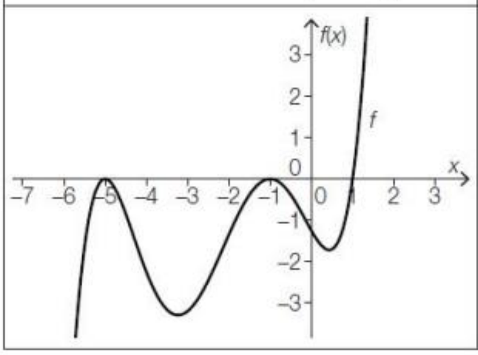
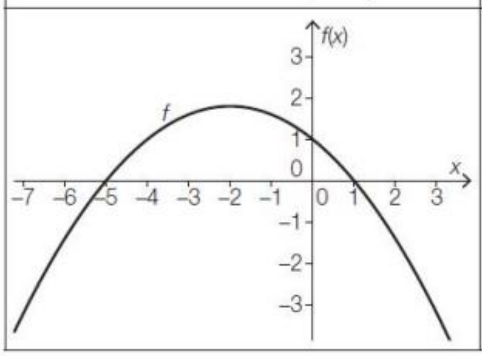


Welche der nachstehend angeführten bestimmten Integrale haben einen Wert, der größer als 0 ist?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden bestimmten Integrale an!

$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_b^d f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_d^e f(x)\,\mathrm{d}x$	☐

Vergleich bestimter Integrale* - 1_775, AN4.3, 2 aus 5

Gegeben sind fünf Abbildungen mit Graphen von Polynomfunktionen.
Kreuzen Sie die beiden Abbildungen an, für die gilt: $\int_{-5}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x > \int_{-5}^{+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

	☐		☐
	☐		☐
	☐		

c. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Für eine im Intervall $[a; b]$ stetige (= Graph ist eine durchgezogene Linie) Funktion f mit einer zugehörigen Stammfunktion F $(F' = f)$ gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

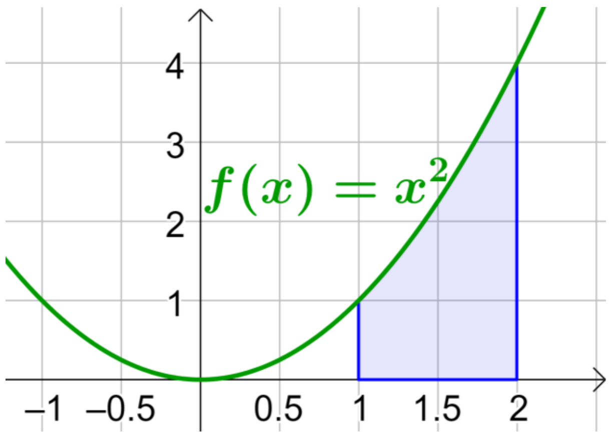
Video

Berechnung – Bestimmtes Integral:

(1) Stammfunktion bilden

(2) F(a) und F(b) berechnen

(3) „Obere Grenze“ MINUS „Untere Grenze“ (**Integrationskonstante fällt** bei der Berechnung **weg**)



$$ges.: \int_1^2 x^2\ dx$$

Schritt 1: Bilde eine Stammfunktion:

$$\int_1^2 x^2\ dx = \left(\frac{x^3}{3} + c\right)\Bigg|_1^2$$

Schritt 2: Obere Grenze – Untere Grenze

$$\left(\frac{2^3}{3} + c\right) - \left(\frac{1^3}{3} + c\right) = \frac{8}{3} + \boldsymbol{c} - \frac{1}{3} - \boldsymbol{c}$$

$$\frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2{,}34\ E^2$$

Rechenregeln:

(1) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx\ =\ \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

(2) $\int_a^b k \cdot f(x)\ dx\ =\ k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

(3) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

(4) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(5) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

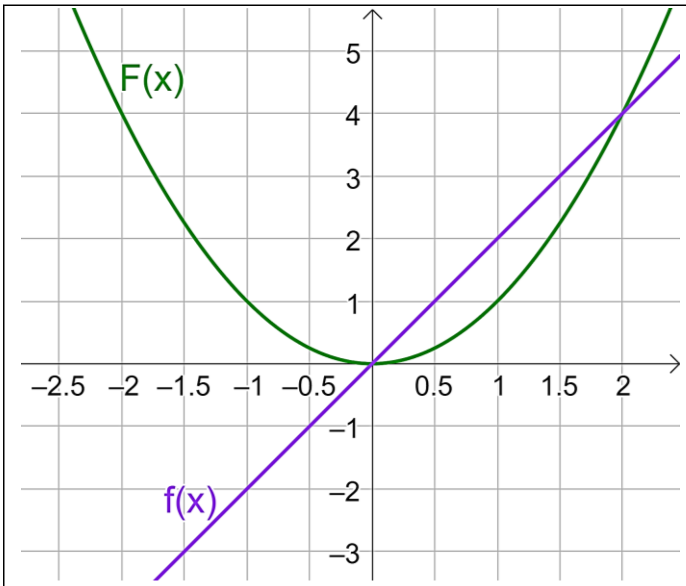
Video

Bsp. 5) Berechne das bestimmte Integral in den Grenzen a und b von f (mit dem Hauptsatz). Entspricht das bestimmte Integral dem Flächeninhalt, den der Funktionsgraph mit der x-Achse im Intervall $[a; b]$ einschließt?

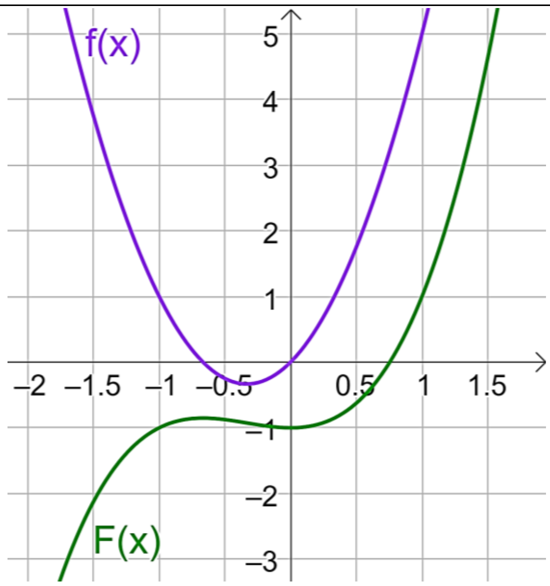
a. $f(x) = 2x + 1$ $\quad a = 1, b = 3$	**b.** $f(x) = 7$ $\quad a = -2, b = 5$
c. $f(x) = -3x + 5$ $\quad a = -2, b = 3$	**d.** $f(x) = 3x^2 + 2x$ $\quad a = 0,\ b = 2$
e. $f(x) = x^3 - x$ $\quad a = -4, b = 2$	**f.** $f(x) = 5x^4 + 2x + 4$ $\quad a = 0,\ b = 1$

Bsp. 6) Die Funktionsgraphen der Funktion f und ihrer Stammfunktion F sind jeweils gegeben.

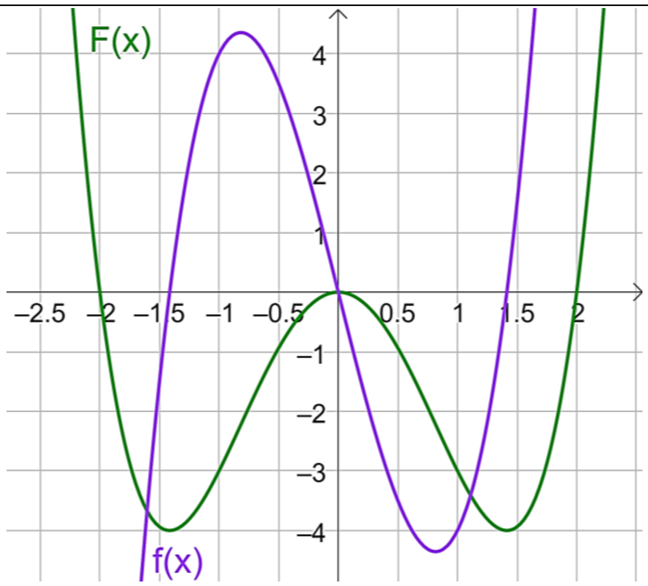
a. Markiere das bestimmte Integral graphisch.
b. Ermittle mit Hilfe der Abbildung das gesuchte Integral.
c. Entspricht das bestimmte Integral dem tatsächlichen Flächeninhalt?



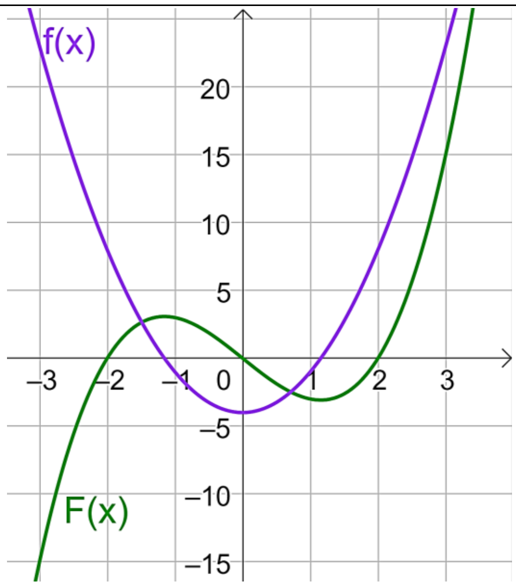
$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx =$$



$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx =$$



$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx =$$



$$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx =$$

Bsp. 7) Bestimme den gesuchten Wert e. Video

a. $\int_1^e (2x+1)\,dx = 10$	**b.** $\int_e^3 (x^2+x)\,dx = 13{,}5$
c. $\int_0^e (2x^3-3x^2)\,dx = 64$	**d.** $\int_e^{10} \frac{1}{x^2}\,dx = 0{,}9$

Bestimmtes Integral* - 1_894, AN4.2, Offenes Antwortformat

Die Polynomfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat eine bestimmte Stammfunktion F. Von dieser Stammfunktion F sind nachstehend einige Wertepaare gegeben.

x	$F(x)$
0	0
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15

Weiters ist die Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x) + 2$ gegeben.
Berechnen Sie $\int_1^4 g(x)\,dx$.

Bsp. 8) Vereinfache so weit wie möglich. Wende die Rechenregeln an. Berechne anschließend.

a. $\int_{-2}^2 2x\,dx + \int_2^3 2x\,dx + \int_3^5 2x\,dx =$	**b.** $\int_1^7 (x^2+2)\,dx - \int_{10}^7 (x^2+2)\,dx =$
c. $\int_{-2}^5 (x^7+x^6)\,dx + \int_5^{-2} (x^7+x^6)\,dx + \int_1^2 x\,dx =$	**d.** $\int_2^7 (4x+1)\,dx + \int_7^8 4x\,dx + \int_7^8 1\,dx =$

Integral* - 1_501, AN4.2, 2 aus 5

Gegeben ist das bestimmte Integral $I = \int_0^a (25 \cdot x^2 + 3)\,dx$ mit $a \in \mathbb{R}^+$.

Kreuzen Sie die beiden Ausdrücke an, die für alle $a > 0$ denselben Wert wie I haben!

$25 \cdot \int_0^a x^2\,dx + \int_0^a 3\,dx$	☐
$\int_0^a 25\,dx \cdot \int_0^a x^2\,dx + \int_0^a 3\,dx$	☐
$\int_0^a 25 \cdot x^2\,dx + 3$	☐
$\frac{25 \cdot a^3}{3} + 3 \cdot a$	☐
$50 \cdot a$	☐

Integrationsregeln* - 1_429, AN4.2, 2 aus 5

Zwei der nachstehend angeführten Gleichungen sind für alle Polynomfunktionen f und bei beliebiger Wahl der Integrationsgrenzen a und b (mit $a < b$) richtig.

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an!

$\int_a^b (f(x) + x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b x\,dx$	☐
$\int_a^b f(2 \cdot x)\,dx = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$	☐
$\int_a^b (1 - f(x))\,dx = x - \int_a^b f(x)\,dx$	☐
$\int_a^b (f(x) + 2)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + 2$	☐
$\int_a^b (3 \cdot f(x))\,dx = 3 \cdot \int_a^b f(x)\,dx$	☐

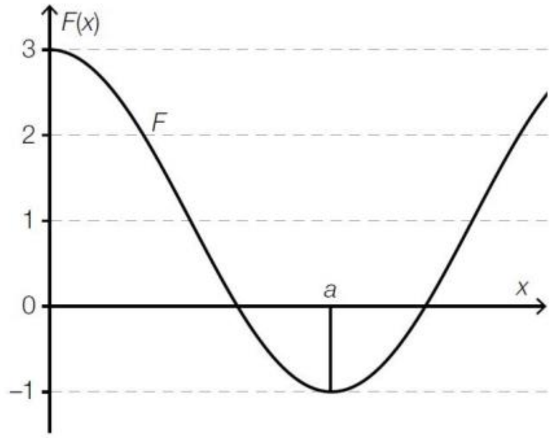
Durchflussrate* - 1_428, AN4.3, Offenes Antwortformat

In einem Wasserrohr wird durch einen Sensor die Durchflussrate (= Durchflussmenge pro Zeiteinheit) gemessen. Die Funktion D ordnet jedem Zeitpunkt t die Durchflussrate $D(t)$ zu. Dabei wird t in Minuten und $D(t)$ in Litern pro Minute angegeben.

Geben Sie die Bedeutung der Zahl $\int_{60}^{120} D(t)\,dt$ im vorliegenden Kontext an!

Wert eines bestimmten Integrals* - 1_631, AN4.3, Halboffenes Antwortformat

Von einer reellen Funktion f ist der Graph einer Stammfunktion F abgebildet.

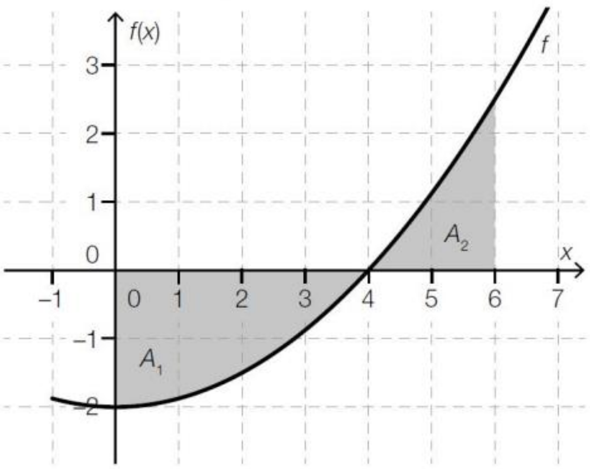


Geben Sie den Wert des bestimmten Integrals $I = \int_0^a f(x)\,dx$ an!

$I =$ ____

Wert eines bestimmten Integrals* - 1_679, AN4.3, Halboffenes Antwortformat

Nachstehend ist der Graph einer Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dargestellt. Zusätzlich sind zwei Flächen gekennzeichnet.
Die Fläche A_1 wird vom Graphen der Funktion f und von der x-Achse im Intervall $[0; 4]$ begrenzt und hat einen Flächeninhalt von $\frac{16}{3}$ Flächeneinheiten.
Die Fläche A_2 wird vom Graphen der Funktion f und von der x-Achse im Intervall $[4; 6]$ begrenzt und hat einen Flächeninhalt von $\frac{7}{3}$ Flächeneinheiten.



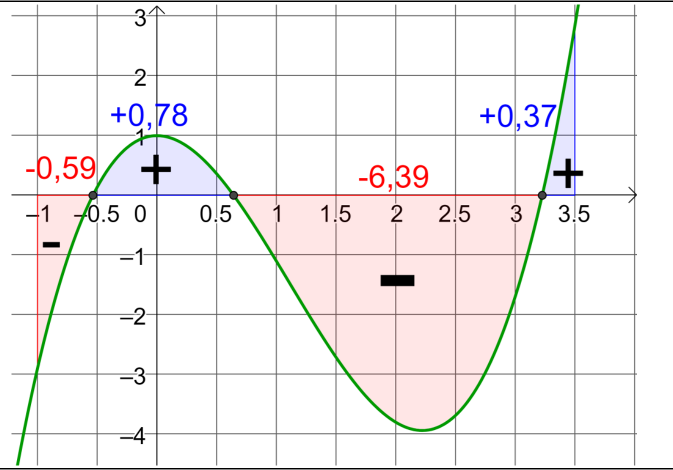
Geben Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^6 f(x)\,dx$ an!

$\int_0^6 f(x)\,dx =$ ______________

d. Berechnung von Flächeninhalten

(1) Flächeninhalt zwischen x-Achse und Funktionsgraph

Video



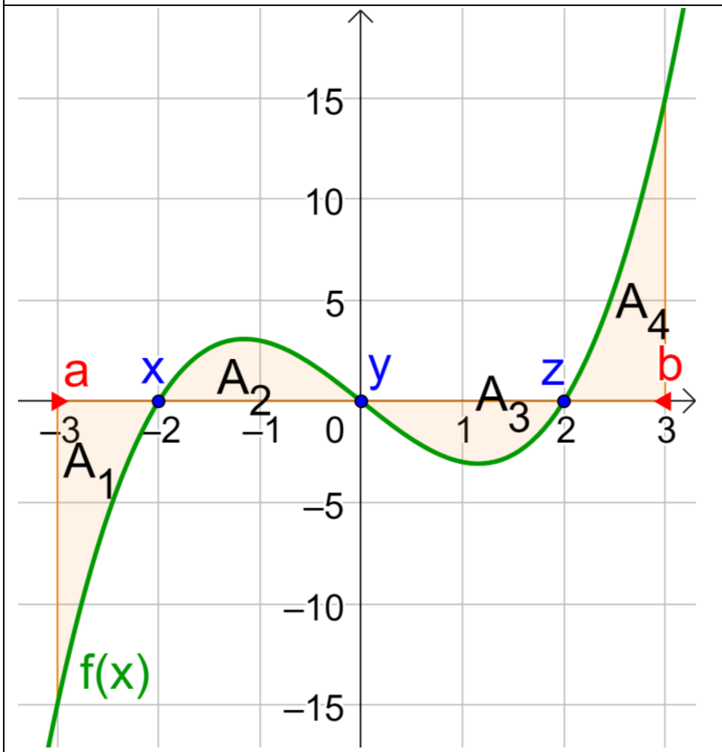
(1) Bestimmtes Integral:

$$\int_{-1}^{3,5} f(x)\,dx = \mathbf{-0,59 + 0,78 - 6,39 + 0,37} = -5{,}83$$

(2) Flächeninhalt zwischen x-Achse und Funktionsgraph:

$$A = 0{,}59 + 0{,}78 + 6{,}39 + 0{,}37 = 8{,}13\ E^2$$

Besitzt die Funktion ausschließlich **positive Funktionswerte** entspricht das **bestimmte Integral** dem tatsächlichen **Flächeninhalt**.



Besitzt eine Funktion **positive** und **negative Funktionswerte**, so kannst du den Flächeninhalt folgendermaßen berechnen:

Schritt 1: Mache dir eine Skizze des Funktionsgraphen. Gesucht ist der Flächeninhalt im Intervall $[-3; 3]$ zwischen der x-Achse und dem Funktionsgraphen. Berechne alle Nullstellen und überlege dir die Intervalle, in denen die Funktion im positiven bzw. negativen Bereich liegt.

$$f(x) = x^3 - 4x$$

$$f(x) = 0 \rightarrow \quad x = -2; y = 0; z = 3$$

Es entstehen 4 Bereiche:

$[-3; -2]$: negativ

$[-2; 0]$: positiv

$[0; 2]$: negativ

$[2; 3]$: positiv

Schritt 2: Es müssen alle Bereiche separat betrachtet werden. Die negativen Bereiche müssen zur Berechnung des Flächeninhalts positiv gemacht werden, sodass schlussendlich alle Flächen summiert werden.

2 Optionen, um negative Bereiche positiv zu machen:

(1) Betragsstriche bei den negativen Bereichen:

$$A(a; b) = \left|\int_{-3}^{-2} f(x)\,dx\right| + \int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \left|\int_{0}^{2} f(x)\,dx\right| + \int_{2}^{3} f(x)\,dx = 20{,}5\ E^2$$

(2) **Minus** vor einem bestimmten Integral (negativer Funktionsbereich) setzen:

$$A(a; b) = -\int_{-3}^{-2} f(x)\,dx + \int_{-2}^{0} f(x)\,dx - \int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{3} f(x)\,dx = 20{,}5\ E^2$$

Bsp. 9) Berechne den Inhalt jener Fläche, der vom Graphen von f und der x-Achse im gegebenen Intervall eingeschlossen wird. Mach dir eine Skizze.

a. $f(x) = 3x^2 - 3 \qquad [-2; 3]$	**b.** $f(x) = 2x + 4 \qquad [-6; 2]$
c. $f(x) = x^3 - 9x \qquad [-5; 4]$	**d.** $f(x) = x^4 - 4x^2 \qquad [-1; 3]$
e. $f(x) = e^x - 2 \qquad [-3; 5]$	**f.** $f(x) = \frac{1}{x} - 1 \qquad [0{,}5; 3]$

Video

Bsp. 10) Eine Funktion f ist gegeben. Bestimme den Parameter e so, dass der Graph von f in $[1; e]$ mit $e > 1$ den Flächeninhalt A mit der x-Achse einschließt.

a. $f(x) = -x + 3 \qquad A = 10\ E^2$	**b.** $f(x) = -3x^2 + 12 \qquad A = 37\ E^2$
c. $f(x) = x^3 - 3x^2 \qquad A = 270\ E^2$	**d.** $f(x) = -4x + 16 \qquad A = 146\ E^2$

[Video](#)

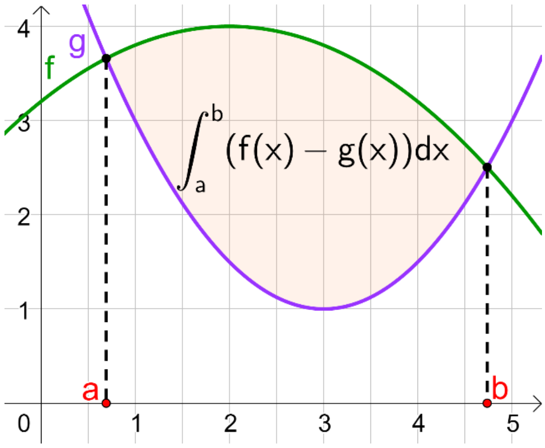
(2) Flächeninhalt zwischen zwei Funktionsgraphen

Schließen zwei stetige Funktionen im Intervall $[a;b]$ eine Fläche ein, so kann der **Inhalt der eingeschlossenen Fläche** mit folgender Formel berechnet werden:

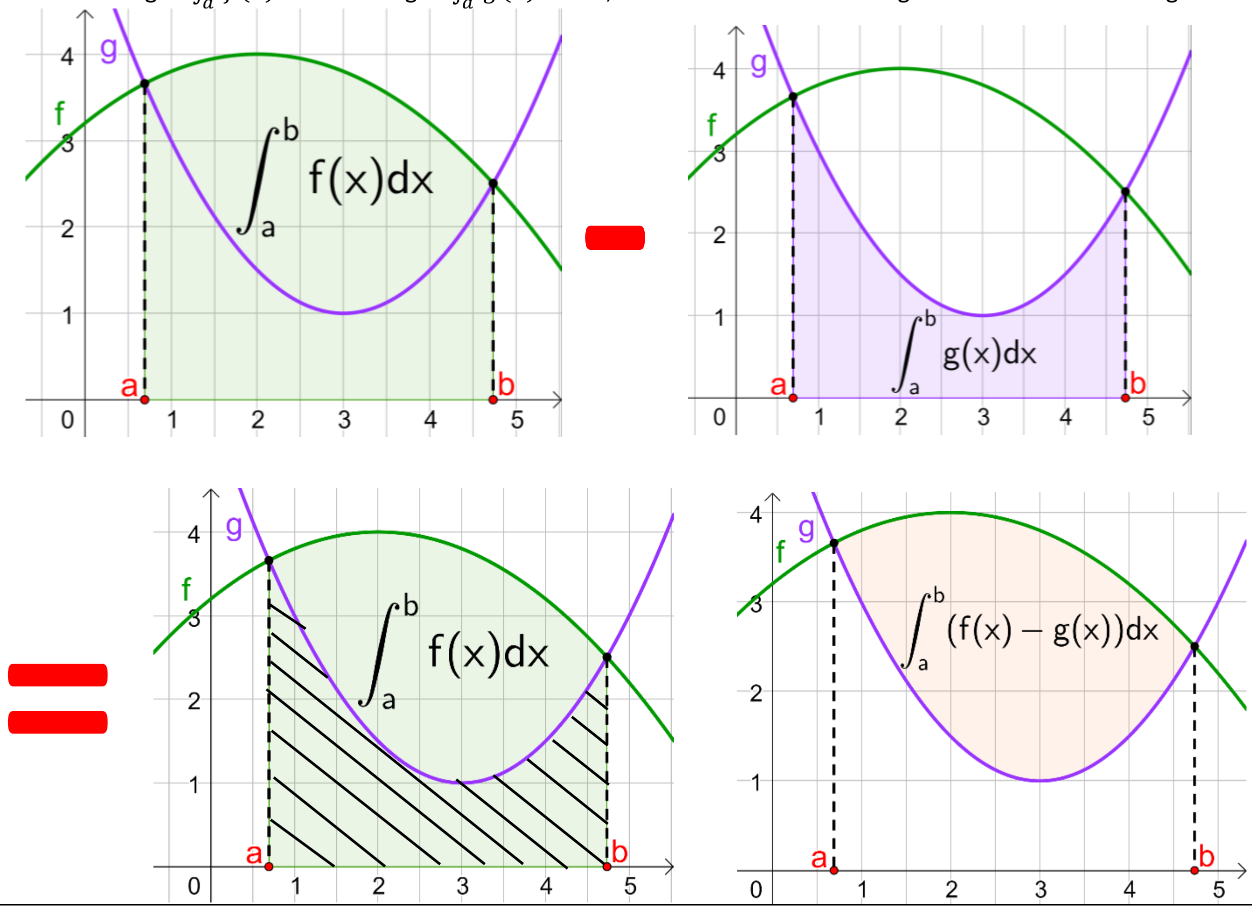
$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

wobei der Graph von $\boldsymbol{f}$ **die obere** und der **Graph von** $\boldsymbol{g}$ die **untere Begrenzungskurve** sein muss. Es gilt: $f(x) \geq g(x)$ für alle x aus dem Intervall $[a;b]$.

$$\int_{linke\ Grenze}^{rechte\ Grenze} (\color{green}{obere\ Funktion} - \color{purple}{untere\ Funktion})\,dx$$



Zieht man vom Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ das Integral $\int_a^b g(x)\,dx$ ab, so bleibt nur mehr die eingeschlossene Fläche übrig:



Vorgehensweise:

Schritt 1: Berechne die Stellen, an denen sich die Funktionen schneiden.

$$f(x) = g(x)$$

Schritt 2: Aus wie vielen Teilflächen besteht die gesamte Fläche? Überlege jeweils, welche die „obere" bzw. „untere" Funktion ist.

Schritt 3: Berechne die Teilflächen. Die Gesamtfläche bildet sich aus der Summe der Teilflächen.

GeoGebra: **IntegralZwischen(f,g,0,3)**

Musterbeispiel:
Berechne die Fläche, die die Funktionen $f(x) = x + 1$ und $g(x) = x^2 - 2x + 1$ einschließen.

Schritt 1: $f(x) = g(x)$

$$x + 1 = x^2 - 2x + 1 \quad | -x, -1$$
$$0 = x^2 - 3x$$
$$0 = x \cdot (x - 3)$$
$$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$

Schritt 2: Es existiert eine eingeschlossene Fläche im Intervall [0;3]. Welche ist die obere bzw. untere Funktion?

a. Funktionen zeichnen (Wertetabelle oder GeoGebra)
b. Funktionswert aus dem Intervall (0;3) einsetzen:
$f(1) = 2 \quad g(1) = 1 - 2 + 1 = 0 \qquad \boldsymbol{f(1) > g(1)}$

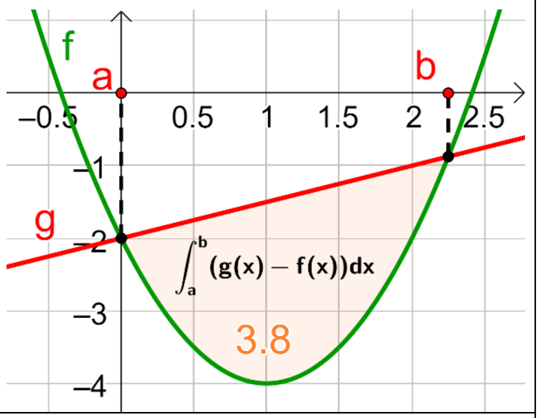
-> Im Intervall [0;3] ist die Funktion $f(x)$ die obere Funktion.

Schritt 3:

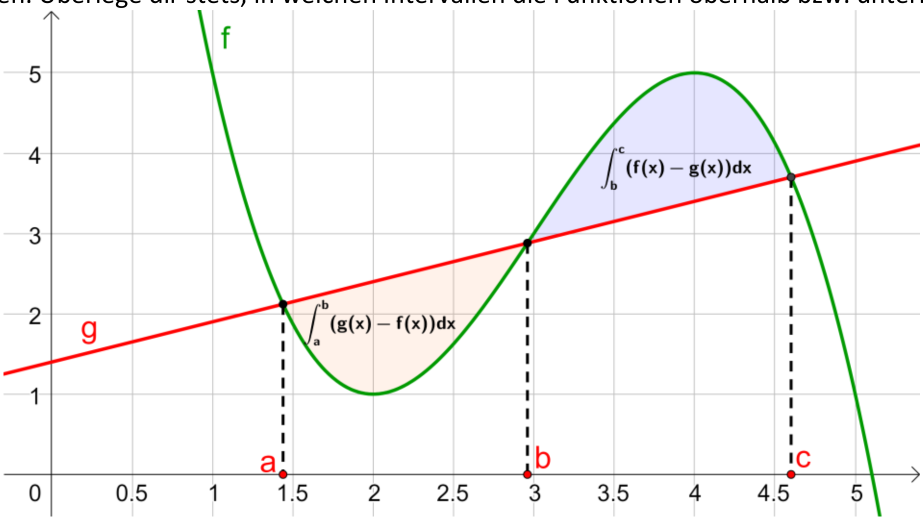
$$\int_0^3 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^3 [x + 1 - (x^2 - 2x + 1)]\,dx =$$
$$\int_0^3 [-x^2 + 3x]\,dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + c\,\Big|_0^3 =$$
$$-\frac{27}{3} + \frac{27}{2} + c - (0 + 0 + c) = -9 + 13{,}5 = 4{,}5\ \mathrm{E}^2$$

Bemerkung 1:

Bei dieser Berechnung ist es egal, ob die Funktionen unterhalb der x-Achse verlaufen, solange du stets „obere Funktion MINUS untere Funktion" rechnest.



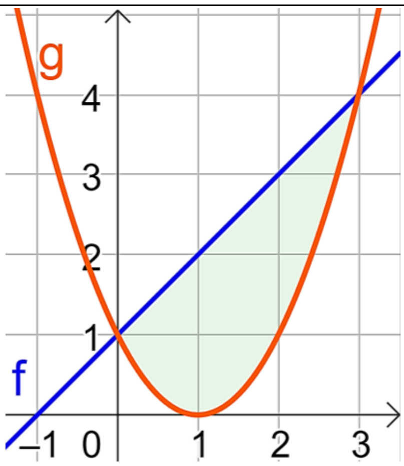
Haben zwei Funktionsgraphen mehrere Teilflächen, so musst du alle Teilflächen einzeln berechnen und anschließend summieren. Überlege dir stets, in welchen Intervallen die Funktionen oberhalb bzw. unterhalb sind.

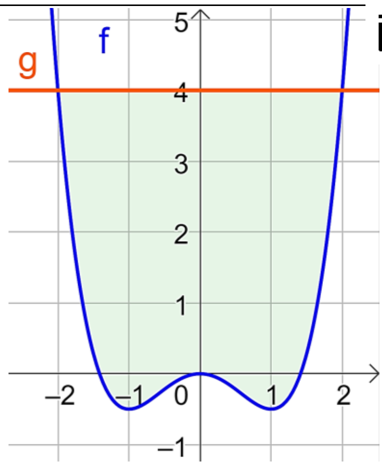


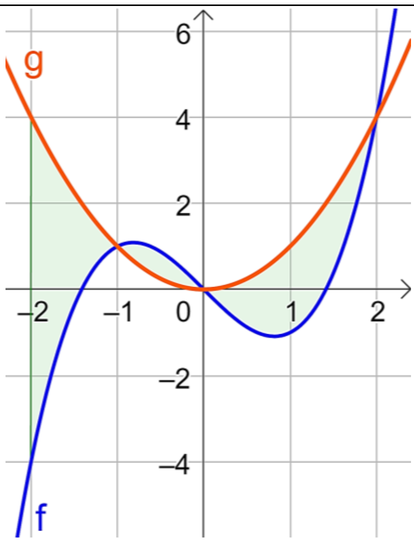
$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx + \int_b^c [f(x) - g(x)]\,dx$$

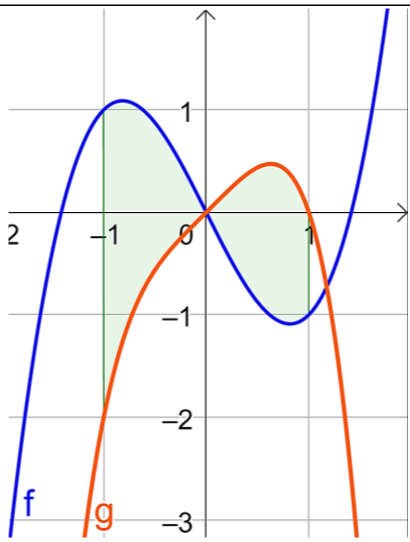
Video

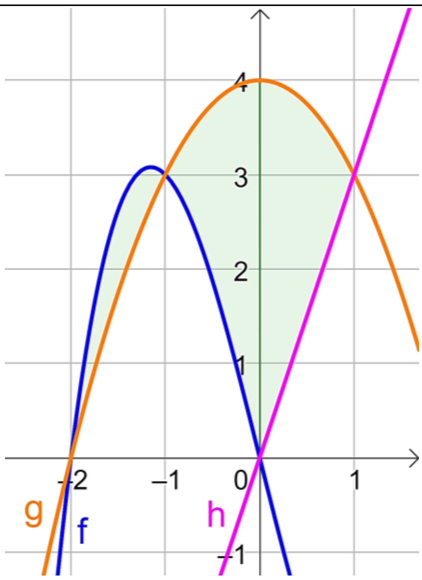
Bsp. 11) Gib mit den Funktionen $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ eine Formel zur Berechnung der markierten Fläche an.

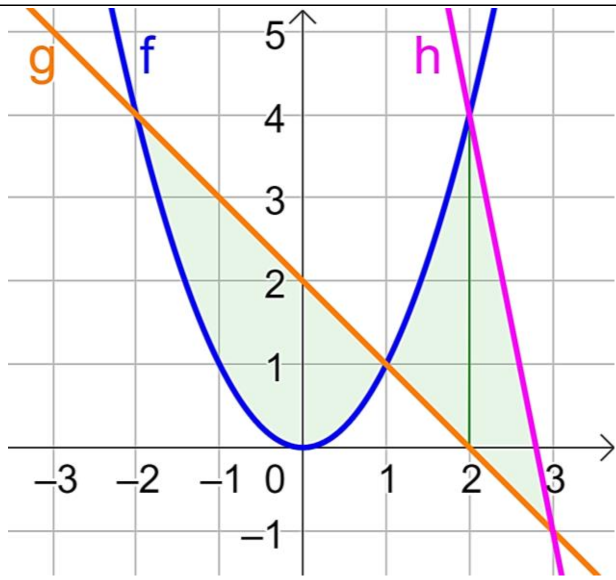








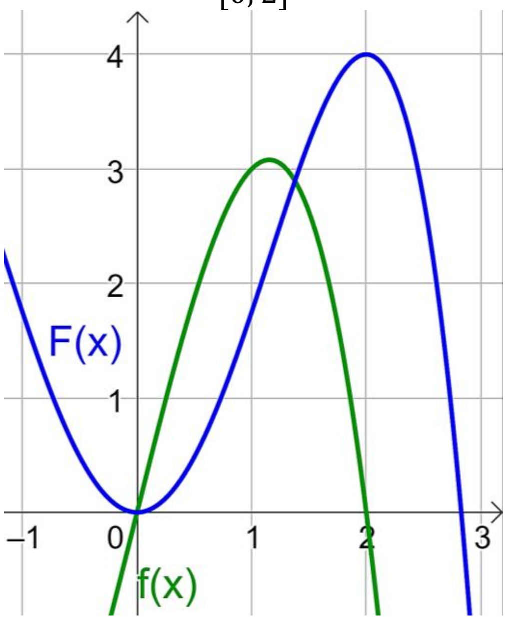
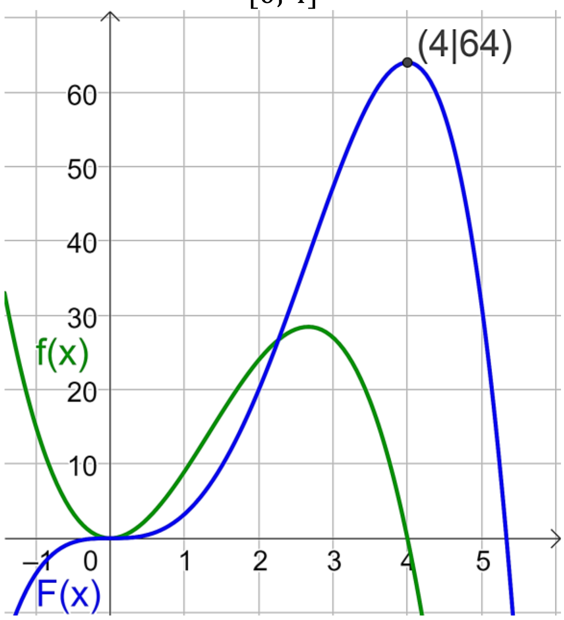




Bsp. 12) Berechne den Flächeninhalt, der von den Graphen der Funktionen f und g begrenzt wird.

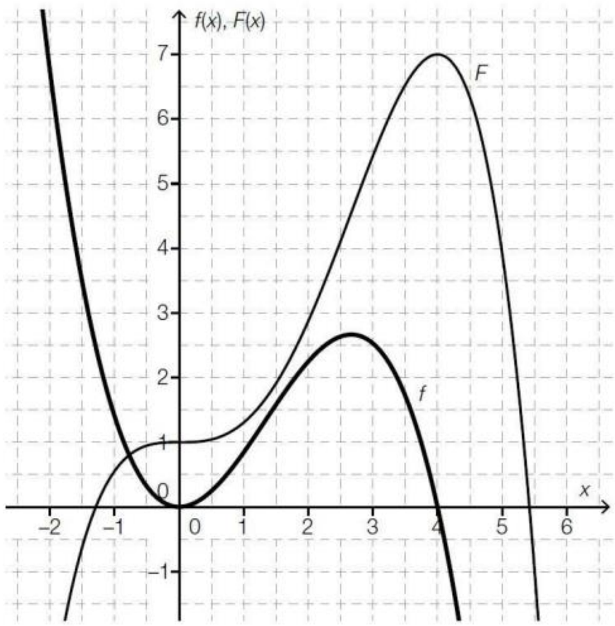
a. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$, $g(x) = 2x + 4$	**b.** $f(x) = -x$, $g(x) = x^3 - 2x$
c. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2$, $g(x) = 8 - x$	**d.** $f(x) = x^3 - 4x$, $g(x) = 4 - x^2$

Bsp. 13) Gegeben sind ein Graph einer Polynomfunktion f und der Graph einer ihrer Stammfunktionen F. Der Graph von f und die positive x-Achse begrenzen im gegebenen Intervall ein endliches Flächenstück. Markiere und ermittle den Flächeninhalt dieses Flächenstücks.

$[0; 2]$	$[0; 4]$
	

Flächeninhalt* - 1_604, AN3.2, Offenes Antwortformat

In der nachstehenden Abbildung sind der Graph einer Polynomfunktion f dritten Grades und der Graph einer ihrer Stammfunktionen F dargestellt.



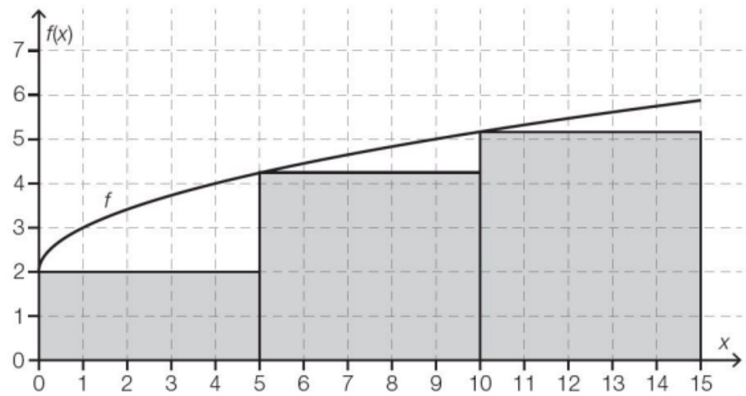
Der Graph von f und die positive x-Achse begrenzen im Intervall [0; 4] ein endliches Flächenstück. Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Flächenstücks!

Fläche zwischen Graph und x-Achse* - 1_822, AN4.1, 2 aus 5

Gegeben ist eine Potenzfunktion $f: [0; 15] \to \mathbb{R}^+$.
Der Inhalt A derjenigen Fläche, die vom Graphen von f, von der x-Achse und von den beiden Geraden $x = 0$ und $x = 15$ begrenzt wird, kann durch den nachstehenden Ausdruck U näherungsweise berechnet werden.

$U = 5 \cdot (f(0) + f(5) + f(10))$

In der nachstehenden Abbildung sind der Graph von f und – grau markiert – die Fläche, deren Inhalt durch den Ausdruck U berechnet wird, dargestellt.



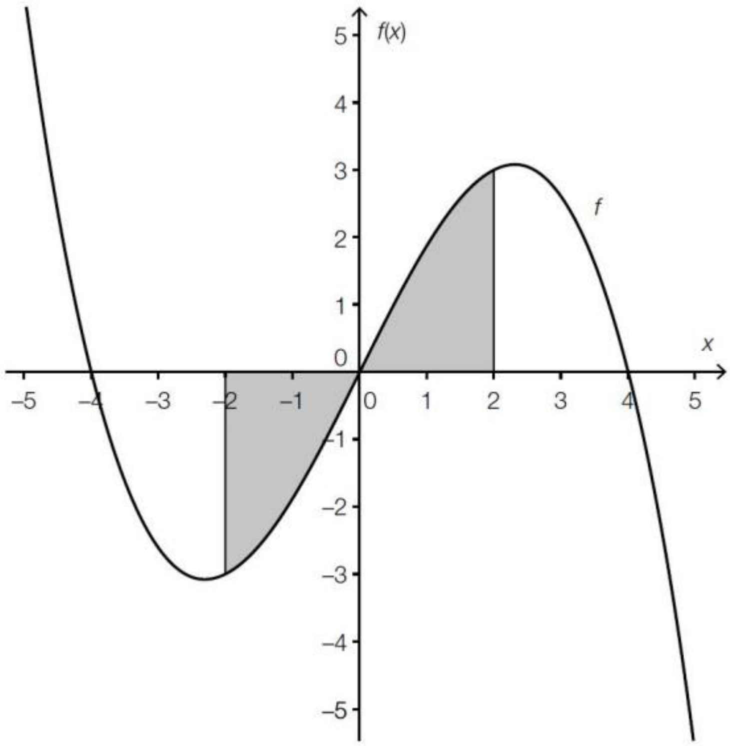
Kreuzen Sie die beiden Ausdrücke an, mit denen der Flächeninhalt A besser als mit dem Ausdruck U angenähert werden kann.

$5 \cdot (f(0) + f(5) + f(10) + f(15))$	☐
$2{,}5 \cdot (f(0) + f(2{,}5) + f(5) + f(7{,}5) + f(10) + f(12{,}5))$	☐
$\int_0^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$f(0) \cdot 15$	☐
$f(15) \cdot 5$	☐

Flächeninhalt* - 1_525, AN4.2, Offenes Antwortformat

Abgebildet ist ein Ausschnitt des Graphen der Polynomfunktion f mit $f(x) = -\frac{x^3}{8} + 2 \cdot x$.

Die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse im Intervall $[-2; 2]$ ist grau markiert.

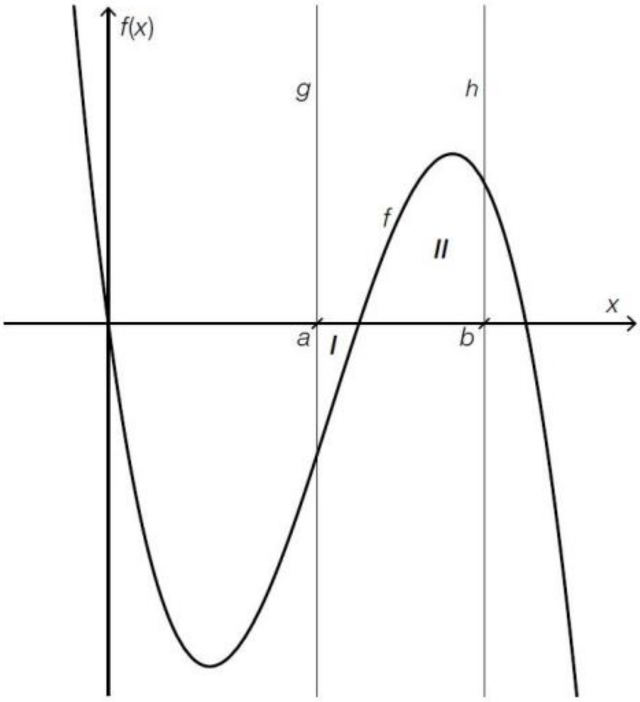


Berechnen Sie den Inhalt der grau markierten Fläche!

Flächeninhalte* - 1_703, AN4.3, Halboffenes Antwortformat

Die unten stehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und zwei markierte Flächenstücke.

Der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Gerade g mit der Gleichung $x = a$ schließen das Flächenstück ***I*** mit dem Inhalt A_1 ein.
Der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Gerade h mit der Gleichung $x = b$ schließen das Flächenstück ***II*** mit dem Inhalt A_2 ein.

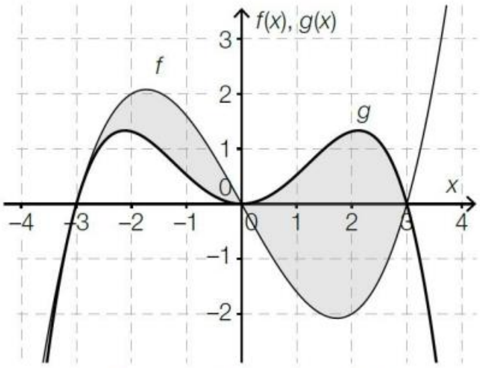


Geben Sie das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mithilfe der Flächeninhalte A_1 und A_2 an!

$\int_a^b f(x)\,dx =$ ____

Flächeninhaltsberechnung* - 1_583, AN4.3, 2 aus 5

In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Polynomfunktionen f und g dargestellt. Diese schneiden einander an den Stellen –3, 0 und 3 und begrenzen die beiden grau markierten Flächenstücke.



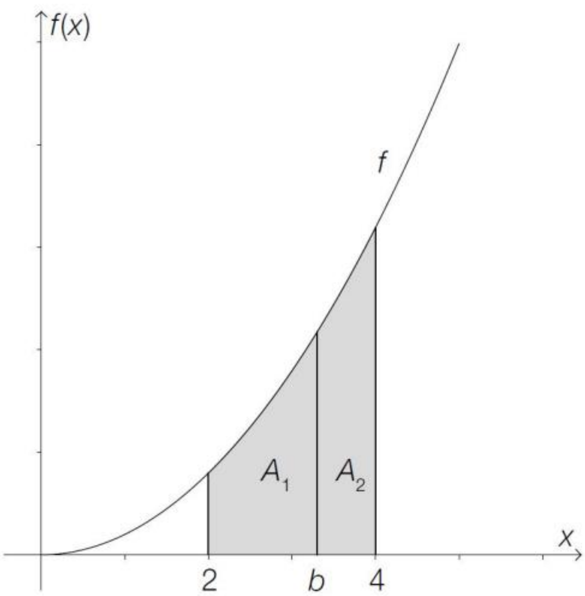
Welche der nachstehenden Gleichungen geben den Inhalt A der (gesamten) grau markierten Fläche an? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an!

$A = \left\lvert\int_{-3}^{3} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x\right\rvert$	☐
$A = 2 \cdot \int_{0}^{3} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$	☐
$A = \int_{-3}^{0} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$	☐
$A = \left\lvert\int_{-3}^{0} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x\right\rvert + \int_{0}^{3} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$	☐
$A = \int_{-3}^{0} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \left\lvert\int_{0}^{3} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x\right\rvert$	☐

Halbierung einer Fläche* - 1_500, AN4.3, Offenes Antwortformat

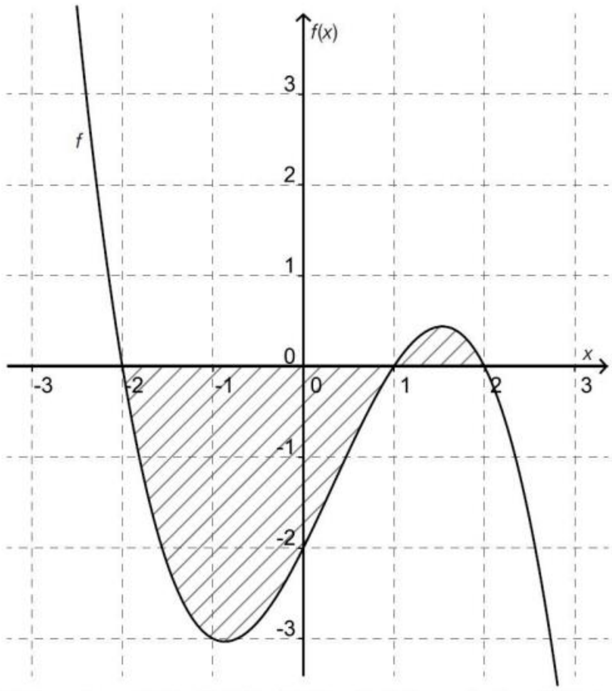
Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = x^2$.

Berechnen Sie die Stelle b so, dass die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion f im Intervall [2; 4] in zwei gleich große Flächen A_1 und A_2 geteilt wird (siehe Abbildung)!



Integral einer Funktion f* - 1_404, AN4.3, Halboffenes Antwortformat

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Polynomfunktion *f*. Alle Nullstellen sind ganzzahlig. Die Fläche, die vom Graphen der Funktion *f* und der *x*-Achse begrenzt wird, ist schraffiert dargestellt. *A* bezeichnet die Summe der beiden schraffierten Flächeninhalte.



Geben Sie einen korrekten Ausdruck für *A* mithilfe der Integralschreibweise an!

A = ____