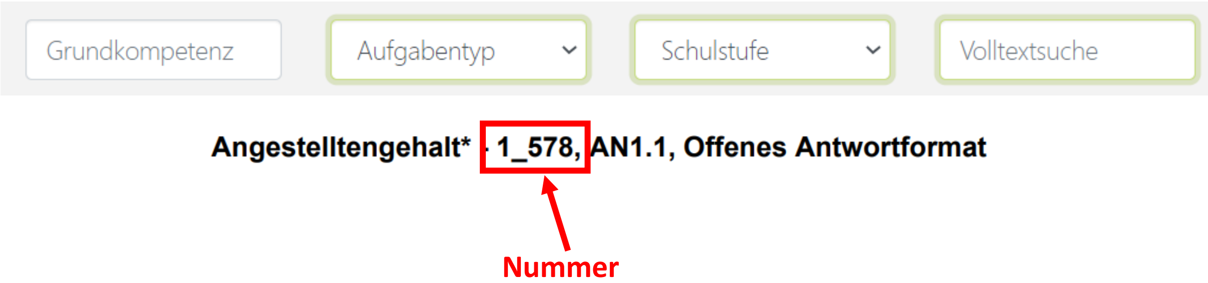
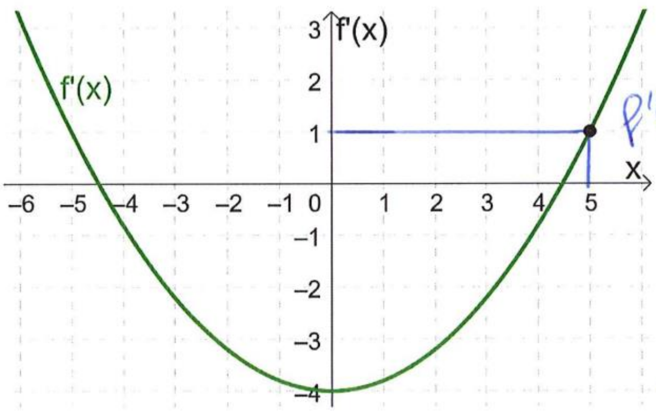
AN3 – Ableitungsfunktion/Stammfunktion (Lösungen)

Lösungen Maturaaufgaben:

1) Gehe zum Aufgabenpool Mathematik AHS: https://prod.aufgabenpool.at/amn/index.php?id=M
2) Gib im Feld „**Volltextsuche**“ die **Nummer** ein. Du kommst zur zugehörigen Aufgabe. Die Lösungen sind bei der Aufgabe enthalten.



Bsp. 1) Gegeben ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$. Der Punkt $P = (3|7)$ liegt auf dem Graphen der Funktion f. Bestimme die Gleichung der Tangente der Funktion f durch den Punkt P.



$f'(5)=1 \qquad P=(3|7)$

$t: y=1x+d$

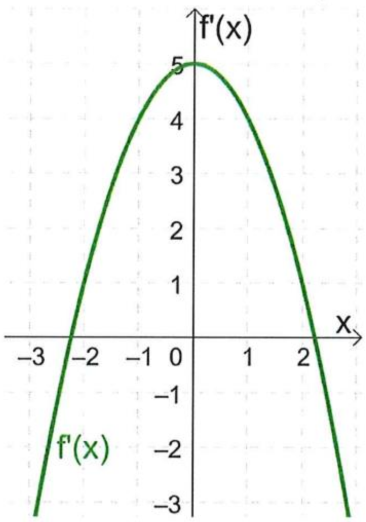
$7=1\cdot 3+d \quad |-3$

$4=d$

$t: \underline{y=x+4}$

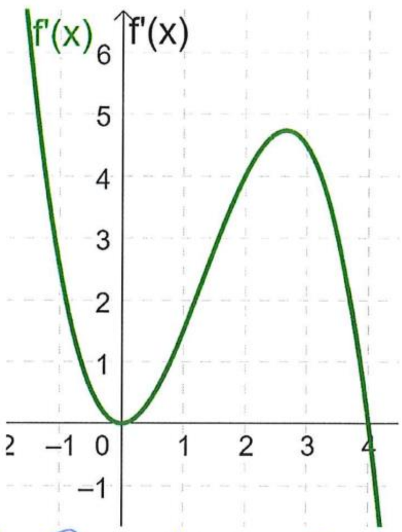
Bsp. 2) Gegeben ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$. Bestimme die Steigung der ursprüngliche Funktion $f(x)$ an den gesuchten Stellen.

$x_1 = -2\,;x_2 = 0\,;x_3 = 1$	$x_1 = 0\,;x_2 = 2\,;x_3 = 4$



$f'(-2)=1$ $f'(1)=4$

$f'(0)=5$

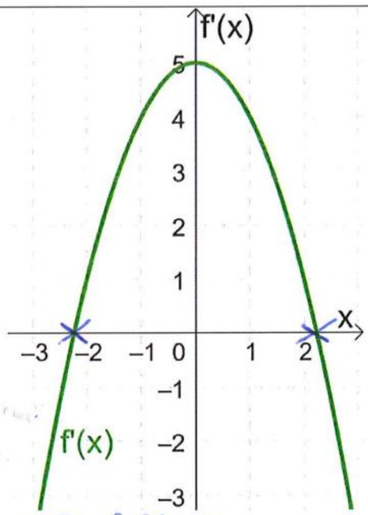


$f'(0)=0$ $f'(4)=0$

$f'(2)=4$

Bsp. 3) Gegeben ist der Graph einer Ableitungsfunktion $f'(x)$.

- Bestimme die möglichen Extremstellen der Funktion f und gib auch an, welcher Art sie sind.
- Bestimme das Monotonieverhalten der ursprünglichen Funktion $f(x)$.

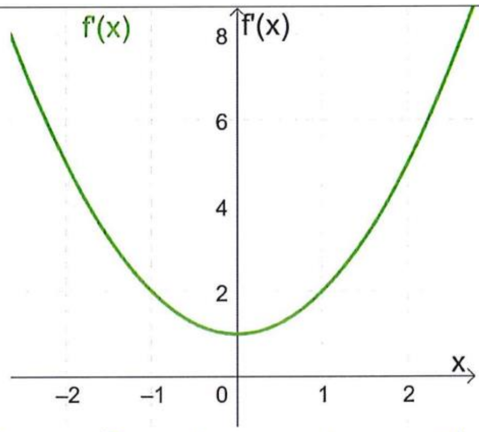


∘ $(-\infty; -2{,}3)$: fallend] $x=-2{,}3$ ↘↗

∘ $(-2{,}3; 2{,}3)$: steigend] Minimumstelle

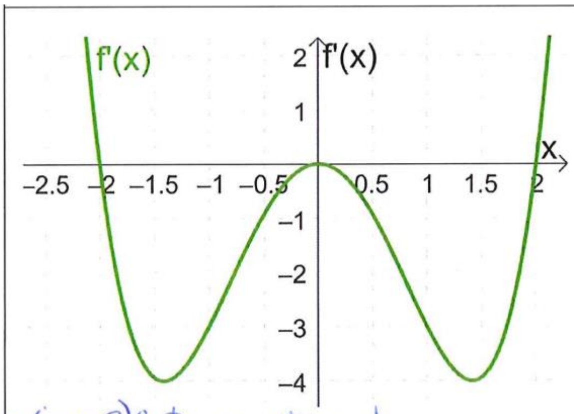
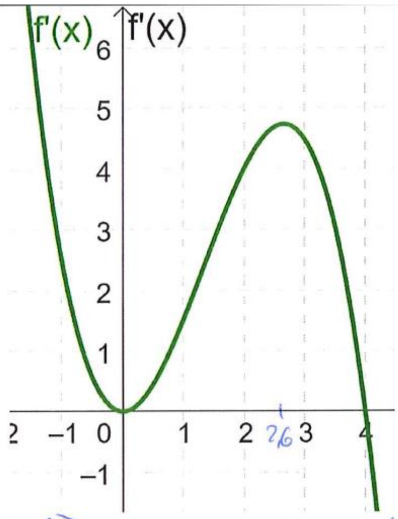
∘ $(2{,}3; +\infty)$: fallend] $x=2{,}3$ ↗↘

Maximumstelle



∘ $(-\infty; +\infty)$: str. mon. steigend!

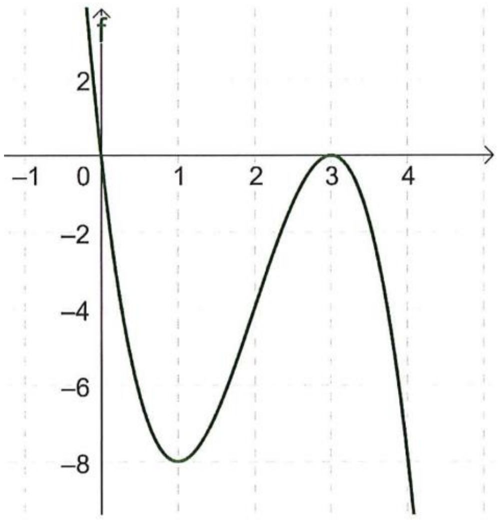
∘ Keine lokalen Extremstellen

 • $(-\infty;-2)$: str. mon. steigend • $(-\infty;2)$: str. mon. fallend bei $x=0$: Sattelstelle • $(2;+\infty)$: str. mon. steigend $x_1=-2$ … Maximumstelle $x_2=2$ … Minimumstelle	 • $(-\infty;4)$: str. mon. steigend $x=0$… Sattelstelle • $(4;+\infty)$: str. mon fallend $x=4$… Maximumstelle!

Bsp. 4)

a. $f(x)=x^2-5x$	b. $f(x)=3x^4+6x^3-2$	c. $f(x)=-2x^3+5x^2-7x+1$
$f'(x)=2x-5$ $f''(x)=2$	$f'(x)=12x^3+18x^2$ $f''(x)=36x^2+36x$	$f'(x)=-6x^2+10x-7$ $f''(x)=-12x+10$
3 $f'(3)=1$ $f'(7)=9$	3 $f'(3)=486$ $f'(7)=4998$	3 $f'(3)=-31$ $f'(7)=-231$
4 $f''(-4)=2$ $f''(8)=2$	4 $f''(-4)=432$ $f''(8)=2592$	4 $f''(-4)=58$ $f''(8)=-86$
5 $f(-5)=50 \Rightarrow P_1=(-5\|50)$ $f(10)=50 \Rightarrow P_2=(10\|50)$	5 $f(-5)=1123$ $P_1=(-5\|1123)$ $f(10)=35998$ $P_2=(10\|35998)$	5 $f(-5)=411$ $P_1=(-5\|411)$ $f(10)=-1569$ $P_2=(10\|-1569)$

Bsp. 5)



$f'(0) < 0$	~~O~~
$f'(3) = 0 \,\&\, f''(3) < 0$	~~O~~
$f''(2) = 0 \,\&\, f'''(2) \neq 0$	~~O~~
$f'(1) = 0 \,\&\, f''(1) < 0$	O
$x = 3$ ist eine lokale Maximumstelle	~~O~~
$f(1) < 0$	~~O~~
$f''(3) > 0$	O
$f(3) = 0 \,\&\, f'(3) = 0$	~~O~~
$f(2) > 0$	O
$f'(2{,}5) > 0$	~~O~~

Bsp. 6)

a. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$	b. $f(x) = -4x^2 + 10$	c. $f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 7$
$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ $f''(x) = 6x - 6$	$f'(x) = -8x$ $f''(x) = -8$	$f'(x) = 8x^3 - 8x$ $f''(x) = 24x^2 - 8$
① $f'(x) = 0$: $3x^2 - 6x + 2 = 0$ $\Rightarrow x_1 \approx 0{,}42$; $x_2 \approx 1{,}58$ ② $f''(0{,}42) = -3{,}48 < 0$ MAX. $f''(1{,}58) = 3{,}48 > 0$ MIN. ③ $f(0{,}42) = 0{,}38$ $H = (0{,}42 \mid 0{,}38)$ $f(1{,}58) \approx -0{,}38$ $T = (1{,}58 \mid -0{,}38)$	① $f'(x) = 0$ $-8x = 0 \quad |:(-8)$ $x = 0$ ② $f''(0) = -8 < 0$ $\rightsquigarrow x = 0$... MAXIMUM ③ $f(0) = 10$ $\Rightarrow H = (0 \mid 10)$	① $f'(x) = 0$: $8x^3 - 8x = 0$ $\Rightarrow x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$ ② $f''(-1) = 16 > 0$ MIN $f''(0) = -8 < 0$ MAX $f''(1) = 16 > 0$ MIN ③ $f(-1) = -9 \rightsquigarrow T = (-1 \mid -9)$ $f(0) = -7 \rightsquigarrow H = (0 \mid -7)$ $f(1) = -9 \rightsquigarrow T = (1 \mid -9)$

Bsp. 7a)

29a) $f(x)=x^3-6x^2+9x$

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$f''(x)=6x-12$

$f'''(x)=6$

① $f(x)=0$

$x^3-6x^2+9x=0$

↳ $x_1=0$ $x_2=3$

② $f'(x)=0$

$3x^2-12x+9=0$

↳ $x_1=1 \rightarrow f''(1)=-6<0$ x_1… Maximumstelle

$f(1)=4 \rightarrow \underline{H=(1|4)}$

↳ $x_2=3 \rightarrow f''(3)=6>0$ x_2… Minimumstelle

$f(3)=0 \rightarrow \underline{T=(3|0)}$

③ $f''(x)=0$

$6x-12=0$

$6x=12$

$x=2$

$f'''(2)=6\neq 0$ ✓

$f(2)=2$

$\underline{W=(2|2)}$

Wendetangente:

$t: y=kx+d$

$f'(2)=-3$

$t: y=-3x+d$

$t: 2=-6+d \quad |+6$

$8=d$

$\underline{t_w: y=-3x+8}$

Bsp. 7b)

b) $f(x) = x^2 - 4$

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2$

① $f(x) = 0$

$x_1 = -2$ $\qquad$ $x_2 = 2$

② $f'(x) = 0$

$2x = 0$

$x = 0$

$f''(0) = 2 \Rightarrow x = 0$ Minimumstelle

$\Rightarrow f(0) = -4 \Rightarrow T = (0|-4)$

③ Keine Wendestelle! $f''(x) = 0 \quad 2 \neq 0$ ↯

9 $f(x)=x^4-2x^2$

① $x^4-2x^2=0 \Rightarrow x_1\approx-1{,}4 \quad x_2\approx 0 \quad x_3\approx 1{,}4$

② $f'(x)=4x^3-4x \qquad f''(x)=12x^2-4 \qquad f'''(x)=24x$

$f'(x)=0$

- $x_1=-1 \Rightarrow f''(-1)=8>0$ MINIMUM $\Rightarrow f(-1)=-1 \quad T_1=(-1|-1)$
- $x_2=0 \Rightarrow f''(0)=-4<0$ MAXIMUM $\Rightarrow f(0)=0 \quad H=(0|0)$
- $x_3=1 \Rightarrow f''(1)=8>0$ MINIMUM $\Rightarrow f(1)=-1 \quad T_2=(1|-1)$

③ $f''(x)=0$

$x_1=-0{,}58$

$f'''(-0{,}58)=-13{,}8\neq 0$ ✓

$f(-0{,}58)=-0{,}56 \Rightarrow W_1=(-0{,}58|-0{,}56)$

$f'(-0{,}58)=1{,}54$

$t_{w_1}: y=1{,}54x+0{,}33$

$x_2=+0{,}58$

$f'''(0{,}58)=13{,}8\neq 0$ ✓

$f(0{,}58)=-0{,}56 \Rightarrow W_2=(0{,}58|-0{,}56)$

$f'(0{,}58)=-1{,}54 \Rightarrow t_w: y=-1{,}54x+0{,}33$

Bsp. 8)

30) $h(x) = -0{,}01x^2 + 0{,}7x$

$h'(x) = v(x) = -0{,}02x + 0{,}7$

$h''(x) = -0{,}02 \quad (= a(x))$

a) $h(x) = 0$

$\hookrightarrow x_1 = 0$

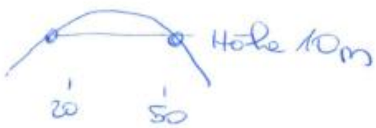
$\hookrightarrow x_2 = 70 \quad \rightsquigarrow D = [0; 70]$

b) $h(x) = 10$

Geo-Gebra $\hookrightarrow -0{,}01x^2 + 0{,}7x = 10$

$\Rightarrow x_1 = 20\,m \qquad x_2 = 50\,m$

Nach 20m & 50m.



c) $h(40) = \underline{\underline{12\,m}}$

d) $h'(x) = 0 \quad \rightsquigarrow x = 35$

$h''(35) = -0{,}02 < 0$ MAXIMUM!

$\rightsquigarrow$ Nach 35m erreicht der Ball seine maximale Höhe!

$\Downarrow$

$h(35) = 12{,}25\,m$

Bsp. 9)

31) $s(t) = -\frac{1}{64}t^3 + \frac{15}{16}t^2$

$s'(t) = v(t) = -\frac{3}{64}t^2 + \frac{30}{16}t$

$s''(t) = a(t) = -\frac{6}{64}t + \frac{30}{16}$

a) $s(30) - s(15) = 421{,}9 - 158{,}2 \approx \underline{263{,}7\,m}$

Zwischen der 15. & 30. Sekunde wurden ca. 263,7 m zurückgelegt!

b) $\frac{s(20)-s(5)}{20-5} \approx \underline{\underline{15{,}2\,\frac{m}{s}}}$

c) $s'(10) = 14{,}1\,\frac{m}{s}$ Momentane Geschw. nach 10 Sekunden

$s''(25) = -0{,}47\,\frac{m}{s^2}$ Momentane Beschleunigung nach 25s.

d) $v(t) = -\frac{3}{64}t^2 + \frac{30}{16}t$

$v'(t) = -\frac{6}{64}t + \frac{30}{16}$

$v''(t) = -\frac{6}{64}$

$\rightarrow v'(t) = 0 \Rightarrow t = 20s$

$v''(20) = -\frac{6}{64} < 0$ ↗ MAXIMUM!

$v(20) = 18{,}75\,\frac{m}{s}$

Nach 20sek erreicht das Auto eine maximale Geschwindigkeit von $18{,}75\,\frac{m}{s}$.

Bsp. 10)

Aufgabenstellung:

f hat an der Stelle x eine Minimumstelle	D
f hat an der Stelle x eine Nullstelle	C
f besitzt an der Stelle x eine Sattelstelle	B
f hat an der Stelle x die Steigung 2	F

A	$f'(x) = 0 \,\&\, f''(x) < 0$
B	$f'(x) = 0 \,\&\, f''(x) = 0$
C	$f(x) = 0$
D	$f'(x) = 0 \,\&\, f''(x) > 0$
E	$f'(x) = 2$
F	$f'(2) = 2$

Bsp. 11)

33) $s(t) = -\frac{t^3}{3} + 2t^2 + \frac{t}{3}$

$v(t) = s'(t) = -t^2 + 4t + \frac{1}{3}$

$a(t) = s''(t) = -2t + 4$

a) $a(t) = 0$

$-2t + 4 = 0$

$-2t = -4$

$t = 2$

b) $v'(t) = 0 \Leftrightarrow a(t) = 0 \rightsquigarrow t = 2$

$v''(t) = a'(t) = -2$

$\Rightarrow v''(2) = -2 < 0$ MAXIMUM!

Bsp. 12)

Aufgabenstellungen:

a. Gib das **Monotonieverhalten** der ursprünglichen Funktion $f(x)$ an.

$(-\infty; -2): \searrow$

$(-2; 3): \searrow$

$(3; +\infty): \nearrow$

b. Gib **lokale Extremstellen (inkl. Art)** der ursprünglichen Funktion $f(x)$ an.

$x = 3$: lok. MIN

$x = -2$: keine Extremstelle (Sattelstelle)

c. Gib das **Krümmungsverhalten** der ursprünglichen Funktion f(x) an.

$(-\infty; -2)$: LINKSGEKRÜMMT

$(-2; 1{,}3)$: RECHTSGEKRÜMMT

$(1{,}3; +\infty)$: LINKSGEKRÜMMT

Bsp. 13)

$v(t) = -4t^3 + 12t^2 + 2t - 1$

$a(t) = -12t^2 + 24t + 2$

$a'(t) = -24t + 24 \longrightarrow a'(t) = 0$

$a''(t) = -24$

$-24t + 24 = 0$

$-24t = -24$

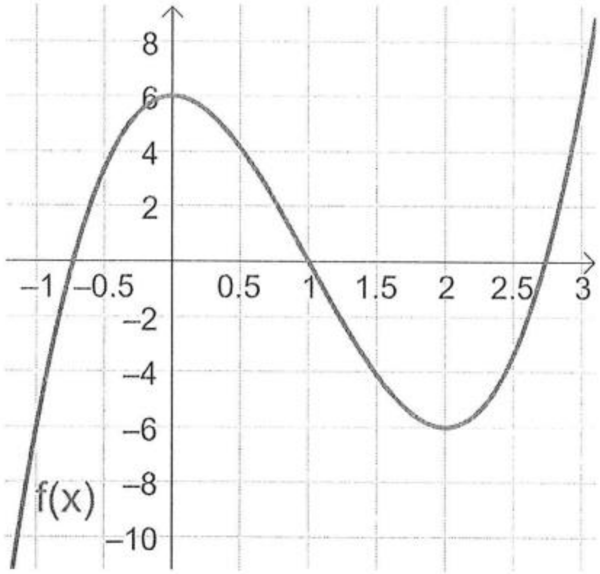
$t = 1$

$a(1) = -12 + 24 + 2$

$\underline{= 14\,m/s^2}$ max. Beschl.

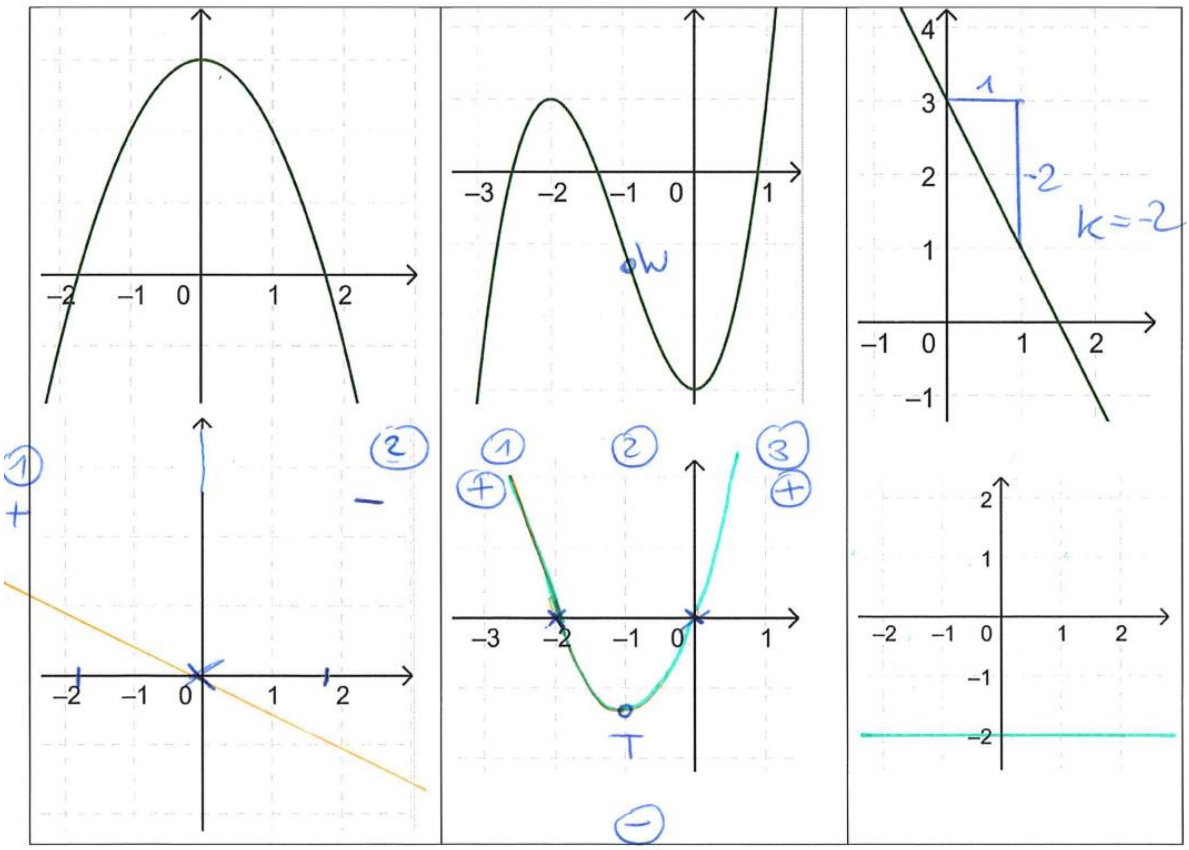
$a''(1) = -24 < 0$ ✓ $\underline{\text{MAX!}}$

Bsp. 14)

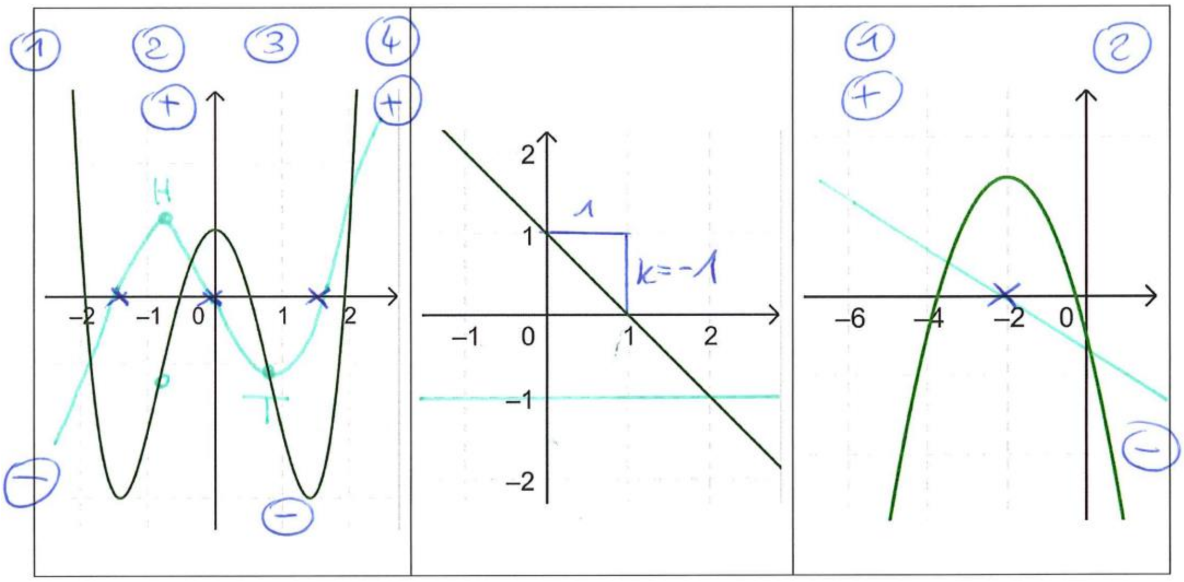


$f(1{,}5)$	$=-4$
$f'(0)$	$=0$
$f'(2)-f'(3)$	<0
$f''(2{,}5)$	>0
$f''(1)+f(2)$	$0+(-6)=-6$
$f(-1)+f'(0)+f''(1)$	$-6+0+0=-6$

Bsp. 15)



Bsp. 16)



Bsp. 17)

a. $f(x) = 3x + 2$ $F(x) = 3\frac{x^2}{2} + 2x$ $F'(x) = 3x + 2$ ✓	**b.** $f(x) = 4x^2 - 3x$ $F(x) = 4\cdot\frac{x^3}{3} - 1{,}5x^2$ $F'(x) = 4x^2 - 3x$ ✓	**c.** $f(x) = 6x^5 - 3x^2$ $F(x) = x^6 - x^3$ $F'(x) = 6x^5 - 3x^2$ ✓
d. $f(x) = x^{-4}$ $F(x) = \frac{x^{-3}}{-3}$ $F'(x) = \frac{\cancel{(-3)}\cdot x^{-4}}{\cancel{-3}} = x^{-4}$ ✓	**e.** $f(x) = -3x + 2$ $F(x) = -1{,}5x^2 + 2x$ $F'(x) = -3x + 2$ ✓	**f.** $f(x) = 4x^{-2} - 2x$ $F(x) = 4\cdot\frac{x^{-1}}{-1} - x^2$ $F'(x) = 4\cdot\frac{\cancel{(-1)}\cdot x^{-2}}{\cancel{-1}} - 2x$ $= 4\cdot x^{-2} - 2x$ ✓

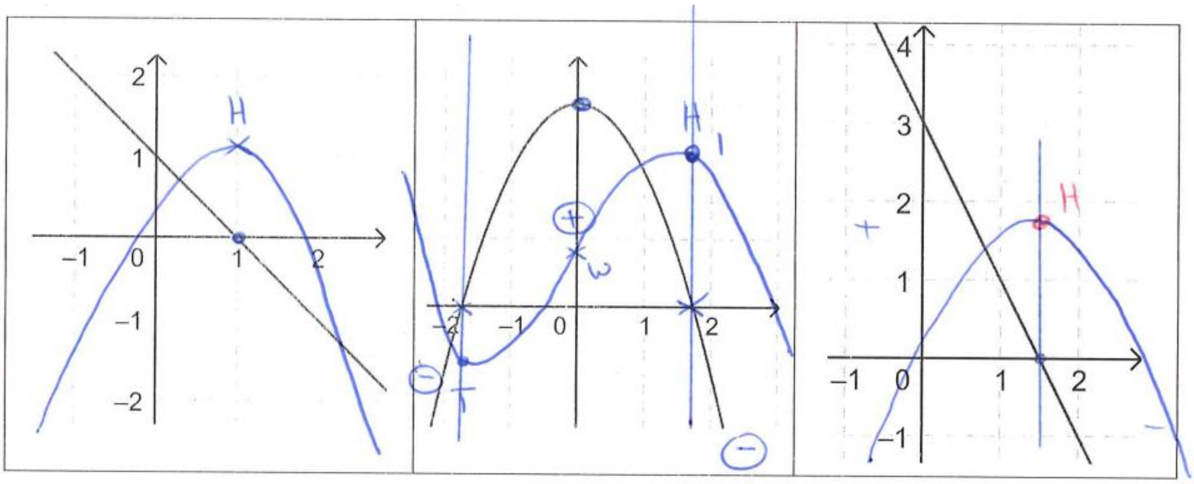
Bsp. 18)

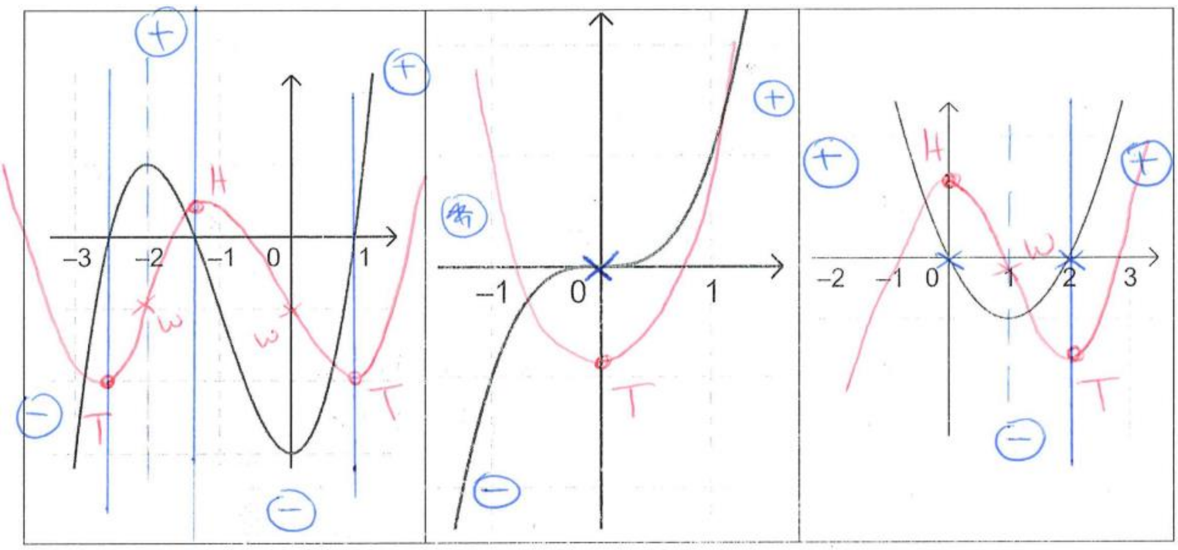
Eine Funktion f hat unendlich viele Stammfunktionen, die sich nur durch eine additive Integrationskonstante unterscheiden.	~~O~~ X
Wenn man die Funktion F integriert, erhält man die Funktion f. f $\int f(x)\,dx =$	O
Eine Funktion F heißt Stammfunktion der Funktion f, wenn gilt: $f(x) = F(x) + c$ f	O
Es gilt: $f(x) = F'(x)$	~~O~~ X
Wenn man die Funktion f differenziert, erhält man die Funktion F.	O

Bsp. 19)

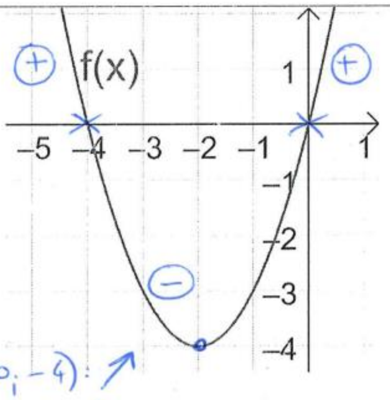
a. $f(x)=4$ & $F(-2)=-5$ $\Rightarrow F(x)=4x+c$ $-5=4\cdot(-2)+c$ $-5=-8+c \quad \vert +8$ $c=3$ $F(x)=4x+3$	b. $f(x)=2x$ & $F(3)=2$ $\Rightarrow F(x)=2\cdot\frac{x^2}{2}+c=x^2+c$ $2=3^2+c \quad \vert -9$ $c=-7$ $F(x)=x^2-7$	c. $f(x)=x^2-4$ & $F(6)=49$ $F(x)=\frac{x^3}{3}-4x+c$ $49=\frac{216}{3}-4\cdot 6+c$ $49=\underbrace{48}+c \quad \vert -48$ $c=1$ $F(x)=\frac{x^3}{3}-4x+1$
d. $f(x)=x^4-e^x$ & $F(0)=-5$ $F(x)=\frac{x^5}{5}-e^x+c$ $-5=\frac{0^5}{5}-e^0+c$ $-5=0-1+c \quad \vert +1$ $c=-4$ $F(x)=\frac{x^5}{5}-e^x-4$	e. $f(x)=-6x^5$ & $F(-1)=-101$ $F(x)=-x^6+c$ $-101=-(-1)^6+c$ $-101=-1+c \quad \vert +1$ $-100=c$ $F(x)=-x^6-100$	f. $4x^2-3x$ & $F(6)=245$ $F(x)=4\cdot\frac{x^3}{3}-3\cdot\frac{x^2}{2}+c$ $245=4\cdot\frac{216}{3}-3\cdot\frac{36}{2}+c$ $245=288-54+c$ $245=234+c \quad \vert -234$ $11=c$ $F(x)=4\cdot\frac{x^3}{3}-3\cdot\frac{x^2}{2}+11$

Bsp. 20)





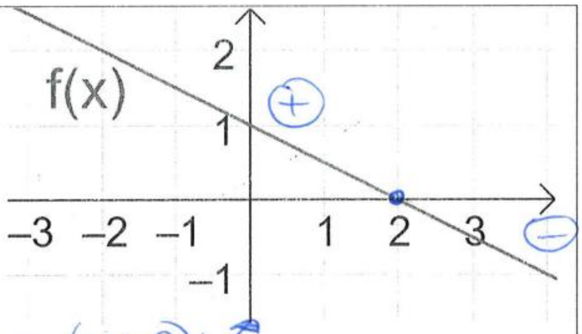
Bsp. 21)



a) $(-\infty; -4)$: ↗
$(-4; 0)$: ↘
$(0; +\infty)$: ↗

b) $x_1 = -4$: MAX
$x_2 = 0$: MIN

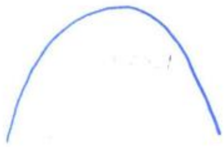
c) $(-\infty; -2)$: rechtsgekr.
$(-2; +\infty)$: linksgekr.

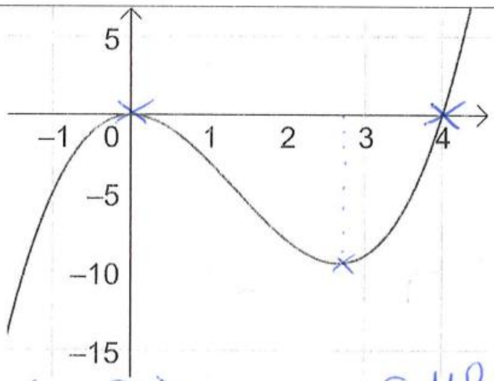


a) $(-\infty; 2)$: ↗
$(2; +\infty)$: ↘

b) $x = 2$: MAX

c) $(-\infty; +\infty)$: rechtsgekr.

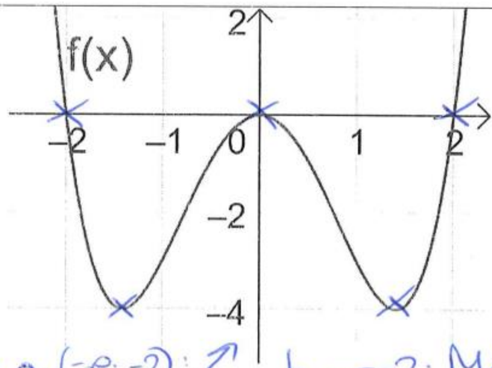




a) $(-\infty; 0)$: ↘
$(0; 4)$: ↘
$(4; +\infty)$: ↗

b) $x = 0$: Sattelstelle
$x = 4$: MIN.

c) $(-\infty; 0)$: linksgekr.
$(0; 2{,}7)$: rechtsgekr.
$(2{,}7; +\infty)$: linksgekr.

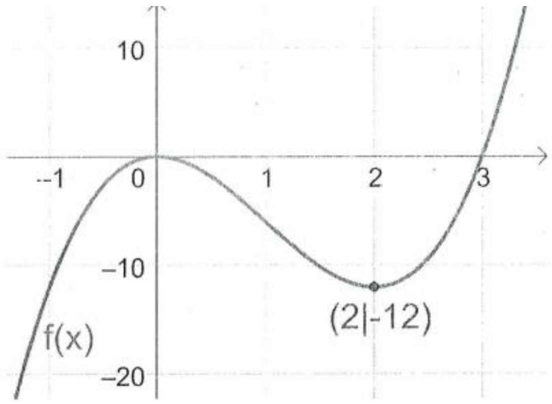


a) $(-\infty; -2)$: ↗
$(-2; 0)$: ↘
$(0; 2)$: ↘
$(2; +\infty)$: ↗

b) $x = -2$: MAX
$x = 0$: SATTELSTE
$x = 2$: MIN

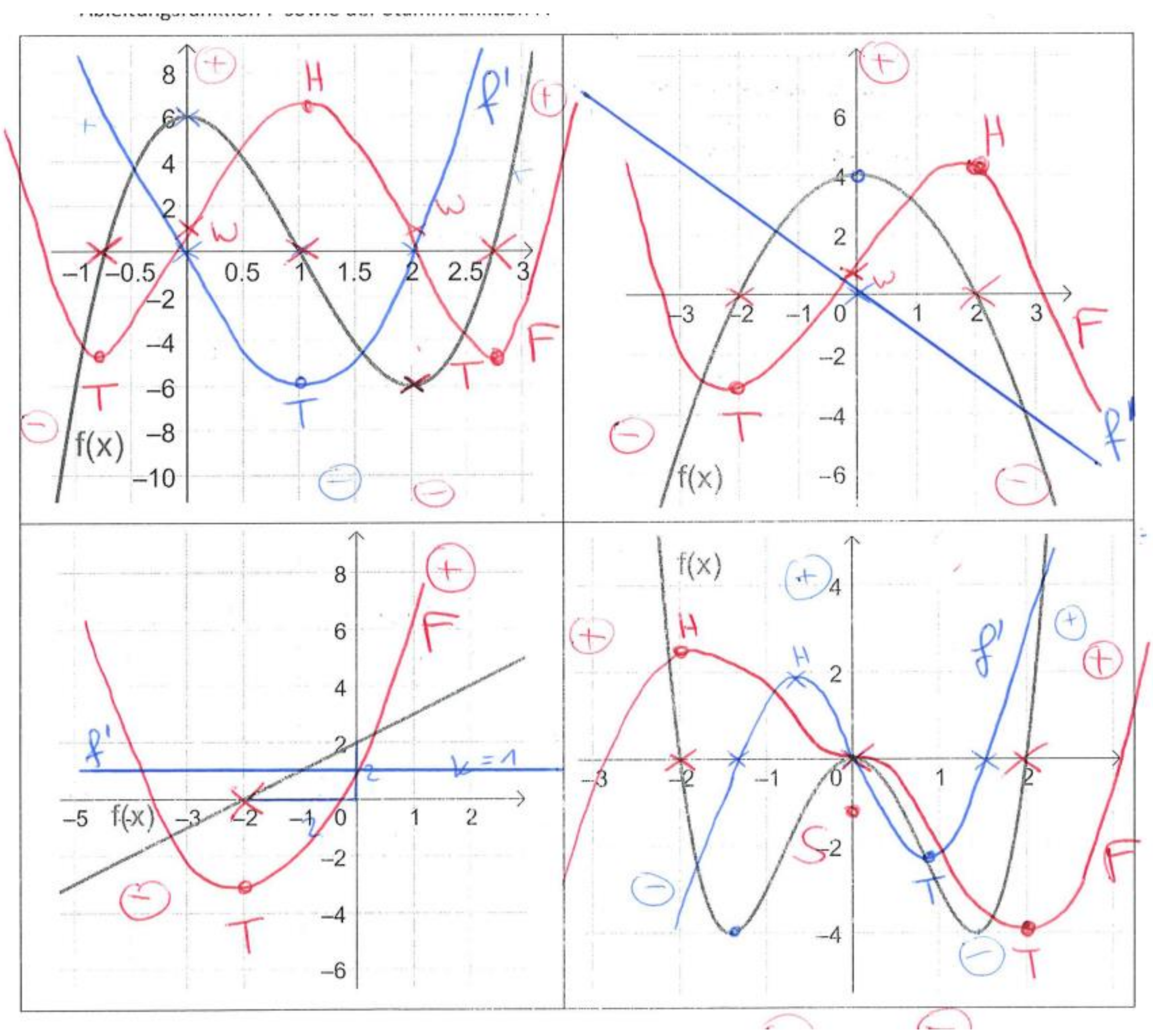
c) $(-\infty; -1{,}4)$: rechtsgekr.
$(-1{,}4; 0)$: linksgekr.
$(0; 1{,}4)$: rechtsgekr.
$(1{,}4; +\infty)$: linksgekr.

Bsp. 22)



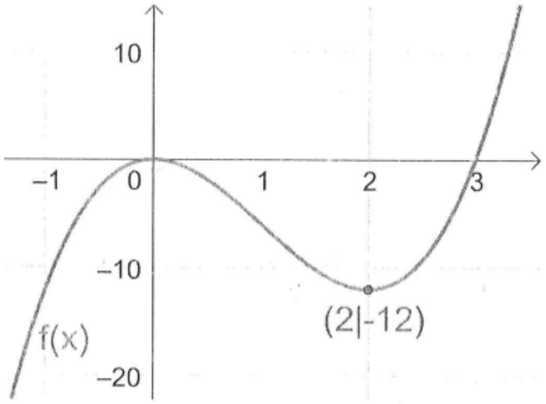
Die Funktionswerte der Funktion f' sind im Intervall $(0; 2)$ negativ.	X
Die Stammfunktion F ist im Intervall $(2; 3)$ rechtsgekrümmt. LINKS	O
Die Stammfunktion F besitzt an der Stelle $x = 3$ eine lokale ~~Maximum~~ MIN stelle. MIN	X
Die Stammfunktion F besitzt an der Stelle $x = 3$ eine Sattelstelle. MIN	O
Die Ableitungsfunktion f' besitzt an der Stelle $x = 3$ eine lokale Minimumstelle.	O

Bsp. 23)



Bsp. 24)

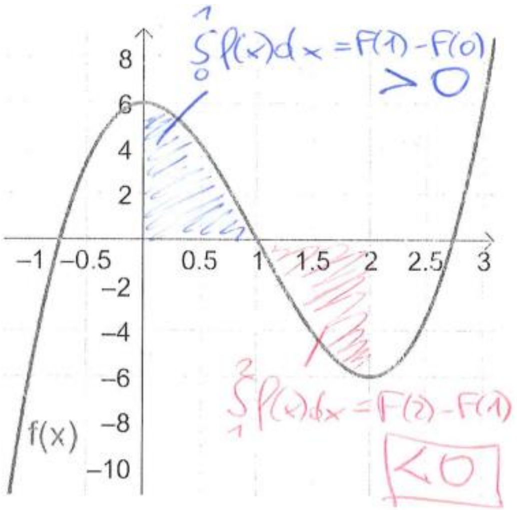
Bsp. 37) Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion f dritten Grades. Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen zu den Ableitungsfunktion f' bzw. f'', sowie einer möglichen Stammfunktion F an.



$F''(0) > 0$ <0	O
$F''(0) = 0$ $f'(0)=0$ ✓	X
$f'(2) < 0$ $=0$	O
$F'(2) < 0$ $f(2)<0$ ✓	X
$F'''(3) < 0$ $f''(3)>0$	O

Video 14

Bsp. 25)



$f(3) = 6$	$f(0) = 6$
$F(1) - F(0) > 0$	$F(2) - F(1) < 0$
$f''(1) = 0$	$f''(2) > 0$
$f'(1) < 0$	$F'(-1) = f(-1) = -6$
$f(1{,}5) = -4$	$f(-1) = -6$
$F'(0{,}5) = f(0{,}5) = 4$	$F''(-1) = f'(-1) > 0$
$F'''(2) = f''(2) > 0$	$F'''(-1) = f''(-1) < 0$
$F''(0) = f'(0) = 0$	$F''(3) = f'(3) > 0$
$f''(2{,}5) > 0$	$f'(2) = 0$
$F'(1) = f(1) = 0$	$f'(-0{,}5) > 0$